Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Шерстюков, Об одной задаче Леонтьева и представляющих системах экспонент, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 301–313

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:21:01

УДК 517.547.22

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЛЕОНТЬЕВА И ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ ЭКСПОНЕНТ

В. Б. Шерстюков

Изучается вопрос о наличии вполне регулярного роста у целой функции экспоненциального типа, производная которой достаточно быстро растет на нулевом множестве самой функции. В частности, для функции с тригонометрически выпуклым (или положительным) нижним индикатором получено решение одной известной задачи Леонтьева. В качестве приложения дается уточнение некоторых известных ранее результатов о характеристизации показателей представляющих систем экспонент.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Формулировка основных результатов. Изучая вопросы, связанные с представлением функций рядами экспонент, Леонтьев в работе [1] поставил следующую задачу. Пусть $\mathcal{L}(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) с последовательностью простых (всех) нулей $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ и индикатором $h(\mathcal{L}; \theta)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| - h(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) \right\} = 0. \quad (1)$$

Требуется выяснить, является ли $\mathcal{L}$ функцией вполне регулярного роста¹ (в.р.р.).

Указанная задача исследовалась Леонтьевым, Мельником, Братищевым как в приведенной выше, так и в более общей постановке (для целой функции с индикатором $\mathcal{H}(\mathcal{L}; \theta)$ при уточненном порядке $\rho(r) \rightarrow \rho \in [0, \infty)$). Она имеет положительное решение при $\rho \in [0, 1/2)$; тот же результат получен [3] для $\rho \in [1/2, 1)$ при дополнительных предположениях

$$\min_{\theta} \mathcal{H}(\mathcal{L}, \theta) > 0 \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \min_{|\lambda|=r} |\mathcal{L}(\lambda)|}{\ln r} = +\infty.$$

Следует отметить, что при $\rho(r) \equiv \rho$ из теоремы 1 работы Мельника [4] и теоремы 3 обзорной статьи Коробейника [5, с. 106–107] следует справедливость цитированных результатов Братищева уже при любом $\rho > 0$. Если условие положительности индикатора нарушено, то при $\rho \geq 1/2$ соотношение (1) или его естественное обобщение (в случае $\rho(r) \not\equiv 1$) не влекут, вообще говоря, полной регулярности роста функции. В частности,

¹Используемые нами без пояснений сведения из теории целых функций можно найти, например, в [2].

в [3] фактически построен пример четной ц.ф.э.т. с вещественными нулями, удовлетворяющей условию (1), но не имеющей в.р.р.

Обозначим через L класс функций, удовлетворяющих условию “классической” задачи Леонтьева. Вопрос о полной регулярности роста функции $\mathcal{L} \in L$, индикаторная диаграмма которой имеет внутренние точки, в общей ситуации остается открытым. Результаты Мельника позволяют дать положительный ответ на него в случае наличия особой симметрии в расположении корней $\mathcal{L}$ или определенной оценки снизу роста $|\mathcal{L}(\lambda)|$ на некоторой системе расширяющихся до бесконечности окружностей $|\lambda| = R_n$ (например, $\min_{|\lambda|=R_n} |\mathcal{L}(\lambda)| > R_n^{-p}$ при каком-либо $p > 0$). Дополнительные сведения из истории вопроса и точные формулировки соответствующих результатов можно найти в диссертации [6].

В связи с изложенным выше возникает ряд естественных вопросов. В настоящей статье наряду с задачей Леонтьева изучаются два из них. Во-первых, будет ли иметь вполне регулярный рост ц.ф.э.т. $\mathcal{L}$ с простыми нулями $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ и индикатором $h(\mathcal{L}; \theta) > 0$, удовлетворяющая более слабому, чем (1), условию: существует $\gamma \in (0, 1)$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| - \gamma h(\mathcal{L}, \arg \lambda_k) \right\} \geq 0 \quad (2)$$

(такие функции рассматривались в [7])?

Во-вторых, нельзя ли заменить условие (1) более сильным так, чтобы оно влекло в.р.р. у ц.ф.э.т. с простыми вещественными нулями?

Сформулируем основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого фиксированного $\gamma \in (0, 1)$ существует ц.ф.э.т. $\mathcal{L}(\lambda)$ с индикатором $h(\mathcal{L}, \theta) > 0$ при произвольном $\theta \in [0, 2\pi)$ и простыми нулями $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющая соотношению (2), но не являющаяся функцией вполне регулярного роста.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathcal{L}(\lambda)$ – ц.ф.э.т. с простыми вещественными нулями $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, причем других нулей у $\mathcal{L}$ нет. Пусть, далее, выполняется условие*

$$\exists \alpha > 0 : \quad \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} = O(|\lambda_k|^\alpha), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тогда $\mathcal{L}$ имеет в.р.р. и ее индикаторная диаграмма есть отрезок мнимой оси.

Множество S вещественных чисел называется *относительно плотным по (лебеговой) мере* [8, с. 112], если найдутся $\ell, \delta > 0$ такие, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\text{mes}(S \cap [x, x + \ell]) > \delta.$$

Пусть S_γ – множество точек на прямой γ ($0 \in \gamma$), полученное из S поворотом вокруг начала координат на соответствующий угол. Назовем множество S_γ *относительно плотным по мере на прямой γ* .

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция $\mathcal{L} \in L$ имеет положительный индикатор $h(\mathcal{L}; \theta)$. Пусть также на некоторой прямой γ , проходящей через начало координат, $\mathcal{L}$ подчинена условию*

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \lambda \in S_\gamma}} |\mathcal{L}(\lambda)| > 0, \quad (4)$$

где S_γ – относительно плотное по мере множество на γ . Тогда $\mathcal{L}$ – функция в.р.р.

Теорема 3 решает, в частности, задачу Леонтьева для функции $\mathcal{L} \in L$ с положительным нижним индикатором. Согласно, например, [9] нижний индикатор ц.ф.э.т. $\mathcal{L}$ определяется так:

$$h_-(\mathcal{L}, \theta) := \sup_E \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E}} \frac{\ln |\mathcal{L}(re^{i\theta})|}{r}.$$

Здесь $\sup$ берется по всевозможным множествам E нулевой относительной меры (E^0 -множествам), т.е. таким, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E \cap (0, r))}{r} = 0.$$

В отличие от обычного индикатора нижний индикатор ц.ф.э.т. не обязан быть тригонометрически выпуклой функцией.

Отметим еще, что теорема 3 позволяет в некотором смысле уточнить ряд известных результатов о распределении показателей абсолютно представляющих систем экспонент (см., например, [5], [10]).

2. Доказательство теоремы 1. Зафиксируем $\sigma > 1$ и построим такой уточненный порядок $\rho(r) \rightarrow 1, r \rightarrow \infty$, что $1 = \varliminf_{r \rightarrow \infty} u_1(r), \sigma = \varlimsup_{r \rightarrow \infty} u_1(r)$, где $u_1(r) = r^{\rho(r)-1}$ (существование такой функции $\rho(r)$ анонсировано в [3]). В качестве $\rho(r)$ можно взять, например, функцию

$$\rho(r) = 1 + (\ln \sigma) \cdot \frac{\sin^2(\ln \ln r)}{\ln r}.$$

Положим $u(r) = r^{\rho(r)}$ и выберем на положительном луче R -множество точек $(\mu_k)_{k=1}^\infty$, $\mu_1 < \mu_2 < \dots$, имеющее плотность $\lim_{r \rightarrow \infty} n(r)/u(r) = \Delta > 0$, где $n(r)$ – число точек μ_k в интервале $(0, r)$. Все точки вида $\pm \mu_k, \pm i\mu_k$ также образуют R -множество (при показателе $\rho(r)$), каноническая функция $\mathcal{L}$ которого представляется в виде

$$\mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{L}_1(\lambda) \cdot \mathcal{L}_2(\lambda), \quad \text{где } \mathcal{L}_1(\lambda) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_k^2}\right), \quad \mathcal{L}_2(\lambda) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{\lambda^2}{\mu_k^2}\right),$$

и имеет индикатор (при порядке $\rho(r)$) $\mathcal{H}(\mathcal{L}; \theta) = \pi \Delta (|\sin \theta| + |\cos \theta|)$. Обозначив последнее R -множество через $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty, |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, мы получим, что функция $\mathcal{L}$ имеет в.р.р. (относительно $\rho(r)$) и удовлетворяет условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{u(|\lambda_k|)} \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| - \mathcal{H}(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) \right\} = 0.$$

Пусть $\theta \neq \pi j/2, j = 0, 1, 2, 3$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\mathcal{L}(re^{i\theta})|}{u(r)} = \mathcal{H}(\mathcal{L}; \theta).$$

Поскольку

$$\frac{\ln |\mathcal{L}(re^{i\theta})|}{r} = \frac{\ln |\mathcal{L}(re^{i\theta})|}{u(r)} \cdot u_1(r),$$

то

$$\varlimsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\mathcal{L}(re^{i\theta})|}{r} = \sigma \cdot \mathcal{H}(\mathcal{L}; \theta), \quad \varliminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\mathcal{L}(re^{i\theta})|}{r} = \mathcal{H}(\mathcal{L}; \theta).$$

Последние равенства означают, что при порядке $\rho = 1$ функция $\mathcal{L}$ имеет индикатор $h(\mathcal{L}, \theta) = \sigma \cdot \mathcal{H}(\mathcal{L}; \theta)$ и не является функцией вполне регулярного роста (относительно $\rho = 1$), ибо в противном случае из-за отсутствия у $\mathcal{L}$ нулей на луче $\arg \lambda = \theta$ ($\theta \neq \pi j/2$, $0 \leq j \leq 3$) существовал бы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\mathcal{L}(re^{i\theta})|}{r} = h(\mathcal{L}; \theta).$$

Имеем, наконец,

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| - \frac{1}{\sigma} h(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{u_1(|\lambda_k|)}{u(|\lambda_k|)} \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| \right. \\ & \quad \left. - u_1(|\lambda_k|) \mathcal{H}(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) + (u_1(|\lambda_k|) - 1) \mathcal{H}(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) \right\} \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ u_1(|\lambda_k|) \left[\frac{1}{u(|\lambda_k|)} \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| - \mathcal{H}(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) \right] \right\} \\ & \quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \{ \mathcal{H}(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) [u_1(|\lambda_k|) - 1] \} \geq 0. \end{aligned}$$

Так как индикатор $h(\mathcal{L}, \theta)$ положителен, а число $\sigma > 1$ произвольно, то нужное построение завершено. Теорема доказана.

Отметим, что условие (2) естественным образом возникает при изучении γ -достаточных множеств [7] (см. также [11]), введенных Коробейником в связи с построением дискретных максимальных множеств в некоторых классах целых функций.

3. Доказательство теоремы 2. Функция $\mathcal{L}$ может быть представлена в виде

$$\mathcal{L}(\lambda) = e^{a\lambda+b} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) e^{\lambda/\lambda_k}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mathcal{L}_1(\lambda) = (\lambda^{2s+1} - 1) e^{-\lambda i \operatorname{Im} a} \cdot \mathcal{L}(\lambda), \quad \text{где } s \in \mathbb{N}, \quad 2s \geq \alpha.$$

Отметим ее свойства. Во-первых, $\mathcal{L}_1(\lambda)$ — ц.ф.э.т. с простыми нулями $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \cup (\mu_j)_{j=0}^{2s}$, где μ_j — все значения $^{2s+1}\sqrt{1}$. Далее,

$$\mathcal{L}'_1(\lambda_k) = (\lambda_k^{2s+1} - 1) e^{-\lambda_k i \operatorname{Im} a} \cdot \mathcal{L}'(\lambda_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Из условия (3) в силу выбора s получаем

$$\frac{1}{|\mathcal{L}'_1(\lambda_k)| |\lambda_k|} = O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Поскольку показатель сходимости

$$\tau := \inf \left\{ \nu > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^\nu} < \infty \right\}$$

последовательности $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ не превосходит 1 [2, с. 27], то $\sum_{k=1}^{\infty} 1/|\lambda_k|^2 < \infty$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\mathcal{L}'_1(\lambda_k)| |\lambda_k|} < \infty. \quad (5)$$

Кроме того,

$$\inf \{ |\mathcal{L}_1(i\mu)| : \mu \in \mathbb{R} \} > 0. \quad (6)$$

Действительно, для всех $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_1(i\mu)| &= |-1 + (-1)^s \mu^{2s+1} i| \cdot |e^{\mu \operatorname{Im} a + a i \mu + b}| \prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - i \cdot \frac{\mu}{\lambda_k} \right| |e^{i\mu/\lambda_k}| \\ &= \sqrt{1 + \mu^{4s+2}} \cdot e^{\operatorname{Re} b} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{\lambda_k} \right)^2} \geq e^{\operatorname{Re} b}. \end{aligned}$$

Покажем, что функция $\mathcal{L}_1(\lambda)$ имеет в.р.р. С этой целью положим

$$a(\lambda) := \sum_{j=0}^{2s} \frac{\mathcal{L}_1(\lambda)}{(\lambda - \mu_j) \mathcal{L}'_1(\mu_j)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) \mathcal{L}'_1(\lambda_k)}.$$

Нетрудно видеть, что $a(\lambda)$ — ц.ф.э.т. с индикатором $h(a; \theta) \leq h(\mathcal{L}_1; \theta)$ для всех $\theta \in [0, 2\pi)$, причем $a(\mu_j) = a(\lambda_k) = 1$, $j = 0, 1, \dots, 2s$; $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, $b(\lambda) := (a(\lambda) - 1)/\mathcal{L}_1(\lambda)$ — ц.ф.э.т. Оценим функцию $b(\lambda)$ на мнимой оси: для всех $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |b(i\mu)| &\leq \sum_{j=0}^{2s} \frac{1}{|i\mu - \mu_j| |\mathcal{L}'_1(\mu_j)|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|i\mu - \lambda_k| |\mathcal{L}'_1(\lambda_k)|} + \frac{1}{|\mathcal{L}_1(i\mu)|} \\ &\leq \sum_{j=0}^{2s} \frac{1}{|\operatorname{Re} \mu_j| |\mathcal{L}'_1(\mu_j)|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k| |\mathcal{L}'_1(\lambda_k)|} + \frac{1}{|\mathcal{L}_1(i\mu)|}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись свойствами (5) и (6) функции $\mathcal{L}_1$, получим, что $|b(\lambda)|$ ограничен на мнимой оси. Но тогда модуль ц.ф.э.т. $c(\lambda) := b(i\lambda)$ ограничен на вещественной оси, а значит, она принадлежит классу Картрайт и имеет в.р.р. [2, с. 323–324]. Функция $b(\lambda)$ будет также функцией в.р.р., поэтому из равенства $b(\lambda) \cdot \mathcal{L}_1(\lambda) = a(\lambda) - 1$ заключаем, что $h(b; \theta) + h(\mathcal{L}_1; \theta) \leq h(\mathcal{L}_1; \theta)$, или $h(b; \theta) \leq 0$ для всех $\theta \in [0, 2\pi)$. Последние неравенства влекут $h(b; \theta) \equiv 0$. Из принципа Фрагмена–Линделефа [2, с. 71] следует, что $b(\lambda) \equiv b$. Окончательно для всех λ таких, что $\lambda \neq \mu_j$, $\lambda \neq \lambda_k$, $j = 0, 1, \dots, 2s$; $k = 1, 2, \dots$, имеем представление

$$\frac{1}{\mathcal{L}_1(\lambda)} = \sum_{j=0}^{2s} \frac{1}{\mathcal{L}'_1(\mu_j)(\lambda - \mu_j)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{L}'_1(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} - b.$$

По теореме Крейна о разложении обратной величины целой функции [2, с. 333] $\mathcal{L}_1(\lambda)$ — функция в.р.р. и ее индикаторная диаграмма есть отрезок мнимой оси. По построению $\mathcal{L}_1(\lambda)$ этими же свойствами обладает и функция $\mathcal{L}(\lambda)$, что и завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. В ситуации, рассмотренной в теореме 2, требование (3) более сильное, чем “условие Леонтьева” (1). В самом деле, при выполнении (3), во-первых,

$$h(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) = h(\mathcal{L}; 0) = h(\mathcal{L}; \pi) = 0,$$

а во-вторых,

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\lambda_k|^\alpha}{|\lambda_k|} = 0,$$

что равносильно (1).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathcal{L}(\lambda)$ – четная (нечетная) ц.ф.э.т., все отличные от нуля корни которой $(\pm \lambda_k, \lambda_k > 0, k = 1, 2, \dots)$ простые. Если при некотором $\alpha > 0$

$$\frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} = O(\lambda_k^\alpha), \quad k \rightarrow \infty,$$

то $\mathcal{L}$ – функция в.р.р.

4. Вспомогательные факты. Доказательство теоремы 3. При доказательстве теоремы 3 важную роль будет играть лемма о ц.ф.э.т., сформулированная Левиным на конференции в Харькове в 1971 г. (для функций многих переменных) и неоднократно обобщавшаяся в различных направлениях (см., например, [12], [13]).

ЛЕММА [8]. Если f – ц.ф.э.т. $\sigma > 0$, ограниченная на множестве S вещественной оси, относительно плотном по мере, то

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq [N(\ell, \delta)]^\sigma \sup_{x \in S} |f(x)|,$$

где $N(\ell, \delta)$ – постоянная, зависящая лишь от указанных характеристик множества S (см. введение).

Пусть G – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ с опорной функцией $h(-\theta)$, $A(G)$ – пространство всех аналитических в G функций, наделенное топологией компактной сходимости, $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ – последовательность попарно различных комплексных чисел. В соответствии с общим определением [5] последовательность $E(\Lambda) = (\exp \lambda_k z)_{k=1}^\infty$ называется абсолютно представляющей системой (АПС) в $A(G)$, если каждую функцию $x(z) \in A(G)$ можно представить в виде суммы ряда

$$x(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp \lambda_k z, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

абсолютно сходящегося в $A(G)$. Будем символом $[1, h(\theta)]$ обозначать множество всех целых функций, индикаторы которых (при порядке $\rho = 1$) не больше, чем $h(\theta)$; $[1, 0]$ – класс целых функций нулевого экспоненциального типа; $M(\Lambda; h)$ – совокупность всех функций $\mathcal{L}(\lambda) \in [1, h(\theta)]$, для которых $\lambda_k \in \Lambda, k = 1, 2, \dots$, – простые нули (у $\mathcal{L}$ могут быть другие нули произвольной кратности). Приведем частные случаи (при $\rho = 1$) некоторых результатов, имеющих непосредственное отношение к данной работе.

ТЕОРЕМА А [5, с. 111]. Пусть $M(\Lambda, h) \neq \emptyset$ и $\mathcal{L}(\lambda) \in M(\Lambda, h)$. Система $E(\Lambda)$ является АПС в $A(G)$ в том и только том случае, если выполняется условие: существует $D(\lambda) \in [1, 0]$, $D(\lambda) \not\equiv 0$, такая, что

$$D(\lambda)e^{\lambda z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \cdot \frac{D(\lambda_k)e^{\lambda_k z}}{\mathcal{L}'(\lambda_k)}, \quad z \in G, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

(ряд сходится абсолютно по топологии $A(G)$).

Далее, для того чтобы $E(\Lambda)$ была АПС в $A(G)$, необходимо, а если Λ – совокупность всех нулей $\mathcal{L}(\lambda)$, то и достаточно, чтобы выполнялось условие: $\mathcal{L}(\lambda)$ – функция в.р.р. с индикатором $h(\theta)$ и существует $D(\lambda) \in [1, 0]$, $D(\lambda) \not\equiv 0$, такая, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{D(\lambda_k)}{\mathcal{L}'(\lambda_k)} \right| + h(\arg \lambda_k) \right\} \leq 0. \quad (7)$$

Задача об описании в различных терминах показателей представляющих систем экспонент (или обобщенных экспонент), включая и устранение “зазора” между необходимой и достаточной частями в условии (7), получила окончательное решение в работах Абанина. Нам понадобится один из его результатов применительно к системе $E(\Lambda)$ и пространству $A(G)$.

ТЕОРЕМА Б [10, с. 809]. Для того чтобы система $E(\Lambda)$ была АПС в $A(G)$, необходимо и достаточно, чтобы Λ содержала подпоследовательность $\Lambda' \subset \Lambda$, удовлетворяющую условию: существует ц.ф.э.т. в.р.р. $\mathcal{L}(\lambda)$ с индикатором $h(\theta)$ и простыми нулями в точках из Λ' , для которой совокупность всех ее нулей отличается от Λ' не более, чем на последовательность с нулевой плотностью и

$$\lim_{k \rightarrow \infty, \lambda_k \in \Lambda'} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| - h(\arg \lambda_k) \right\} = 0.$$

Естественным представляется вопрос о независимости условий, накладываемых на функцию $\mathcal{L}$ в теоремах А и Б. Полученные ниже в настоящей работе результаты позволяют, например, заменить в формулировках этих теорем требование полной регулярности роста $\mathcal{L}$ (равносильное условию $h_-(\mathcal{L}; \theta) = h(\mathcal{L}; \theta)$ для всех $\theta \in [0, 2\pi)$) на более слабое ограничение $h_-(\mathcal{L}; \theta_0) + h_-(\mathcal{L}; \pi + \theta_0) > 0$ при некотором $\theta_0 \in [0, 2\pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\varphi(\lambda, z) := e^{\lambda z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(\lambda)e^{\lambda_k z}}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \quad z \in G, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где G – содержащая начало координат выпуклая ограниченная область с опорной функцией, равной $h(\mathcal{L}; -\theta)$. При фиксированном $z \in G$ $\varphi(\lambda, z)$ является ц.ф.э.т. с индикатором $h(\varphi, \theta) \leq h(\mathcal{L}; \theta)$; при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено $\varphi(\lambda, z) \in A(G)$. Кроме того, для всех $z \in G$ выполнено $\varphi(\lambda_k, z) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому функция

$$\psi(\lambda, z) := \frac{\varphi(\lambda, z)}{\mathcal{L}(\lambda)} = \frac{e^{\lambda z}}{\mathcal{L}(\lambda)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}$$

является целой по λ при фиксированном $z \in G$ и аналитической по z в G при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку $\varphi(\cdot, z)$ и $\mathcal{L}(\lambda)$ – ц.ф.э.т., то $\psi(\cdot, z)$ – ц.ф.э.т. (при $z \in G$). Пусть K – произвольный содержащий начало координат отрезок, лежащий в G , зеркальное отражение которого относительно вещественной оси перпендикулярно прямой γ ; $\lambda \in \gamma \setminus \Lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} \max_{z \in K} |\psi(\lambda, z)| &\leq \frac{\max_{z \in K} |e^{\lambda z}|}{|\mathcal{L}(\lambda)|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\max_{z \in K} |e^{\lambda_k z}|}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)| |\lambda - \lambda_k|} \\ &= \frac{1}{|\mathcal{L}(\lambda)|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{|\lambda_k| h_K(\arg \lambda_k)}}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)| |\lambda - \lambda_k|}, \end{aligned}$$

где $h_K(-\theta)$ – опорная функция K . Обозначим через U объединение кружков

$$U_k = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_k| < e^{-\delta |\lambda_k|}\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\delta > 0$ настолько мало, что $h_K(\theta) + \delta < h(\mathcal{L}; \theta)$ при любом $\theta \in [0, 2\pi)$. Поскольку $\mathcal{L}$ – ц.ф.э.т., то для любого $\delta > 0$ выполнено $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta |\lambda_k|} < \infty$, а множество $\{r > 0 : \lambda = re^{i\theta} \in \gamma \cap U\}$ либо пусто, либо является E^0 -множеством. Тогда $S_{1,\gamma} := S_\gamma \setminus U$ относительно плотно по мере на γ , и в силу (4)

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \lambda \in S_{1,\gamma}}} |\mathcal{L}(\lambda)| > 0.$$

Отсюда, из условия (1) и оценки

$$\max_{z \in K} |\psi(\lambda, z)| \leq \frac{1}{|\mathcal{L}(\lambda)|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{|\lambda_k| [h_K(\arg \lambda_k) + \delta]}}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} \quad \forall \lambda \in \gamma \setminus U,$$

получаем, что при любом фиксированном $z \in K$ модуль $\psi(\lambda, z)$ ограничен на множестве $S_{1,\gamma}$. При соответствующем выборе $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ модуль ц.ф.э.т. (по λ) $\psi(\lambda e^{i\theta_0}, z)$ ограничен на некотором относительно плотном по мере множестве $S_1 \subset \mathbb{R}$. Если бы ее экспоненциальный тип был больше нуля, то по лемме Левина модуль этой функции был бы ограничен на вещественной оси. Тогда указанная функция принадлежала бы классу Картрайт и имела в.р.р. Воспользовавшись тогда для функции в.р.р. $\psi(\cdot, z)$ с индикатором $h_z(\psi, \theta)$ представлением (при $z \in K$)

$$\psi(\lambda, z) \cdot \mathcal{L}(\lambda) = e^{\lambda z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(\lambda) e^{\lambda_k z}}{\mathcal{L}'(\lambda_k) (\lambda - \lambda_k)}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

мы бы получили

$$h_z(\psi, \theta) + h(\mathcal{L}, \theta) \leq h(\mathcal{L}, \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

откуда $h_z(\psi, \theta) \equiv 0$, что по предположению невозможно. Таким образом, при любом $z \in K$ $\psi(\cdot, z) \in [1, 0]$. Применив к целой функции $\psi(\lambda e^{i\theta_0}, z) \cdot e^{-i\lambda}$ экспоненциально-го типа 1 лемму Левина, найдем, что $|\psi(\cdot, z)|$ ограничен на прямой γ . Следовательно, $\psi(\cdot, z) \equiv c_z$ при любом $z \in K$. Зафиксируем $z \in K$ и вернемся к оценке

$$|\psi(\lambda, z)| \leq \frac{1}{|\mathcal{L}(\lambda)|} + \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{\mathcal{L}'(\lambda_k) (\lambda - \lambda_k)} \right|, \quad \lambda \in \gamma \setminus \Lambda.$$

Второе слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \notin U$. Выберем согласно теореме Бернштейна (см., например [2, с. 99]) на одном из двух лучей $\gamma(\theta_0)$, составляющих прямую γ , последовательность точек

$$\mu_j = r_j e^{i\theta_0}, \quad \mu_j \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty,$$

так, чтобы $r_j \notin E$ и

$$|\mathcal{L}(\mu_j)| > \exp\left(\frac{1}{2}h(\mathcal{L}; \theta_0)r_j\right), \quad j = 1, 2, \dots$$

Получим

$$\frac{1}{\mathcal{L}(\mu_j)} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\mu_j - \lambda_k)} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

откуда $\psi(\mu_j, z) \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Поэтому $\psi(\lambda, z) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $z \in K$. По теореме единственности $\psi(\lambda, z) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $z \in G$. Таким образом, имеет место равенство

$$e^{\lambda z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(\lambda)e^{\lambda_k z}}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad z \in G.$$

Согласно теореме А $E(\Lambda)$ – АПС в $A(G)$, а $\mathcal{L}(\lambda)$ – функция в.р.р. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть множество внутренних точек индикаторной диаграммы функции $\mathcal{L} \in L$ непусто, и при некотором $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ выполнена оценка $h_-(\mathcal{L}; \theta_0) + h_-(\mathcal{L}; \pi + \theta_0) > 0$. Тогда $\mathcal{L}$ – функция в.р.р. В частности, функция класса L с тригонометрически выпуклым или положительным нижним индикатором имеет в.р.р.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $h_-(\mathcal{L}; \theta_0) = h_-(\mathcal{L}; \pi + \theta_0) > 0$. В самом деле, общий случай легко свести к указанному, рассмотрев вместо функции $\mathcal{L}$ функцию $\mathcal{L}_1(\lambda) = \mathcal{L}(\lambda) \cdot e^{a\lambda}$, где

$$|a| = \frac{1}{2}|h_-(\mathcal{L}; \theta_0) - h_-(\mathcal{L}; \pi + \theta_0)|,$$

$$\arg a = \begin{cases} -\theta_0, & \text{если } h_-(\mathcal{L}; \theta_0) \leq 0, \\ \pi - \theta_0, & \text{если } h_-(\mathcal{L}; \pi + \theta_0) \leq 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\mathcal{L}_1 \in L$ и

$$h_-(\mathcal{L}_1; \theta_0) = h_-(\mathcal{L}_1; \pi + \theta_0) = \frac{1}{2}(h_-(\mathcal{L}; \theta_0) + h_-(\mathcal{L}; \pi + \theta_0)) > 0.$$

Кроме того, при подходящем выборе $b \in \mathbb{C}$ функция $\mathcal{L}_2(\lambda) = \mathcal{L}_1(\lambda)e^{b\lambda}$, наряду с отмеченными свойствами, обладает положительным индикатором. Считая таковой функцию $\mathcal{L}$, найдем E^0 -множество E_1 так, чтобы

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E_1}} \frac{\ln |\mathcal{L}(re^{i\theta_0})|}{r} > \frac{1}{2}h_-(\mathcal{L}; \theta_0).$$

Тогда для всех $r \geq r_1$, $r \notin E_1$ выполнена оценка

$$|\mathcal{L}(re^{i\theta_0})| > \exp \frac{1}{2} h_-(\mathcal{L}; \theta_0) r,$$

откуда

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E_1}} |\mathcal{L}(re^{i\theta_0})| = +\infty.$$

Аналогично, найдется E^0 -множество E_2 со свойством

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E_2}} |\mathcal{L}(re^{i(\theta_0+\pi)})| = +\infty.$$

Множество $S := \mathbb{R} \setminus \{E_1 \cup (-E_2)\}$ относительно плотно по мере, и на прямой $\gamma := \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \theta_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi + \theta_0\}$

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \lambda \in S_\gamma}} |\mathcal{L}(\lambda)| = +\infty.$$

По теореме 3 $\mathcal{L}$ имеет в.р.р.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathcal{L}$ – четная (нечетная) функция класса L с отличной от отрезка индикаторной диаграммой. Если $h_-(\mathcal{L}; \theta_0) > 0$ при некотором $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, то $\mathcal{L}$ имеет в.р.р. В частности, четная (нечетная) функция $\mathcal{L} \in L$ с положительным индикатором, имеющая в.р.р. на каком-либо луче, есть функция в.р.р.

СЛЕДСТВИЕ 3. Четная (нечетная) функция класса L с положительным индикатором, не имеющая нулей в каком-либо угле раствора $\pi/2$, является функцией в.р.р.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть угол

$$\Gamma(\theta_0) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda - \theta_0| < \frac{\pi}{4} \right\}$$

не содержит нулей функции $\mathcal{L}$. Не умаляя общности рассуждений, будем предполагать, что

$$\mathcal{L}(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right).$$

В силу четности $\mathcal{L}$ все ее нули лежат вне множества $\Gamma(\theta_0) \cup (-\Gamma(\theta_0))$, поэтому

$$\frac{\pi}{4} \leq |\theta_0 - \arg \lambda_k| \leq \frac{3\pi}{4}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Оценим снизу $|\mathcal{L}(\lambda)|$ на луче $\gamma(\theta_0) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \theta_0\}$. Имеем для произвольного $\lambda \in \gamma(\theta_0)$

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\lambda)| &= \prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 2 \left| \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|^2 \cos 2(\theta_0 - \arg \lambda_k) + \left| \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|^4} \\ &> \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 2 \left| \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|^2 \cos 2|\theta_0 - \arg \lambda_k|} \geq 1. \end{aligned}$$

Следовательно, и на прямой $\gamma := \{0\} \cup \gamma(\theta_0) \cup (-\gamma(\theta_0))$ выполнена оценка $|\mathcal{L}(\lambda)| \geq 1$. Доказательство завершается применением теоремы 3.

5. Теоремы типа Левинсона и представляющие системы экспонент. При-
менением следствия 3 теоремы 3 к одной конкретной ситуации.

ТЕОРЕМА 4. Пусть числа $0 < \nu_n, \mu_n < \infty$ таковы, что

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} = D_1 < \infty,$$

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n} = D_2 < \infty,$$

и при этом

$$\mathcal{L}(\lambda) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\nu_n^2}\right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\mu_n^2}\right) \in L.$$

Пусть, далее, $\Phi(\lambda)$ – ц.ф.э.т. такая, что ее тип $\sigma_{\Phi} < \pi\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$, причем

$$\alpha_1 = \max \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Phi(\nu_n)|}{\nu_n}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Phi(-\nu_n)|}{\nu_n} \right] < \pi D_2,$$

$$\alpha_2 = \max \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Phi(i\mu_n)|}{\mu_n}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Phi(-i\mu_n)|}{\mu_n} \right] < \pi D_1.$$

Тогда

- 1) $\sup \left\{ \frac{h(\Phi; \theta)}{h(\mathcal{L}; \theta)} : \theta \in [0, 2\pi) \right\} = \max \left\{ \frac{\alpha_1}{\pi D_2}, \frac{\alpha_2}{\pi D_1} \right\},$
- 2) $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |\Phi(\lambda)| = \max \{ \sup_{n \geq 1} |\Phi(\pm \nu_n)|, \sup_{n \geq 1} |\Phi(\pm i\mu_n)| \}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Четная ц.ф.э.т. $\mathcal{L}$ принадлежит классу L , не имеет нулей, например, в угле $\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \arg \lambda < \pi/2\}$, и ее индикатор положителен. В самом деле, всякая ц.ф.э.т. $F \neq 0$ удовлетворяет неравенству [2, с. 245]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu_F(r)}{r} \leq \frac{1}{2\pi} \left[h\left(F; \frac{\pi}{2}\right) + h\left(F; -\frac{\pi}{2}\right) \right],$$

где $\nu_F(r)$ – число нулей F в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r/2| \leq r/2\}$. Поэтому

$$h\left(\mathcal{L}; \frac{\pi}{2}\right) \geq \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\nu_n} > 0.$$

Аналогично, $h(\mathcal{L}; 0) > 0$. Следовательно, $h(\mathcal{L}; \theta) > 0$ для всех θ . По следствию 3 теоремы 3 $\mathcal{L}$ – функция в.р.р. Но тогда последовательности $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ имеют плотности D_1 и D_2 соответственно. Остается применить теорему 10 из [7].

Установленное утверждение уточняет часть цитированного выше результата Коробейника [7] (теорема 10 при $\gamma = 1$). Отметим еще вытекающее из теоремы 4 обобщение известной теоремы Левинсона (см., например, [2, с. 267]).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть числа ν_n и μ_n такие же, как и в теореме 4, и пусть $\Phi(\lambda)$ – ц.ф.э.т. такая, что ее тип $\sigma_{\Phi} < \pi\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$, ограниченная на множестве $\{\pm \nu_n, \pm i\mu_n\}$. Тогда $\Phi(\lambda) \equiv \text{const}$.

Для формулировки следующего результата введем некоторые обозначения. Символом $v(\mathcal{L})$ обозначим совокупность всех нулей функции $\mathcal{L}$. Пусть $M(\Lambda; h)$ – класс функций, определенный в п. 4; $\bar{M}(\Lambda; h) := \{\mathcal{L} \in M(\Lambda; h) : v(\mathcal{L}) \setminus \Lambda - \text{множество не более чем нулевой плотности}\}.$

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – выпуклая ограниченная область с опорной функцией $h(-\theta)$, $\widetilde{M}(\Lambda; h) \neq \emptyset$, $\mathcal{L} \in \widetilde{M}(\Lambda; h)$. Следующие условия равносильны:

- 1) индикатор функции $\mathcal{L}$ совпадает с $h(\theta)$, ее нижний индикатор удовлетворяет при некотором $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ неравенству $h_-(\mathcal{L}; \theta_0) + h_-(\mathcal{L}; \pi + \theta_0) > 0$, и выполняется неравенство (7);
- 2) $\mathcal{L}$ – функция в.р.р. с индикатором $h(\theta)$, причем имеет место (7);
- 3) $E(\Lambda)$ – АПС в $A(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть выполнено условие 2). Тогда для всех θ выполнено $h_-(\mathcal{L}; \theta) = h(\mathcal{L}; \theta) = h(\theta)$. Из неравенства $\inf_{\theta} \{h(\theta) + h(\pi + \theta)\} > 0$ заключаем, что имеет место условие 1).

1) $\Rightarrow$ 3). Подберем, как и при доказательстве следствия 1 теоремы 3, число $c \in \mathbb{C}$ так, чтобы функция $\mathcal{L}_1(\lambda) = e^{c\lambda} \cdot \mathcal{L}(\lambda)$ удовлетворяла условиям: $h(\mathcal{L}_1; \theta) > 0$ при всех θ , $h_-(\mathcal{L}_1; \theta_0) = h_-(\mathcal{L}_1; \pi + \theta_0) > 0$. При этом, для $\mathcal{L}_1$ выполняется неравенство (7). Пусть $\Lambda' := v(\mathcal{L}) \setminus \Lambda \neq \emptyset$. Построим по множеству $\pm \Lambda'$ каноническое произведение Вейерштрасса $a(\lambda)$. Из определения класса $\widetilde{M}(\Lambda; h)$ следует, что $a(\lambda) \in [1, 0]$, $a(\lambda_k) \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $d(\lambda) := D(\lambda)a(\lambda) \in [1, 0]$ и

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{d(\lambda_k)}{\mathcal{L}'_1(\lambda_k)} \right| + h(\mathcal{L}_1; \arg \lambda_k) \right\} \leq 0.$$

Рассмотрим, следуя доказательству теоремы 3, вспомогательную функцию

$$\varphi_d(\lambda, w) := d(\lambda)e^{\lambda w} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_1(\lambda)d(\lambda_k)e^{\lambda_k w}}{\mathcal{L}'_1(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad w \in G_1$$

(G_1 – выпуклая область с опорной функцией $h(\mathcal{L}_1; -\theta) > 0$). Она обладает всеми свойствами функции φ и, кроме того, $\varphi_d(\mu, w) = 0$ для всех $\mu \in v(\mathcal{L})$ и $w \in G_1$. Поэтому,

$$\psi_d(\lambda, w) := \frac{\varphi_d(\lambda, w)}{\mathcal{L}_1(\lambda)} = \frac{d(\lambda)e^{\lambda w}}{\mathcal{L}_1(\lambda)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(\lambda_k)e^{\lambda_k w}}{\mathcal{L}'_1(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}$$

– ц.ф.э.т. по λ (при фиксированном $w \in G_1$). Используя условия $h_-(\mathcal{L}_1; \theta) > 0$, $d(\lambda) \in [1, 0]$ так же, как при доказательстве теоремы 3, устанавливаем, что для всех $w \in K_1$ $|\psi_d(\lambda, w)|$ ограничен на множестве S_γ . Здесь $\gamma = \{0\} \cup \gamma(\theta_0) \cup \gamma(\pi + \theta_0)$, S_γ – относительно плотное по мере множество на γ , K_1 – некоторый отрезок, лежащий в области G_1 , $0 \in K_1 \perp \gamma(-\theta_0)$.

Отсюда известным уже способом выводим, что $\psi_d(\lambda, w) \equiv 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $w \in G_1$, и получаем равенство

$$d(\lambda)e^{\lambda w} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_1(\lambda)d(\lambda_k)e^{\lambda_k w}}{\mathcal{L}'_1(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad w \in G_1.$$

Сделаем замену $z = w - c$, приходим к соотношению

$$d(\lambda)e^{\lambda z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(\lambda)d(\lambda_k)e^{\lambda_k z}}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad z \in G,$$

равносильному по первой части теоремы А условию 3). Справедливость импликации 3) $\Rightarrow$ 2) следует непосредственно из второй части теоремы А.

Таким образом, 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3). Теорема доказана.

Теорема 5 служит дополнением к теореме А. В то же время, она дает возможность в некотором смысле усилить теорему Б. Именно, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Для того чтобы система $E(\Lambda)$ была АПС в $A(G)$, необходимо и достаточно, чтобы Λ содержала подпоследовательность $\Lambda' \subset \Lambda$, удовлетворяющую условию: существует функция $\mathcal{L} \in \widetilde{M}(\Lambda', h)$ с индикатором $h(\theta)$, для которой при некотором $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ выполнено $h_-(\mathcal{L}; \theta_0) + h_-(\mathcal{L}; \pi + \theta_0) > 0$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty, \lambda_k \in \Lambda'} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| - h(\arg \lambda_k) \right\} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость легко выводится на основании “необходимой” части теоремы Б точно так же, как импликация $2) \Rightarrow 1)$ при доказательстве теоремы 5.

Достаточность. Пусть функция $\mathcal{L}$ удовлетворяет всем требованиям, присутствующим в условии теоремы 6. Тогда для Λ' имеет место условие 1) теоремы 5, причем неравенство (7) выполняется с $D(\lambda) \equiv 1$. Следовательно, последовательность $E(\Lambda')$ образует по теореме 5 АПС в $A(G)$. Подавно, $E(\Lambda)$ – АПС в $A(G)$. Достаточность, а вместе с ней и теорема, доказана.

Автор выражает благодарность профессору В. А. Осколкову и профессору А. В. Абанину за полезное обсуждение результатов статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Леонтьев А. Ф. Об условиях разрешимости аналитических функций в ряды Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 6. С. 1282–1295.
- [2] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
- [3] Братищев А. В. К одной задаче А. Ф. Леонтьева // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 2. С. 265–267.
- [4] Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами типа рядов Дирихле // Исследование по теории приближения функций и их приложения. Киев, 1978. С. 132–141.
- [5] Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // УМН. 1981. Т. 36. № 1. С. 73–126.
- [6] Братищев А. В. Базисы Кете, целые функции и их приложения // Дисс. ... д.ф.-м.н. Екатеринбург, 1995.
- [7] Коробейник Ю. Ф. Максимальные и γ -достаточные множества. Приложения к целым функциям. 2 // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Т. 55. Харьков, 1991. С. 23–34.
- [8] Левин Б. Я. Почти периодические функции с ограниченным спектром // Актуальные вопросы математического анализа. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1978. С. 112–124.
- [9] Азарин В. С. Пример целой функции с заданным индикатором и нижним индикатором // Матем. сб. 1972. Т. 89 (131). № 4. С. 541–557.
- [10] Абанин А. В. Геометрические критерии представления аналитических функций рядами обобщенных экспонент // Докл. РАН. 1992. Т. 323. № 5. С. 807–810.
- [11] Шерстюков В. Б. К вопросу о γ -достаточных множествах // Сиб. матем. ж. 2000. Т. 41. № 4. С. 935–943.
- [12] Кацнельсон В. Э. Эквивалентные нормы в пространствах целых функций экспоненциального типа // Матем. сб. 1973. Т. 92. № 2. С. 543–547.
- [13] Логвиненко В. Н. Об одном многомерном обобщении теоремы М. Картрайт // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 3. С. 546–549.