Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, Е. С. Семенов, Б. Тироцци, Цепочки Гюгонио–Маслова для системы уравнений мелкой воды с учетом энергетического обмена, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 5, 796–799

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:49:57

ЦЕПОЧКИ ГЮГОНИО–МАСЛОВА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ С УЧЕТОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ОБМЕНА

С. Ю. Доброхотов, Е. С. Семёнов, Б. Тироцци

Особые решения системы уравнений мелкой воды со структурой “типа квадратного корня” из квадратичной формы были введены в работе [1]. Таким решениям сопоставляется цепочка Гюгонио–Маслова – бесконечная цепочка обыкновенных дифференциальных уравнений, по существу определяющих их динамику. Эти цепочки обладают многими интересными свойствами (см. [2]–[7]). Цель настоящей заметки состоит в описании цепочки Гюгонио–Маслова для более сложной системы уравнений, описывающих динамику двумерных вихрей в атмосфере с учетом энергетического обмена между атмосферой и океаном [8]. После обезразмеривания эта система выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \omega \mathbf{T} \mathbf{u} + \nabla \eta + (\eta + \delta) \nabla \Theta = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{u} + \delta \operatorname{curl}_3 \mathbf{u} - \eta k \Theta) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta + k \Theta = 0. \quad (3)$$

Неизвестными в этой системе являются зависящие от координат $x = {}^t(x_1, x_2)$ и времени t двумерная вектор-функция скорости $\mathbf{u}(x, t)$ и скалярные функции $\eta(x, t)$ (геопотенциал) и $\Theta(x, t)$ (соответствует разнице температуры атмосферы и температуры поверхности океана); $\nabla = {}^t(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$, $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица поворота на угол $\pi/2$, $\operatorname{curl}_3 \mathbf{u} = \partial \mathbf{u}_2/\partial x_1 - \partial \mathbf{u}_1/\partial x_2$, $\omega = \tilde{\omega} + \beta x_2$ – удвоенная частота Кориолиса на β -плоскости, $\omega_0, \beta, \delta, k$ – физические константы, в частности, константа δ характеризует приток массы из пограничного слоя атмосферы – слоя Экмана [8], [9] (эффект наличия вязкости и условия Дирихле для скорости ветра на границе атмосферы и океана в начальной трехмерной модели). После сведения этой задачи к двумерной остается слагаемое $\delta \operatorname{curl}_3 \mathbf{u}$ в уравнении (2); константа k характеризует нагрев вихря (см. [8]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00850.

Особые решения со структурой “типа квадратного корня” из квадратичной формы имеют вид

$$\mathbf{u} = u(x, t) + \tilde{u}(x, t), \quad \tilde{u}(x, t) = U(x, t)\sqrt{S(x, t)}, \quad (4)$$

$$\eta = \rho(x, t) + \tilde{\rho}(x, t), \quad \tilde{\rho}(x, t) = R(x, t)\sqrt{S(x, t)}, \quad (5)$$

$$\Theta = \theta(x, t) + \tilde{\theta}(x, t), \quad \tilde{\theta}(x, t) = N(x, t)\sqrt{S(x, t)}. \quad (6)$$

Здесь гладкие функции u, ρ, θ определяют “фон”, U, N, R – “амплитуду”, S – “фазу”. Относительно функции S предполагается (ср. [6]), что

(i) $S \geq 0$, S обращается в нуль только на траектории (особенности)

$$\Gamma = \{x = X(t) \equiv (X_1(t), X_2(t))\}$$

и матрица вторых производных $\|\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}(X(t), t)\|$ строго положительна и имеет различные собственные значения.

При $\delta = 0$, $k = 0$ и $\Theta = 0$ система уравнений (1)–(3) переходит в систему уравнений мелкой воды на β -плоскости для неизвестных $\mathbf{u}, \eta$. Смысл решений вида (4)–(6) для такой системы, их различные свойства и приложения к теории движения тропических циклонов в атмосфере подробно обсуждался в работах [2]–[7]. В работе [3] было доказано, что решения (4), (5) являются единственными возможными структурно устойчивыми и самоподобными слабыми особыми решениями уравнений мелкой воды на β -плоскости при условии общего положения начальных условий. Цепочка Гюгонио–Маслова, отвечающая решениям (4)–(6), – это незамкнутая бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений, связывающая соответствующие тейлоровские коэффициенты функций $u_1, u_2, \rho, \theta, U_1, U_2, R, N$ и S . Для особых решений типа ударных волн первые из уравнений аналогичной цепочки – хорошо известные условия Гюгонио, остальные могут быть рассмотрены как поправки к ним. В [1]–[6] показано, что в качестве аналогов условий Гюгонио для решений типа (4), (5) системы уравнений мелкой воды появляются условие “вмороженности” центра особенности в поле скоростей $u(x, t)$:

$$\dot{X} = u|_{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} V \equiv \mathbf{u}|_{\Gamma}, \quad (7)$$

и условия *Коши–Римана* для комплексной скорости $u_1 + iu_2$ на траектории особенности:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{\Gamma}. \quad (8)$$

При этом относительно функций U, R предполагалось, что

(ii) разложение в ряд Тейлора по x функций U, R в окрестности траектории $X(t)$ начинается с минимально возможных степеней $x - X(t)$.

Цель этой заметки – описание цепочек Гюгонио–Маслова и их некоторых свойств для решений (4)–(6) уравнений (1)–(3). Эти условия получаются в результате реализации схемы [6]. Анализ уравнений, порожденных “негладкой частью”, приводит к соотношениям, позволяющим выразить фазу S и амплитуды U, R, N через гладкие составляющие решения u, ρ, θ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (i), (ii). Тогда выполнено условие вооруженности (7) и без уменьшения общности можно считать, что функция S удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{d}{dt}S = \frac{\partial}{\partial t}S + (u, \nabla)S = 0. \quad (9)$$

При этом

1) если $N|_{\Gamma} \neq 0$, то функции ρ и θ удовлетворяют соотношению $(\nabla \rho + (\rho + \delta) \nabla \theta)|_{\Gamma} = 0$ и траектория $X(t)$ центра особенности описывается системой уравнений

$$\dot{X} = V, \quad \dot{V} = \omega_0 \mathbf{T}V, \quad \dot{\omega}_0 = \beta V_2, \quad \text{где } \omega_0 = \omega|_{\Gamma};$$

- 2) если $N|_{\Gamma} = 0$, то $R|_{\Gamma} = 0$ и на траектории особенности Γ выполнены условия Коши–Римана для комплексной функции $w_1(x, t) + iw_2(x, t)$, где

$${}^t(w_1, w_2) = (\mathbf{T}P, \nabla N)(\nabla\rho + (\rho + \delta)\nabla\theta) + 2\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}(X(t), t)\right\|u;$$

- 3) в случае, когда $N|_{\Gamma} = \nabla N|_{\Gamma} = 0$ с необходимостью справедливо $\nabla\theta|_{\Gamma} = 0$, выполнены условия Коши–Римана (8), а негладкая часть решения имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \left(\phi(t)\left(\mathbf{T}\nabla S + \frac{\delta}{\rho}\nabla S\right) + O(\|x - X(t)\|^2)\right)\sqrt{S}, \\ R &= O(\|x - X(t)\|^2), \quad N = O(\|x - X(t)\|^2), \\ R + (\rho + \delta)N &= -\frac{2}{3}\phi(t)(\operatorname{curl} u + \omega)S + O(\|x - X(t)\|^3), \\ \dot{\phi} &= \delta C\phi, \quad C = \frac{\operatorname{curl} u + \omega}{\rho}\Big|_{\Gamma}.\end{aligned}\tag{10}$$

Случай 1) теоремы 1 не представляет интереса с точки зрения приложений, так как он дает быстрые траектории, отвечающие частоте ω_0 . Ограничимся рассмотрением случая 3) теоремы 1. Мы также предполагаем, что $C > 0$ (см. [6]).

Другие уравнения из цепочки Гюгонио–Маслова получаются приравниванием коэффициентов Тейлора к нулю при одинаковых степенях в уравнениях, порожденных гладкой частью решения. Вычисления удобно проводить в комплексных координатах (см. [7]) $z = x_1 - X_1 + i(x_2 - X_2)$, $\bar{z} = x_1 - X_1 - i(x_2 - X_2)$, используя комплексные производные

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

и комплексные функции $X(t) = X_1(t) + iX_2(t)$, $V(t) = V_1(t) + iV_2(t)$, $u = u_1 + iu_2$ и т.д. вместо соответствующих двумерных векторных функций. Введем также следующие функции:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \rho|_{\Gamma}, \quad q = \frac{1}{2}\operatorname{div} u|_{\Gamma}, \quad p = -\frac{1}{2}\operatorname{curl} u, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 C}}, \\ Y &= \mu^3\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}\Big|_{\Gamma} - \frac{\beta}{3}\right), \quad Z = \mu^3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z}\Big|_{\Gamma} + \frac{\beta}{3}\right), \\ U &= \mu^3\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}}\Big|_{\Gamma}, \quad W = -\mu^3\rho_0 2i\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}}\Big|_{\Gamma}, \\ \tau &= \frac{\partial^2 \theta / \partial z \partial \bar{z}}{\rho_0 C}\Big|_{\Gamma}, \quad \xi = \frac{\partial^2 \theta / \partial z \partial z}{\rho_0 C}\Big|_{\Gamma}, \quad r = \mu^4\frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z} \partial z}\Big|_{\Gamma} + \frac{\tau}{C}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Первые 11 уравнений цепочки Гюгонио–Маслова имеют вид

$$\dot{X} - V = 0, \tag{11}$$

$$\dot{V} + i\omega_0 V - \frac{i}{C\mu^3}(Y + W - 2\bar{Z}) = 0, \tag{12}$$

$$\dot{Y} - i(p - \omega_0)Y + \frac{i}{3}\beta(2p + \omega_0)\mu^3 = \frac{1}{2}\gamma\beta\mu^3 + E_1 + f_1, \tag{13}$$

$$\dot{Z} - i(3p - \omega_0)Z - \frac{i}{3}\omega_0\beta\mu^3 = -\frac{1}{2}\gamma\beta\mu^3 + E_2 + f_2, \tag{14}$$

$$\dot{U} - i(p + \omega_0)U = E_3 + f_3, \tag{15}$$

$$\dot{W} + ipW = -2C\delta p\mu^2 W - C\delta\omega_0\mu^2(Y - 2\bar{Z}) - \delta\beta\mu^3 C + E_4, \quad (16)$$

$$\ddot{\mu} + \frac{\omega_0^2 + 2\beta \operatorname{Re} V}{4}\mu - \mu^{-3}\left(\frac{1}{4} - r\right) = -2\mu^{-1}\delta\tau, \quad (17)$$

$$\dot{r} + \frac{1}{\mu^2 C} \operatorname{Im}((Z + \bar{Y})W + 3YZ) = k\theta_0 r + 2p\delta\mu^2\tau, \quad (18)$$

$$\dot{C} = -\gamma C, \quad \dot{\omega}_0 - \beta \operatorname{Im} V = 0, \quad (19)$$

$$\dot{\theta}_0 + k\theta_0 = 0, \quad \dot{\tau} + k\tau = 0, \quad \dot{\xi} - 2ip\xi + k\xi = 0. \quad (20)$$

Здесь неизвестными являются комплексные функции $X(t)$, $V(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, $W(t)$, $U(t)$ и вещественные функции $\omega_0(t)$, $C(t)$, $r(t)$, $\theta(t)$, $\mu(t)$;

$$E_1 = \frac{2i}{C\mu^2}((Y + W - 2\bar{Z})\tau - (\bar{Y} + \bar{W} - 2Z)\bar{\xi}), \quad E_2 = -\frac{2i}{C\mu^2}(\bar{Y} + \bar{W} - 2Z)\tau,$$

$$E_3 = \frac{2i}{C\mu^2}(Y + W - 2\bar{Z})\bar{\xi}, \quad E_4 = \frac{2i}{C\mu^2}((Y + W - 2\bar{Z})\tau + (\bar{Y} + \bar{W} - 2Z)\bar{\xi}),$$

$$\gamma = \frac{\delta 2p}{\rho_0} + k\theta_0, \quad p = \frac{\omega_0 - \rho_0 C}{2}, \quad \rho_0 = \frac{1}{\mu^2 C};$$

f_1, f_2, f_3 зависят от коэффициентов Тейлора функций u, r третьего порядка.

Для моделирования движения тропических циклонов мы обрываем цепочку (11)–(20), предполагая $f_1 = f_2 = f_3 = 0$.

Оборванная цепочка Гюгонио–Маслова для уравнений мелкой воды без учета энергетического обмена получается из уравнений (11)–(19) после приравнивания к нулю их правых частей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. // УМН. 1980. Т. 35. № 2. С. 252–253.
2. Dobrokhotov S. Yu. // Russ. J. Math. Phys. 1999. V. 6. № 2. P. 137–173; № 3. P. 282–313.
3. Dobrokhotov S. Yu., Pankrashkin K. V., Semenov E. S. // Russ. J. Math. Phys. 2001. V. 8. № 1. P. 25–54.
4. Семенов Е. С. // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 6. С. 902–913.
5. Доброхотов С. Ю., Тироцци Б. // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 6. С. 741–746.
6. Доброхотов С., Семенов Е., Тироцци Б. // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 2. С. 5–44.
7. Доброхотов С. Ю., Семенов Е. С., Тироцци Б. // ТМФ. 2004. Т. 139. № 1. С. 500–512.
8. Должанский Ф. В., Крымов В. А., Манин Д. Ю. // Успехи физ. наук. 1990. Т. 160. № 7. С. 1–47.
9. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984.

(С. Ю. Доброхотов, Е. С. Семёнов) Институт проблем механики РАН
(Б. Тироцци) Department of Physics, University “La Sapienza”, Rome
E-mail: dobr@ipmnet.ru, semenov@ipmnet.ru, b.tirozzi@libero.it

Поступило
11.01.2005