Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Деревягин, Теоремы типа Борга для обобщенных матриц Якоби, *Матем. заметки*, 2005, том 77, выпуск 4, 637–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2648>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 08:45:00

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕМЫ ТИПА БОРГА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ

М. С. Деревягин

В заметке рассматриваются два типа обратных задач для обобщенных матриц Якоби, ассоциированных с последовательностью полиномов (см. [1]). Первый тип обратных задач – это задачи типа Борга (см. [2]). Для классических матриц Якоби такие результаты изложены в работах [3], [4]. Результат такого типа для обобщенных матриц Якоби, полученный в данной работе, формулируется так: спектр $\sigma(H)$ обобщенной матрицы Якоби H и спектр $\sigma(H(\tau))$ ее одномерного возмущения однозначно восстанавливают обобщенную матрицу Якоби H и параметр τ . Второй тип обратных задач восходит к задаче о единственности восстановления регулярного оператора Штурма–Лиувилля на отрезке $[0, 1]$ по заданному потенциалу на отрезке $[1/2, 1]$ и его спектру, которая была решена Г. Хохштадтом и Б. Либберманом в [5]. Аналоги теорем Борга и Хохштадта–Либбермана для систем обыкновенных дифференциальных уравнений получены недавно в [6]. Для классических матриц Якоби результат типа Хохштадта–Либбермана получен в работе [7]. В данной работе мы получаем результаты такого типа для обобщенных матриц Якоби, следуя схеме, предложенной в [8].

1. Обобщенные матрицы Якоби. Пусть $p(\lambda) = p_k \lambda^k + \dots + p_1 \lambda + p_0$ – вещественный полином степени k и $p_k = 1$. Ассоциируем с полиномом p его симметризатор E_p и сопровождающую матрицу L_p , заданные следующим образом:

$$E_p = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_k \\ \vdots & \ddots & \\ p_k & & 0 \end{pmatrix}, \quad L_p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & & 0 & -p_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -p_{k-1} \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть p_j – приведенный вещественный полином степени k_j и пусть $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 0, \dots, N$, $b_j > 0$, $j = 0, \dots, N-1$. Блочно-трехдиагональную матрицу

$$H = \begin{pmatrix} A_0 & \tilde{B}_0 & & 0 \\ B_0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \tilde{B}_{N-1} \\ 0 & & B_{N-1} & A_N \end{pmatrix},$$

где $A_j = L_{p_j}$, $k_{j+1} \times k_j$ матрицы B_j и $k_j \times k_{j+1}$ матрицы $\tilde{B}_j$ заданы следующим образом:

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & b_j \\ \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \tilde{b}_j \\ \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_j = \varepsilon_j \varepsilon_{j+1} b_j, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

будем называть обобщенной матрицей Якоби (ОМЯ), ассоциированной с последовательностью полиномов $\{\varepsilon_j p_j\}_{j=0}^N$ и чисел $\{b_j\}_{j=0}^{N-1}$.

Спектральные задачи для ОМЯ и их связь с индефинитной проблемой моментов изучались в [1] (см. также [9]).

Пусть $n + 1 = \sum_{j=0}^N k_j$ обозначает количество строк матрицы H . Введем в рассмотрение матрицу G порядка $n + 1$ следующим равенством:

$$G = \text{diag}(G_0, \dots, G_N), \quad G_j = \varepsilon_j E_{p_j}^{-1}, \quad j = 0, \dots, N.$$

Под $\ell_{[0,n]}^2(G)$ будем понимать пространство $(n + 1)$ -мерных векторов со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = (Gx, y)_{\ell_{[0,n]}^2}, \quad x, y \in \ell_{[0,n]}^2.$$

Пусть $n_0 = 0$, $n_j = \sum_{i=0}^{j-1} k_i$, $j = 1, \dots, N + 1$. Занумеруем стандартный базис в $\ell_{[0,n]}^2(G)$ следующим образом:

$$e_{j,k} = \{\delta_{l,n_j+k}\}_{l=0}^n, \quad j = 0, \dots, N, \quad k = 0, \dots, k_j - 1, \quad e := e_{0,0}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [1]. ОМЯ H определяет простой симметрический оператор в пространстве $\ell_{[0,n]}^2(G)$, т.е. $\langle Hx, y \rangle = \langle x, Hy \rangle$, $x, y \in \ell_{[0,n]}^2(G)$.

Напомним, что матрица H определяет простой оператор, если ее минимальный полином совпадает с характеристическим. Под спектром $\sigma(H)$ матрицы H будем понимать множество собственных значений матрицы H с учетом их алгебраической кратности.

Определим полиномы первого рода P_j как решения рекуррентного соотношения

$$\tilde{b}_{j-1} P_{j-1} - p_j(\lambda) P_j + b_j P_{j+1} = 0, \quad j = 0, \dots, N, \quad (1)$$

при начальных условиях $P_{-1} = 0$, $P_0 = 1$. В (1) положим $b_N = 1$ для того, чтобы определить полином P_{N+1} . Соотношения вида (1) возникают в теории аппроксимаций Пале [10] и в индефинитной проблеме моментов [1]. Из (1) следует, что полином P_j имеет степень n_j и старший коэффициент его равен $(b_0 \cdots b_{j-1})^{-1}$. Более того, если обозначить $H_{[j,m]}$ главный минор матрицы H , соответствующий базисным векторам $\{e_{i,k}\}_{k=0, \dots, k_i-1}^{i=j, \dots, m}$, $0 \leq j \leq m \leq N$, то верно следующее представление полиномов первого рода.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [1]. Полиномы P_j находятся по формуле

$$P_{j+1}(\lambda) = (b_0 \cdots b_j)^{-1} \det(\lambda - H_{[0,j]}), \quad j = 0, \dots, N.$$

Введем еще один класс полиномов ψ_j , удовлетворяющих рекуррентному соотношению

$$\tilde{b}_{j-1} \psi_{j-1} - p_j(\lambda) \psi_j + b_j \psi_{j+1} = 0, \quad j = 0, \dots, N, \quad (2)$$

и начальным условиям $\psi_{N+1} = 0$, $\psi_N = 1$, причем полагаем $\tilde{b}_{-1} = 1$, чтобы определить полином ψ_{-1} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Полиномы ψ_j находятся по формуле

$$\psi_j(\lambda) = (\tilde{b}_{N-1} \cdots \tilde{b}_j)^{-1} \det(\lambda - H_{[j+1,N]}), \quad j = -1, \dots, N - 1. \quad (3)$$

2. Соотношения между m -функциями подматриц ОМЯ. В этом пункте определяются различные m -функции подматриц ОМЯ H и указывается связь между ними. Кроме того, сформулированы результаты о единственности восстановления ОМЯ по ее m -функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [1]. m -функцией ОМЯ H называется функция

$$m(\lambda) = \langle (H - \lambda)^{-1} e, e \rangle_{\ell_{[0,n]}^2(G)}. \quad (4)$$

Исходя из формул (4) и (3), можно получить (см. [1])

$$m(\lambda) = -\varepsilon_0 \frac{\det(\lambda - H_{[1,N]})}{\det(\lambda - H)} = -\varepsilon_0 \frac{\psi_0(\lambda)}{\psi_{-1}(\lambda)}. \quad (5)$$

Будем обозначать $G_{[j,m]}$ главный минор матрицы G , соответствующий базисным векторам $\{e_{i,k}\}_{k=0, \dots, k_i-1}^{i=j, \dots, m}$, $0 \leq j \leq m \leq N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [1]. Определим функцию $m_+(\lambda, j)$ равенством

$$m_+(\lambda, j) = \langle (H_{[j, N]} - \lambda)^{-1} e_{j,0}, e_{j,0} \rangle_{\ell^2_{[n_j, n]}(G_{[j, N]}), \quad j = 0, \dots, N. \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В (6) векторы $e_{j,k}$ рассматриваются как элементы пространства

$$\ell^2_{[n_j, n]} = \text{span}\{e_{i,k} \mid i = j, \dots, N; k = 0, 1, \dots, k_i - 1\}.$$

Ясно, что $m(\lambda) = m_+(\lambda, 0)$ и $m_+(\lambda, N) = -\varepsilon_N/p_N(\lambda)$. Функция $m_+(\lambda, j)$ является m -функцией ОМЯ $H_{[j, N]}$. Значит, по формуле (5) и предложению 3 имеем

$$m_+(\lambda, j) = -\varepsilon_j \frac{\psi_j(\lambda)}{\tilde{b}_{j-1}\psi_{j-1}(\lambda)} = -\varepsilon_j \frac{\det(\lambda - H_{[j+1, N]})}{\det(\lambda - H_{[j, N]})}, \quad j = 0, \dots, N. \quad (7)$$

Согласно (7) и (2) получаем разложение функции $m_+(\lambda, j)$ в P -дробь (см. [10])

$$m_+(\lambda, j) = -\frac{\varepsilon_j}{p_j(\lambda)} - \frac{\varepsilon_j \varepsilon_{j+1} b_j^2}{p_{j+1}(\lambda)} - \dots - \frac{\varepsilon_{N-1} \varepsilon_N b_{N-1}^2}{p_N(\lambda)}. \quad (8)$$

На основании этого разложения имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 [1]. Функция $m_+(\lambda, j)$ однозначно определяет матрицу $H_{[j, N]}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Согласно [10] всякая правильная рациональная функция с вещественными коэффициентами допускает разложение в P -дробь вида (8). Поэтому всякая правильная рациональная функция с вещественными коэффициентами, не равная тождественно нулю, является с точностью до положительного множителя m -функцией единственной ОМЯ (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Определим функцию $m_-(\lambda, j)$ равенством

$$m_-(\lambda, j) = \langle (H_{[0, j-1]} - \lambda)^{-1} e_{j-1,0}, e_{j-1,0} \rangle_{\ell^2_{[0, n_{j-1}]}(G_{[0, j-1]}), \quad j = 1, \dots, N+1. \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В (9) векторы $e_{j,k}$ рассматриваются как элементы пространства

$$\ell^2_{[0, n_{j-1}]} = \text{span}\{e_{i,k} \mid i = 0, \dots, j-1; k = 0, 1, \dots, k_i - 1\}.$$

Аналогично, для функции $m_-(\lambda, j)$ имеет место формула

$$m_-(\lambda, j) = -\varepsilon_{j-1} \frac{P_{j-1}(\lambda)}{b_{j-1}P_j(\lambda)} = -\varepsilon_{j-1} \frac{\det(\lambda - H_{[0, j-2]})}{\det(\lambda - H_{[0, j-1]})}, \quad j = 1, \dots, N+1, \quad (10)$$

и справедливо утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Функция $m_-(\lambda, j)$ однозначно определяет ОМЯ $H_{[0, j-1]}$.

Следующая теорема неявно связывает m -функции $m_+(\lambda, j)$ и $m_-(\lambda, j)$ (см. формулы (7) и (10)).

ТЕОРЕМА 1. Пусть λ_k — собственное значение ОМЯ H кратности r_k . Тогда для любого $j \in \{1, \dots, N\}$ справедливы равенства

$$(P_j(\lambda)\psi_{j-1}(\lambda) - P_{j-1}(\lambda)\psi_j(\lambda))^{(i)} \Big|_{\lambda=\lambda_k} = 0, \quad i = 0, \dots, r_k - 1. \quad (11)$$

3. Обратные задачи. В этом пункте сформулированы обратные теоремы для ОМЯ. Но вначале приведены формулы следов для ОМЯ. Первое подробное изучение формулы следов для самосопряженных операторов было проведено М. Г. Крейнм [11]. Для некоторых классов несамосопряженных операторов формула следов получена в работе П. Йонаса [12]. В следующей теореме приводится явный вид формулы следов для ОМЯ.

ТЕОРЕМА 2. Для ОМЯ H справедливы формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A_0^l &= \operatorname{tr} H^l - \operatorname{tr} H_{[1, N]}^l, \quad 1 \leq l < k_0 + k_1, \\ \operatorname{tr} A_0^{k_0+k_1} + (k_0 + k_1)b_0\tilde{b}_0 &= \operatorname{tr} H^{k_0+k_1} - \operatorname{tr} H_{[1, N]}^{k_0+k_1}. \end{aligned}$$

Пусть $H(\tau)$ – одномерное возмущение матрицы H вида $H(\tau) := H + \langle \cdot, e \rangle_{\ell_{[0, n]}^2(G)} e$. Заметим, что матрица $H(\tau)$ также является ОМЯ. Для описания ее спектра в терминах $m(\lambda)$ и τ мы используем подход, связанный с граничными операторами (см. [13]). Рассмотрим обратную задачу о восстановлении ОМЯ H и числа τ по двум различным спектрам $\sigma(H)$ и $\sigma(H(\tau))$. Решать эту задачу будем в два этапа. Сначала предположим, что параметр τ известен; тогда можно найти m -функцию ОМЯ H и, значит, в силу предложения 4 справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Спектр $\sigma(H)$ ОМЯ H , произвольные $n - k_0 + 1$ чисел из спектра $\sigma(H(\tau))$ ОМЯ $H(\tau)$ и число $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ однозначно определяют ОМЯ H .

Теперь на основании теорем 2 и 3 получаем результат типа Борга.

ТЕОРЕМА 4. Спектр $\sigma(H)$ ОМЯ H и спектр $\sigma(H(\tau))$ ($\neq \sigma(H)$) ОМЯ $H(\tau)$ однозначно определяют число $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и ОМЯ H .

Отметим, что единственность восстановления ОМЯ H по ее спектру $\sigma(H)$ и спектру $\sigma(H_{[1, N]})$ была доказана в [1].

Сейчас перейдем к теореме о единственности восстановления ОМЯ по смешанным данным (аналог теоремы Хохштадта–Либермана).

ТЕОРЕМА 5. Пусть задано натуральное число

$$t_l := 2 \left(n + 1 - \sum_{i=l}^N k_i \right) - k_{l-1}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Тогда

- 1) если $t_l \leq n + 1$, то матрицы $\tilde{B}_{l-1}, A_l, \dots, \tilde{B}_{N-1}, A_N$ и любые t_l чисел из спектра $\sigma(H)$ ОМЯ H определяют матрицы $A_0, \tilde{B}_0, \dots, \tilde{B}_{l-2}, A_{l-1}$;
- 2) если $t_l \leq n$, то матрицы $A_l, \tilde{B}_l, \dots, \tilde{B}_{N-1}, A_N$ и любые $t_l + 1$ чисел из спектра $\sigma(H)$ ОМЯ H определяют матрицы $A_0, \tilde{B}_0, \dots, A_{l-1}, \tilde{B}_{l-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как доказательства обоих пунктов аналогичные, приведем схему доказательства только первого утверждения. По данным $\tilde{B}_{l-1}, A_l, \dots, \tilde{B}_{N-1}, A_N$ находим функцию $m_+(\lambda, l)$. Пользуясь теоремой 1 и формулами (7), (11), определяем функцию $m_-(\lambda, l)$. Далее в силу предложения 5 восстанавливаем матрицы $A_0, \tilde{B}_0, \dots, \tilde{B}_{l-2}, A_{l-1}$.

Благодарность. Автор глубоко признателен В. А. Деркачу за многочисленные ценные замечания, позволившие в значительной мере улучшить текст статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Derevyagin M., Derkach V. // Linear Algebra Appl. 2004. V. 382. P. 1–24.
2. Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973.
3. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
4. Hochstadt H. // Arch. Math. 1967. V. 18. P. 201–207.
5. Hochstadt H., Lieberman B. // SIAM J. Appl. Math. 1978. V. 34. № 4. P. 676–680.
6. Маламуд М. М. // Тр. ММО. 1999. Т. 60. С. 199–258.
7. Hochstadt H. // Linear Algebra Appl. 1979. V. 28. P. 113–115.
8. Gesztesy F., Simon B. // J. Anal. Math. 1997. V. 73. P. 267–297.
9. Krein M. G., Langer H. // Beiträge Anal. 1979. V. 14. P. 25–40.
10. Magnus A. // Math. Z. 1962. V. 78. P. 361–374.
11. Крейн М. Г. // Матем. сб. 1953. Т. 33 (75). С. 597–626.
12. Jonas P. // Math. Nachr. 1988. V. 137. P. 257–281.
13. Derkach V. // J. Math. Sci. 1999. V. 97. № 5. P. 4420–4460.