Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Величко, О секвенциальной сепарабельности, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 5, 652–657

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2639>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:36:54

УДК 517.982.272+515.122.55

О СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ

Н. В. Величко

Получен новый критерий секвенциальной сепарабельности пространства $C(X)$ непрерывных вещественных функций на X в топологии простой сходимости.

Библиография: 4 названия.

Секвенциально сепарабельным называется пространство, имеющее счетное секвенциально плотное в нем подмножество.

Множество A секвенциально плотно в пространстве X , если каждая точка $x \in X$ является пределом некоторой последовательности точек A . Ясно, что каждое секвенциально сепарабельное пространство сепарабельно; обратное неверно.

Все пространства предполагаются тихоновскими.

Через $C_p(X)$ обозначается линейное пространство всех непрерывных вещественных функций на пространстве X , наделенное топологией поточечной сходимости.

Через $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ обозначаются числовая прямая и множество всех положительных целых чисел.

Нуль-множество в X – множество нулей некоторой непрерывной вещественной функции на X , *конуль-множество* – дополнение до нуль-множества.

Известная проблема – когда пространство $C_p(X)$ секвенциально сепарабельно, недавно решена в работе [1].

В заметке предлагается другой критерий секвенциальной сепарабельности $C_p(X)$, основанный на некоторых идеях и конструкциях теории B -измеримых отображений [2, 30, 31].

В качестве приложения доказана секвенциальная сепарабельность $C_p(X)$ для двух конкретных пространств.

ТЕОРЕМА 1. *Пространство $C_p(X)$ секвенциально сепарабельно тогда и только тогда, когда существует уплотнение пространства X на сепарабельное метризуемое пространство Y , являющееся бэровским изоморфизмом первого уровня (т.е. образ любого конуль-множества из X является F_σ -множеством в Y).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $C_p(X)$ секвенциально сепарабельно. Пусть S – счетное секвенциально плотное в $C_p(X)$ множество.

Наделяем X слабой топологией τ относительно семейства S .

Напомним определение слабой топологии.

Пусть τ_e – естественная топология числовой прямой $\mathbb{R}$. Тогда τ есть точная верхняя грань семейства $\{f^{-1}(\tau_e) = \{f^{-1}(V) : V \in \tau_e\} : f \in S\}$ прообразов топологии τ_e при

отображениях из S . Базу топологии τ образуют всевозможные конечные пересечения элементов семейства $\{f^{-1}(\tau'_e) : f \in S, \tau'_e - \text{счетная база } \tau_e\}$, так что τ обладает счетной базой. Кроме того, пространство $Y = (X, \tau)$ регулярно, так что оно метризуемо по теореме Урысона.

Докажем, что требуемым уплотнением $F: X \rightarrow Y$ будет тождественное отображение X .

Так как всякая функция $f \circ F^{-1}$ непрерывна на Y при $f \in S$, а при $f \in C(X)$ функция f является поточечным пределом последовательности функций из S , то $f \circ F^{-1}$ является функцией первого класса на Y [2, 31.VIII.1], так что прообраз открытого в $\mathbb{R}$ множества при отображении $f \circ F^{-1}$ будет F_σ -множеством в Y .

Так как конуль-множество в X является прообразом открытого в $\mathbb{R}$ множества, его образ при отображении F будет F_σ -множеством в Y . Необходимость установлена.

Докажем достаточность. Пусть $F: X \rightarrow Z$ – уплотнение X на сепарабельное метризуемое пространство Z , удовлетворяющее условиям теоремы. Пусть $f \in C(X)$. Можно предположить, что функция f ограничена (в противном случае ее можно заменить функцией $\varphi \circ f$, где $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ – гомеоморфизм). Будем отождествлять любую функцию g на X с функцией $g \circ F^{-1}$ на Z (отождествляя по существу множества (но не пространства) X и Z).

Пусть Y – некоторое компактное метризуемое расширение пространства Z . Для каждого $n \in \mathbb{N}$ по индукции построим

- 1) конечно-значную функцию f_n на множестве $Z' \supseteq Z$ такую, что выполняется соотношение

$$(a) \quad |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ при } x \in Z;$$
- 2) последовательность $\{f_{n,m} : m \in \mathbb{N}\}$ непрерывных функций на Y , поточечно сходящуюся на Z к функции f_n и такую, что выполняется формула

$$(b) \quad |f_{n+1,m}(x) - f_{n,m}(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Предположим, что такие объекты построены для всех $i < n$.

Выберем конечное покрытие $\{H_n^i : i \leq k(n)\}$ множества $f(X)$ интервалами длины $1/2^{n+1}$. Положим $V_n^i = f^{-1}(H_n^i)$. Так как V_n^i – конуль-множество в пространстве X , то $F(V_n^i)$ будет F_σ -множеством в Z и найдется F_σ -множество W_n^i в Y такое, что $W_n^i \cap Z = F(V_n^i)$ (если $F(V_n^i) = \bigcup \{F_{n,k}^i : k \in \mathbb{N}\}$, где $F_{n,k}^i$ замкнуты в Z , то W_n^i можно определить как $\bigcup \{[F_{n,k}^i]_Y : k \in \mathbb{N}\}$). По теореме редукции [2, 30.VIII.1] найдется дизъюнктное семейство $\{U_n^i\}$ F_σ -множеств в Y такое, что $U_n^i \subseteq W_n^i$ и $\bigcup \{U_n^i : i \leq k(n)\} = \bigcup \{W_n^i : i \leq k(n)\}$. Каждое U_n^i можно представить как $\bigcup \{U_{n,m}^{i,m} : m \in \mathbb{N}\}$, где $U_{n,m}^{i,m}$ замкнуто в Y и $U_{n,m}^{i,m} \subseteq U_n^{i,m+1}$. Для каждого i выберем точку $x_i \in F(V_n^i)$ (произвольно) и положим $t_i = f(x_i)$. Тогда $t_i \in H_n^i$. Далее, полагая $f_n(x) = t_i$ при $x \in U_n^i$, получим конечно-значную функцию f_n на множестве $\bigcup \{U_n^i : i \leq k(n)\} \supseteq Z$. Пусть $x \in Z$ – произвольная точка. Найдется i такое, что $x \in U_n^i$. Так как $U_n^i \cap Z \subseteq F(V_n^i)$, то точки $f_n(x)$ и $f(x_i)$ находятся в одном интервале длины $1/2^{n+1}$; следовательно, $|f_n(x) - f(x)| < 1/2^{n+1}$. Это верно для каждого x , так что выполняется (a).

Для каждого m зададим функцию $g'_{n,m}$ на множестве $A_m = \bigcup \{U_n^{i,m} : i \leq k(n)\}$, положив $g'_{n,m}(x) = t_i$ при $x \in U_n^{i,m}$. Эта функция будет непрерывной на A_m в силу дизъюнктности семейства $\{U_n^{i,m} : i \leq k(n)\}$. Используя замкнутость A_m , применим теорему Урысона и продолжим $g'_{n,m}$ по непрерывности до функции $g_{n,m}: Y \rightarrow \mathbb{R}$. Последовательность $\{g_{n,m} : m \in \mathbb{N}\}$ будет поточечно сходиться к функции f_n на множестве

тве Z . Докажем это.

Пусть $x \in Z$. Найдутся i и m такие, что $x \in U_n^{i,m}$. Тогда $g_{n,l}(x) = t_i$ для $l \geq m$, т.е. $g_{n,l}(x) = f_n(x)$. Рассмотрим непрерывную функцию $g_{n,m} - f_{n-1,m}$. Заметим, принимая во внимание (а), что выполняется

$$(c) \quad |f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n-1}(x)| < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Положим

$$h_{n,m}(x) = \begin{cases} (g_{n,m} - f_{n-1,m})(x), & \text{если } (g_{n,m} - f_{n-1,m})(x) \leq 1/2^{n-1}, \\ 1/2^{n-1}, & \text{если } (g_{n,m} - f_{n-1,m})(x) > 1/2^{n-1}, \\ -1/2^{n-1}, & \text{если } (g_{n,m} - f_{n-1,m})(x) < -1/2^{n-1}. \end{cases}$$

Положим $f_{n,m} = f_{n-1,m} + h_{n,m}$. Тогда последовательность непрерывных функций $\{f_{n,m}\}$ будет поточечно сходиться на множестве Z к функции f_n . Действительно, пусть $x \in Z$. По (с) $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| = \alpha < 1/2^{n-1}$. Так как последовательность $\{g_{n,m}(x)\}$ сходится к $f_n(x)$, то найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что $|g_{n,l}(x) - f_n(x)| < (1/2^{n-1} - \alpha)/2$ для $l \geq k$. Так как $\{f_{n-1,m}(x)\}$ сходится к $f_{n-1}(x)$, найдется $k_1 \geq k$ такое, что $|f_{n-1,l}(x) - f_{n-1}(x)| < (1/2^{n-1} - \alpha)/2$ при $l \geq k_1$. Тогда при $l \geq k_1$ выполняется

$$\begin{aligned} |g_{n,l}(x) - f_{n-1,l}(x)| &\leq |g_{n,l}(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_{n-1}(x)| + |f_{n-1,l}(x) - f_{n-1}(x)| \\ &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \alpha \right) + \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \alpha \right) = \frac{1}{2^{n-1}} - \alpha + \alpha = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Из этого следует

$$f_{n,l}(x) = f_{n-1,l}(x) + h_{n,l}(x) = f_{n-1,l}(x) + (g_{n,l}(x) - f_{n-1,l}(x)) = g_{n,l}(x).$$

Это означает, что последовательность $\{f_{n,m}(x)\}$ совпадает с последовательностью $\{g_{n,l}(x)\}$, начиная с некоторого номера, а так как последняя сходится к $f_n(x)$, то и $\{f_{n,m}(x)\}$ сходится к $f_n(x)$.

Также мы имеем

$$|f_{n,m}(x) - f_{n-1,m}(x)| = |f_{n-1,m}(x) + h_{n,m}(x) - f_{n-1,m}(x)| = |h_{n,m}(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

так что выполняется и (b).

Индукция проведена.

Положим $u_n = f_{n,n}$. Докажем, что $\{u_n\}$ поточечно сходится на X к функции f . Доказательство этого факта будет проходить по стандарту теории B -измеримых отображений.

Пусть $x \in X$ — произвольная точка, $\varepsilon > 0$. Выберем n таким, чтобы $1/2^{n+1} < \varepsilon/3$. В силу (а) $|f(x) - f_n(x)| < 1/2^{n+1}$. Найдется $n_0 > n$ такое, что $|f_n(x) - f_{n,m}(x)| < 1/2^{n+1}$ при $m \geq n_0$ (в силу сходимости $\{f_{n,m}(x)\}$ к $f_n(x)$). Пусть $l \geq n_0$. Тогда, учитывая (b), получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} |f(x) - u_l(x)| &\leq |f_{l,l}(x) - f_{l-1,l}(x)| + \dots + |f_{n+1,l}(x) - f_{n,l}(x)| \\ &\quad + |f_{n,l}(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \frac{1}{2^{l-1}} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{3}{2^{n+1}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Этим доказана сходимость $\{u_n(x)\}$ к $f(x)$ в точках Z .

Так как Y – метризуемый компакт, $C(Y)$ сепарабельно в топологии равномерной сходимости. Пусть S – счетное плотное подмножество $C(Y)$. Для каждой функции u_n выберем функцию $v_n \in S$ согласно условию $|u_n(x) - v_n(x)| < 1/n$ для всех $x \in Y$. Тогда последовательность $\{v_n\}$ будет поточечно сходиться к f на множестве Z . Действительно, пусть $x \in Z$ и $\varepsilon > 0$. Находим n_0 такое, что $|f(x) - u_n(x)| < \varepsilon/2$ при $n > n_0$. Далее находим $n_1 \geq n_0$ такое, что $1/n < \varepsilon/2$ при $n > n_1$. Тогда при $n > n_1$ выполняется $|f(x) - v_n(x)| \leq |f(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - v_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, что доказывает сходимость $\{v_n(x)\}$ к $f(x)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые приложения теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если пространство (X, T) нормально, то $C_p(X)$ секвенциально сепарабельно тогда и только тогда, когда существует уплотнение пространства X на сепарабельное метризуемое пространство Y такое, что образ любого открытого F_σ -множества из (X, T) будет F_σ -множеством в (X, T') .

Утверждение верно в силу того, что в нормальном пространстве конуль-множества совпадают с открытыми F_σ -множествами.

Обозначим через $B_1(X)$ пространство всех функций первого бэровского класса на сепарабельном метрическом пространстве X в топологии поточечной сходимости. Тогда будет справедливым

СЛЕДСТВИЕ 2. Пространство $B_1(X)$ секвенциально сепарабельно.

Следствие доказывается практически так же, как достаточность в теореме 1.

Очень просто доказывается

ТЕОРЕМА 2. Если пространство X псевдокомпактно, то следующие утверждения эквивалентны:

- (a) пространство $C_p(X)$ сепарабельно;
- (b) пространство $C_p(X)$ наследственно сепарабельно;
- (c) пространство $C_p(X)$ наследственно секвенциально сепарабельно;
- (d) пространство X метризуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X метризуемо. Тогда оно компактно. По известной теореме анализа пространство $C(X)$ сепарабельно в равномерной топологии (порожденной суп-нормой); следовательно, наследственно сепарабельно, а следовательно, наследственно секвенциально сепарабельно в этой метрической топологии. Тогда $C(X)$ будет наследственно секвенциально сепарабельным и в более слабой топологии поточечной сходимости.

Если $C_p(X)$ сепарабельно, то по известной теореме [3, I.1] X уплотняется на пространство со счетной базой; уплотнение псевдокомпакта на пространство с первой аксиомой счетности есть гомеоморфизм, так что X метризуемо.

Теорема доказана.

Из теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Для банахова пространства E в слабой топологии следующие утверждения эквивалентны:

- (a) пространство E сепарабельно;

- (b) пространство E наследственно сепарабельно;
- (c) пространство E наследственно секвенциально сепарабельно;
- (d) замкнутый единичный шар B сопряженного пространства E' метризуем в E -топологии.

Следствие обосновывается на том, что

- 1) банахово пространство E в слабой топологии представимо как замкнутое подмножество $C_p(B)$, где B – замкнутая единичная сфера сопряженного пространства E^* ;
- 2) B компактно в E -топологии (по теореме Алаоглу [4, V.4]);
- 3) справедлива теорема 2.

Следующее предположение не зависит от аксиом ZFC .

(В) Каждое несчетное сепарабельное метрическое пространство имеет неборелевские подмножества.

ТЕОРЕМА 3. (В) *Если X метризуемо, то $C_p(X)$ секвенциально сепарабельно тогда и только тогда, когда X сепарабельно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение очевидно.

Пусть X несепарабельно, $F: X \rightarrow Y$ – уплотнение на пространство со счетной базой. Найдется в X несчетное дискретное подпространство X' . Отображение $F|_{X'}$ уплотняет X' на несчетное подпространство Y' пространства Y . Пусть B – неборелевское подмножество Y' , $A = F^{-1}(B)$. Найдется открытое в X множество H такое, что $H \cap X' = A$ (так как A открыто в X' в силу дискретности X'). Заметим, что $F(H)$ не может быть F_σ -множеством в Y , ибо в противном случае и B было бы F_σ -множеством в Y' . Доказано, что $C_p(X)$ не является секвенциально сепарабельным.

ВОПРОС. Можно ли убрать из формулировки теоремы 3 условие существования неборелевских множеств в каждом несчетном сепарабельном метрическом пространстве?

Заметим, что метризуемое пространство веса $\geq c$ (где c – мощность континуума) не может быть секвенциально сепарабельным. Действительно, в таком пространстве имеется дискретное семейство открытых множеств мощности $\geq c$, а следовательно, мощность семейства всех открытых множеств $\geq 2^c$, что несовместимо – в силу теоремы 1 – с секвенциальной сепарабельностью (мощность семейства борелевских подмножеств сепарабельного метрического пространства $\leq c$).

Применим теорему 1 к некоторым конкретным пространствам, относящимся к классике общей топологии.

Базу топологии стрелки на $\mathbb{R}$ образуют полуинтервалы $[a, b)$. $\mathbb{R}$ в этой топологии обозначим через S .

ТЕОРЕМА 4 (М. А. Патракеев). *Пространство $C_p(S)$ секвенциально сепарабельно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F: S \rightarrow \mathbb{R}$ – естественное уплотнение. Любое открытое множество в S есть дизъюнктивное объединение счетного числа множеств, каждое из которых есть либо интервал, либо полуинтервал, которые, очевидно, являются F_σ -множествами в $\mathbb{R}$. Снова выполняются условия теоремы 1.

И последнее приложение относится к пространству Немыцкого $\mathcal{N}$.

ТЕОРЕМА 5. *Пространство $C_p(\mathcal{N})$ секвенциально сепарабельно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\mathcal{N}$ – это верхняя полуплоскость $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$. Через $\mathcal{N}_0$ обозначим множество $\{(x, y) : y = 0\}$, ρ – естественная метрика плоскости. Базу топологии Немыцкого на $\mathcal{N}$ образуют множества $B(x, \varepsilon) \cap \mathcal{N}$ такие, что $B(x, \varepsilon)$ – открытый шар радиуса ε с центром в точке x при $x \notin \mathcal{N}_0$, и $B(x, \varepsilon) = B_0(x, \varepsilon) \cup \{x\}$ при $x \in \mathcal{N}_0$, где $B_0(x, \varepsilon)$ – открытый шар радиуса ε , касающийся оси $\mathcal{N}_0$ в точке x .

Пусть τ – естественная топология полуплоскости $\mathcal{N}$, U – конуль-множество $\mathcal{N}$. Если множество $U \subseteq \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_0$, то оно σ -компактно в $(\mathcal{N}, \tau)$, тем более, является F_σ -множеством в $(\mathcal{N}, \tau)$. То же самое можно сказать об U , если множество $U \cap \mathcal{N}_0$ счетно. Остается рассмотреть случай, когда $U \cap \mathcal{N}_0$ несчетно.

Найдется непрерывное отображение $f: \mathcal{N} \rightarrow [0, 1]$ такое, что $U = f^{-1}((0, 1])$. Положим $F'_n = (1/n, 1]$ и $F_n = f^{-1}(F'_n) \cap \mathcal{N}_0$. Тогда $U \cap \mathcal{N}_0 = \bigcup \{F_n\}$. Фиксируем n . Если F_n счетно, то положим $S_n = F_n$. Пусть F_n несчетно. Для каждой точки $x \in F_n$ находим число $k = k(x)$ такое, что $B(x, 1/k) \subseteq f^{-1}(F'_n)$. Положим $r(x) = k$ и $W_{n,k} = \{x : r(x) = k\}$. Если $W_{n,k}$ счетно, то положим $S_{n,k} = W_{n,k}$. Пусть $W_{n,k}$ несчетно. Тогда найдется счетное множество $S'_{n,k} \subseteq W_{n,k}$ такое, что $W_{n,k} \setminus S'_{n,k}$ плотно в себе (в топологии τ , по теореме Кантора–Бендиксона). Тогда $[W_{n,k} \setminus S'_{n,k}]_\tau \subseteq U$.

Действительно, пусть $x \in [W_{n,k} \setminus S'_{n,k}]_\tau$, $B(x, \varepsilon)$ – произвольная базисная окрестность точки x в пространстве $\mathcal{N}$. Найдется $y \in W_{n,k} \setminus S'_{n,k}$ такое, что либо $\rho((y, 2/k), (x, \varepsilon)) < \varepsilon$ (при $2/k < \varepsilon$), либо $\rho(y, x) < \varepsilon$ (при $\varepsilon < 2/k$). Очевидно, что $B(x, \varepsilon) \cap B(x, 1/k) \neq \emptyset$. Из этого следует, что $f(x) > 0$ и $x \in U$. Положим $S_{n,k} = S'_{n,k} \cup [W_{n,k} \setminus S'_{n,k}]_\tau$; получим F_σ -множество в τ . Тогда F_σ -множеством будет и $S_n = \bigcup \{S_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$. А так как $U \cap \mathcal{N}_0 = \bigcup \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, $F_n = \bigcup \{W_{n,k} : k\}$ и $W_{n,k} \subseteq S_{n,k} \subseteq U$, то F_σ -множествами будут и $U \cap \mathcal{N}_0 = \bigcup \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$, и само множество U .

Остается применить теорему 1.

Теорема 5 доказана.

Заметим, что пространства $C_p(S)$ и $\mathcal{N}$ не являются наследственно сепарабельными (в силу теоремы автора [3, II.5]), так что мы имеем примеры пространств $C_p(X)$, которые секвенциально сепарабельны, но не являются наследственно (секвенциально) сепарабельными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gartside P., Lo J. T. H., Marsh A. Sequential density // Topology Appl. 2003. V. 130. P. 75–86.
- [2] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
- [3] Архангельский А. В. Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [4] Данфорд Н., Шварц Д. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.

Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: vel@imm.uran.ru

Поступило
18.05.2004
Исправленный вариант
05.04.2005