Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гельман, Непрерывные аппроксимации многозначных отображений и неподвижные точки, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 212–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2649>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:04:49

УДК 517.986.6

НЕПРЕРЫВНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Б. Д. Гельман

Настоящая статья посвящена доказательству теоремы о неподвижной точке для вполне непрерывных многозначных отображений, определенных на ограниченном выпуклом замкнутом подмножестве X гильбертова пространства H и удовлетворяющих тангенциальному условию $F(x) \cap (x + T_X(x)) \neq \emptyset$, где $T_X(x)$ – касательный конус к множеству X в точке x . Доказательство этой теоремы основывается на методе однозначных аппроксимаций многозначных отображений. В статье рассматривается простой подход к построению однозначных аппроксимаций многозначных отображений. Этот подход позволяет не только упростить доказательства известных ранее теорем, но и получить новые утверждения, которые необходимы для доказательства основной теоремы статьи.

Библиография: 12 названий.

Настоящая статья посвящена доказательству теоремы о неподвижной точке для вполне непрерывных многозначных отображений, определенных на ограниченном выпуклом замкнутом подмножестве X гильбертова пространства H и удовлетворяющих тангенциальному условию

$$F(x) \cap (x + T_X(x)) \neq \emptyset \quad \text{для любого } x \in X,$$

где $T_X(x)$ – касательный конус к множеству X в точке x .

Такого типа теоремы известны в случае, когда X является выпуклым компактом (см., например, [1]) или компактом более сложной топологической структуры (см., например, [2]). Их доказательства существенно опираются на лемму Ки Фаня и носят аналитический характер. Эти теоремы находят приложения в математической экономике и теории дифференциальных включений (см. [3]–[5]).

Доказательство основной теоремы статьи основывается на методе однозначных аппроксимаций и сечений многозначных отображений. Хорошо известна важная роль, которую играют однозначные аппроксимации и сечения в теории неподвижных точек многозначных отображений (см., например, [6]–[9] и др.). В пп. 1–3 данной статьи рассматривается простой подход к построению однозначных аппроксимаций. Этот подход позволяет не только упростить доказательства известных ранее теорем, но и получить новые утверждения, которые необходимы для доказательства основной теоремы статьи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00189.

1. Основные факты теории многозначных отображений. Пусть Y – подмножество нормированного пространства E , обозначим

$P(Y)$ – множество всех непустых подмножеств в Y ;

$V(Y)$ – множество всех непустых выпуклых подмножеств в Y ;

$Cv(Y)$ – множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств в Y ;

$Kv(Y)$ – множество всех непустых компактных выпуклых подмножеств в Y .

Многозначное отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y – это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое *образом* точки x . В дальнейшем, если образы многозначного отображения F являются выпуклыми, то будем записывать это следующим образом, $F: X \rightarrow V(Y)$. Аналогично, обозначение $F: X \rightarrow Cv(Y)$ (соответственно $F: X \rightarrow Kv(Y)$) означает, что образы $F(x)$ являются выпуклыми замкнутыми (соответственно компактными) множествами.

Графиком многозначного отображения $F: X \rightarrow P(Y)$ называется множество

$$\Gamma_X(F) = \{(x, z) \mid x \in X, z \in F(x)\} \subset X \times Y.$$

Всюду в дальнейшем многозначные отображения обозначаются прописными, а однозначные – строчными буквами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Многозначное отображение $F: X \rightarrow P(Y)$ называется *полунепрерывным снизу* в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, найдется открытая окрестность U точки x_0 такая, что $F(x) \cap V \neq \emptyset$ для любого $x \in U$. Если F полунепрерывно снизу в каждой точке $x \in X$, то оно называется *полунепрерывным снизу*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Следующие условия эквивалентны:

- 1) F полунепрерывно снизу;
- 2) для любого открытого множества $V \subset Y$ полный прообраз этого множества

$$F_{\Pi}^{-1}(V) = \{x \in X \mid F(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

является открытым множеством в X ;

- 3) для любого замкнутого множества $W \subset Y$ малый прообраз этого множества

$$F_M^{-1}(W) = \{x \in X \mid F(x) \subset W\}$$

является замкнутым множеством в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения содержится, например, в [10].

Приведем еще один, по-видимому новый, критерий полунепрерывности снизу многозначного отображения.

Пусть $F: X \rightarrow P(Y)$ – многозначное отображение, $\Gamma_X(F)$ – график этого отображения. Естественно определены проекции

$$t: \Gamma_X(F) \rightarrow X, \quad t(x, y) = x, \quad r: \Gamma_X(F) \rightarrow Y, \quad r(x, y) = y.$$

Очевидно, что для любого $x \in X$ справедливо равенство: $F(x) = r(t^{-1}(x))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Многозначное отображение F полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда проекция t является открытым отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть множество $W \subset \Gamma_X(F)$ – открытое множество и $t(W) = U$. Покажем, что множество U открыто в X . Предположим противное, тогда существует точка $x_0 \in U$ такая, что $(x_0, y_0) \in W$, и для любого $\delta > 0$ найдется точка x_δ , $\rho(x_\delta, x_0) < \delta$, причем $(x_\delta \times F(x_\delta)) \cap W = \emptyset$.

С другой стороны, так как множество W открыто, то существуют такие числа $\delta_0 > 0$, $\eta_0 > 0$, что произведение окрестностей $U_{\delta_0}(x_0) \times U_{\eta_0}(y_0) \subset W$. Из полунепрерывности снизу многозначного отображения F вытекает, что найдется такое $\delta_1 > 0$, что для любого $x \in U_{\delta_1}(x_0)$ пересечение $F(x) \cap U_{\eta_0}(y_0) \neq \emptyset$. Следовательно, для достаточно малых δ пересечение $(x_\delta \times F(x_\delta)) \cap W \neq \emptyset$. Полученное противоречие и доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть t является открытым отображением. Рассмотрим открытое множество $V \subset Y$ и докажем открытость множества

$$F_{\Pi}^{-1}(V) = \{x \in X \mid F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Пусть точка $x_0 \in F_{\Pi}^{-1}(V)$, тогда найдется точка y_0 такая, что $y_0 \in (F(x_0) \cap V)$. В силу открытости множества V существует число $\eta > 0$ такое, что $U_{\eta}(y_0) \subset V$. Рассмотрим множество

$$W = (U_{\varepsilon}(x_0) \times U_{\eta}(y_0)) \cap \Gamma_X(F).$$

Очевидно, что это множество открыто в $\Gamma_X(F)$. Тогда множество $U = t(W)$ также является открытым и $x_0 \in U$. Пусть $x \in U$, тогда существует точка $y \in F(x)$ такая, что $(x, y) \in W$, т.е. $x \in F_{\Pi}^{-1}(V)$. Следовательно, точка x_0 лежит в $F_{\Pi}^{-1}(V)$ вместе со своей открытой окрестностью U , что и доказывает утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если график многозначного отображения F открытое множество в $X \times Y$, то отображение F является полунепрерывным снизу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из открытости проекции t .

Рассмотрим другой класс многозначных отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Многозначное отображение $F: X \rightarrow P(Y)$ называется *полунепрерывным сверху в точке* $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$, $V \supset F(x_0)$, существует открытая окрестность U точки x_0 такая, что $F(U) \subset V$. Если F полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$, то оно называется *полунепрерывным сверху*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) F полунепрерывно сверху;
- 2) для любого открытого множества $V \subset Y$ малый прообраз этого множества

$$F_M^{-1}(V) = \{x \in X \mid F(x) \subset V\}$$

является открытым множеством в X ;

- 3) для любого замкнутого множества $W \subset Y$ полный прообраз этого множества

$$F_{\Pi}^{-1}(W) = \{x \in X \mid F(x) \cap W \neq \emptyset\}$$

является замкнутым множеством в X .

Доказательство этого утверждения содержится, например, в [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Многозначное отображение $F: X \rightarrow P(Y)$ называется *непрерывным*, если оно одновременно является полунепрерывным и сверху и снизу.

Очевидно, что свойства непрерывных многозначных отображений вытекают из соответствующих свойств полунепрерывных сверху и снизу отображений.

Рассмотрим класс многозначных отображений, важный для дальнейших рассуждений.

Пусть X – метрическое пространство, Y – нормированное пространство, $F: X \rightarrow P(Y)$ – некоторое многозначное отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что F является $\mathcal{U}$ -отображением, если оно удовлетворяет двум условиям:

- а) график $\Gamma_X(F)$ является открытым множеством в $X \times Y$;
- б) для любой точки $x \in X$ образ $F(x)$ является выпуклым множеством.

Обозначим множество всех $\mathcal{U}$ -отображений из X в Y символом $\mathcal{U}(X, Y)$. Многозначные отображения, принадлежащие $\mathcal{U}(X, Y)$, обладают следующими свойствами.

Свойство 1. Если $F \in \mathcal{U}(X, Y)$, то оно является полунепрерывным снизу.

Доказательство этого свойства вытекает из следствия 1.

Пусть A – подмножество в Y . Обозначим через $U_\varepsilon(A)$ ε -окрестность множества A , т.е.

$$U_\varepsilon(A) = \{y \in Y \mid \rho(y, A) < \varepsilon\}.$$

Свойство 2. Если $F: X \rightarrow P(Y)$ – полунепрерывное снизу многозначное отображение, то для любого $\varepsilon > 0$ многозначное отображение $F^\varepsilon: X \rightarrow P(Y)$, $F^\varepsilon(x) = U_\varepsilon(F(x))$, является $\mathcal{U}$ -отображением.

Доказательство очевидно.

Свойство 3. Пусть многозначные отображения $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{U}(X, Y)$. Если для любой точки $x \in X$ пересечение $\bigcap_{i=1}^n F_i(x) \neq \emptyset$, то многозначное отображение $\bigcap_{i=1}^n F_i \in \mathcal{U}(X, Y)$.

Доказательство очевидно.

2. Непрерывные сечения и аппроксимации многозначных отображений.

Пусть X – метрическое пространство, Y – нормированное пространство, $F: X \rightarrow P(Y)$ – некоторое многозначное отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *сечением* многозначного отображения F , если для любой точки $x \in X$ выполнено включение $f(x) \in F(x)$.

Приведем формулировку классической теоремы Майкла о сечении [11].

ТЕОРЕМА 1. Пусть E – банахово пространство, $F: X \rightarrow Cb(E)$ – полунепрерывное снизу многозначное отображение, A – замкнутое подмножество в X . Если $f: A \rightarrow E$ непрерывное сечение $F|_A$, то у F существует непрерывное сечение $g: X \rightarrow E$ такое, что $g|_A = f$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Многозначное отображение $G: X \rightarrow P(Y)$ называется ε -аппроксимацией многозначного отображения F , если график $\Gamma_X(G)$ отображения G принадлежит ε -окрестности графика $\Gamma_X(F)$ многозначного отображения F .

В случае, если G является однозначным непрерывным отображением, говорят, что G – однозначная ε -аппроксимация многозначного отображения F .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F: X \rightarrow Cn(Y)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует полунепрерывное снизу многозначное отображение $F_\varepsilon: X \rightarrow Cn(Y)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $F_\varepsilon(x) = \overline{\sum_{j \in J} \varphi_j(x) A_j}$, где $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ – разбиение единицы, построенное по некоторому открытому локально конечному покрытию пространства X ; $\{A_j\}_{j \in J}$ – выпуклые замкнутые множества в Y ;
- 2) $F(x) \subset F_\varepsilon(x)$ для любого $x \in X$;
- 3) график $\Gamma_X(F_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(\Gamma_X(F))$;
- 4) $F_\varepsilon(X) \subset \overline{\text{co}}(F(X))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε – произвольное положительное число. В силу полунепрерывности сверху многозначного отображения F , для любой точки $x \in X$ существует положительное число $\delta(x)$ такое, что для любой точки $x' \in U_{\delta(x)}(x)$ выполнено включение $F(x') \subset U_{\varepsilon/2}(F(x))$. Без ограничения общности будем считать, что $0 < \delta(x) < \varepsilon$. Пусть $\eta(x) = \delta(x)/4$. Рассмотрим открытое покрытие $\tau = \{U_{\eta(x)}(x)\}_{x \in X}$. Выберем из него локально конечное подпокрытие

$$\sigma = \{V_j = U_{\eta(x_j)}(x_j)\}_{j \in J}.$$

Пусть функции $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ образуют непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Рассмотрим многозначное отображение F_σ , где

$$F_\sigma(x) = \sum_{j \in J} \varphi_j(x) \overline{\text{co}} F(V_j).$$

Очевидно, что это отображение полунепрерывно снизу.

Проверим для отображения F_σ выполнение условия 2). Пусть x – произвольная точка из X . Значение $\varphi_j(x) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $x \in V_j$. Пусть $j_1, j_2, \dots, j_s$ – индексы всех функций, для которых $\varphi_j(x) \neq 0$. Тогда

$$F_\sigma(x) = \sum_{i=1}^s \varphi_{j_i}(x) \overline{\text{co}} F(V_{j_i}), \quad \text{где } x \in \bigcap_{i=1}^s V_{j_i}.$$

Следовательно, $F(x) \subset F(V_{j_i}) \subset \overline{\text{co}} F(V_{j_i})$. Тогда $F(x) \subset F_\sigma(x)$.

Покажем, что отображение F_σ удовлетворяет условию 3). Пусть $x \in V_{j_i} \subset X$, $i = 1, 2, \dots, s$. Множество $V_{j_i} = U_{\eta_{x_i}}(x_i)$, где $i = 1, 2, \dots, s$. Пусть $\eta_{x_k} = \max_{1 \leq i \leq s} \eta_{x_i}$, тогда $x \in U_{\eta_{x_k}}(x_i)$ для любого $i = 1, 2, \dots, s$. Тогда $x_i \in U_{2\eta_k}(x_k)$ для любого $i = 1, 2, \dots, s$. Следовательно, $V_{j_i} \subset U_{3\eta_{x_k}}(x_k) \subset U_{\delta(x_k)}(x_k)$. В силу определения множества $U_{\delta(x_k)}(x_k)$ для любой точки $x' \in V_{j_i}$ выполнено включение

$$F(x') \subset U_{\varepsilon/2}(F(x_k)).$$

Так как множество $F(x_k)$ выпукло, то

$$F_\sigma(x) = \sum_{i=1}^s \varphi_{j_i}(x) \overline{\text{co}} F(V_{j_i}) \subset \overline{U_{\varepsilon/2}(F(x_k))}.$$

Рассмотрим отображение $F_\varepsilon(x) = \overline{F_\sigma(x)}$. Очевидно, что это отображение удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы. Условие 3) вытекает из того, что

$$\overline{F_\sigma(x)} \subset \overline{U_{\varepsilon/2}(F(x_k))} \subset U_\varepsilon(F(x_k)).$$

Так как $\rho(x, x_k) < \eta_s < \varepsilon$, то график $\Gamma(F_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(\Gamma(F))$.

Условие 4) вытекает из того, что

$$F_\sigma(x) \subset \text{co}\{\overline{\text{co}} F(V_{j_1}), \dots, \overline{\text{co}} F(V_{j_s})\} \subset \overline{\text{co}} F(X).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть E – банахово пространство и A – замкнутое подмножество X . Если многозначное отображение $F: X \rightarrow \text{Cv}(E)$ полунепрерывно сверху и отображение $f: A \rightarrow E$ является непрерывным сечением многозначного отображения $F|_A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует ε -аппроксимация f_ε такая, что $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для любой точки $x \in A$ и $f_\varepsilon(X) \subset \overline{\text{co}}(F(X))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F_ε – многозначная полунепрерывная снизу ε -аппроксимация, существующая в силу теоремы 2. Тогда у него существует непрерывное однозначное сечение, которое является непрерывным продолжением f . Очевидно, что это сечение и будет искомым отображением f_ε .

3. Однозначные сечения и аппроксимации пересечения многозначных отображений. Пусть X – метрическое пространство, E – банахово пространство, $F: X \rightarrow \text{Cv}(E)$ – полунепрерывное снизу многозначное отображение, $G: X \rightarrow \text{V}(E)$ – $\mathcal{U}$ -отображение. Пусть для любого $x \in X$ пересечение $F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$. Обозначим $F \cap G$ многозначное отображение, определенное условием $(F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – замкнутое подмножество в X . Если $f: A \rightarrow E$ – непрерывное сечение $(F \cap G)|_A$, то у многозначного отображения $F \cap G$ существует непрерывное сечение $g: X \rightarrow E$ такое, что $g|_A = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f_1 – произвольное непрерывное сечение многозначного отображения F , которое является непрерывным продолжением отображения f на все пространство X . Такое сечение существует в силу теоремы 1. Тогда, в силу открытости графика отображения G , существует открытое множество $U \supset A$ такое, что $f_1|_U$ является сечением многозначного отображения $G|_U$.

Пусть точка $x \in B = X \setminus U$, выберем произвольно точку $y_x \in (F(x) \cap G(x))$. Рассмотрим произвольное сечение f_x многозначного отображения F , которое удовлетворяет условию: $f_x(x) = y_x$. В силу открытости графика отображения G , существует открытая окрестность $U(x)$ точки x такая, что $f_x(x') \in G(x')$ для любой точки $x' \in U(x)$ и $U(x) \cap A = \emptyset$. Очевидно, что такое отображение f_x может быть построено для любой точки $x \in B$. Тогда семейство $\{U(x)\}_{x \in B}$ образует открытое покрытие множества B . Выберем из этого покрытия локально конечное подпокрытие $\{U(x_\alpha)\}_{\alpha \in J}$.

Тогда семейство $\{U\{U(x_\alpha)\}_{\alpha \in J}\}$ образует локально конечное покрытие пространства X . Пусть функции $\{\varphi(x); \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in J}\}$ образуют разбиение единицы, построенное по этому покрытию. Рассмотрим отображение $g: X \rightarrow E$, определенное по правилу

$$g(x) = \varphi(x)f_1(x) + \sum_{\alpha \in J} \varphi_\alpha(x)f_{x_\alpha}(x).$$

Нетрудно доказать, что в силу выпуклости образов многозначных отображений F и G , построенное отображение g будет искомым сечением. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $F_i: X \rightarrow \text{Cv}(E)$, $i = 0, 1, \dots, k$, – полунепрерывные снизу многозначные отображения, $G_j: X \rightarrow \text{Cv}(E)$, $j = 1, \dots, s$, – полунепрерывные сверху многозначные отображения. Если для любого $x \in X$ пересечение

$$\left(\bigcap_{i=0}^k F_i(x)\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^s G_j(x)\right) \neq \emptyset,$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $f_\varepsilon: X \rightarrow E$ удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) f_ε является непрерывным сечением многозначного отображения F_0 ;
- 2) для любого $x \in X$ расстояние $\rho(f_\varepsilon(x), F_i(x)) < \varepsilon$, $i = 1, \dots, k$;
- 3) отображение f_ε является ε -аппроксимацией многозначных отображений G_j , $j = 1, \dots, s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 существуют полунепрерывные снизу многозначные отображения $\tilde{G}_j$ такие, что $G_j(x) \subset \tilde{G}_j(x)$ для любого $x \in X$ и график $\Gamma_X(\tilde{G}_j) \subset U_{\varepsilon/2}(\Gamma_X(G_j))$. Тогда многозначные отображения $\tilde{G}_j^{\varepsilon/2}$, где $\tilde{G}_j^{\varepsilon/2}(x) = U_{\varepsilon/2}(\tilde{G}_j(x))$, будут $\mathcal{U}$ -отображениями.

Аналогично, $\mathcal{U}$ -отображениями будут многозначные отображения F_i^ε при $i = 1, \dots, k$. Рассмотрим пересечение

$$\left(\bigcap_{i=1}^k F_i^\varepsilon(x)\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^s \tilde{G}_j^{\varepsilon/2}(x)\right) = G(x).$$

Очевидно, что многозначное отображение G также является $\mathcal{U}$ -отображением и $G(x) \cap F_0(x) \neq \emptyset$. В силу теоремы 3 многозначное отображение $G \cap F_0$ имеет непрерывное сечение, которое и будет искомым.

4. Об одной теореме о неподвижной точке. Пусть Y – нормированное пространство, X – подмножество в Y .

Многозначное отображение $F: X \rightarrow K(Y)$ называется *вполне непрерывным*, если

- 1) F полунепрерывно сверху;
- 2) множество $\overline{F(B)}$ является компактным в Y для любого ограниченного множества $B \subset X$.

Точка $x_0 \in X$ называется *неподвижной точкой* многозначного отображения F , если $x_0 \in F(x_0)$.

Нам понадобятся следующие леммы.

Пусть E – банахово пространство, X – ограниченное замкнутое подмножество в E .

ЛЕММА 1. Пусть $F: X \rightarrow P(E)$ – многозначное отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) существует открытое множество U , содержащее X и многозначное отображение $\tilde{F}: U \rightarrow P(E)$, $\tilde{F}|_X = F$, такие, что $x \notin \tilde{F}(x)$ для любой точки $x \in (U \setminus X)$;
- 2) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $x_0 \in \tilde{F}(x)$ для любой точки $x \in U$;
- 3) для любой точки $x \in U$ множество $\tilde{F}(x)$ стягиваемо по лучам к точке x_0 .

Пусть $f: X \rightarrow E$ – вполне непрерывное сечение многозначного отображения F . Если существует вполне непрерывное сечение $\tilde{f}: U \rightarrow E$ многозначного отображения $\tilde{F}$, совпадающее с f на множестве X , то отображение f имеет неподвижную точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V \subset E$ – открытое множество такое, что $X \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Рассмотрим вполне непрерывное отображение $f_0: \overline{V} \rightarrow E$, $f_0(x) = x_0$. Тогда вращение $\gamma(\varphi_0, \partial V)$ векторного поля $\varphi_0 = i - f_0$ равно 1 (см., например, [12]). Рассмотрим отображение

$$\Phi(\lambda, x) = x - \lambda f_0(x) - (1 - \lambda)\tilde{f}(x), \quad \Phi: [0, 1] \times \overline{V} \rightarrow E.$$

Так как $\lambda f_0(x) + (1 - \lambda)\tilde{f}(x) \in \tilde{F}(x)$ для любого $\lambda \in [0, 1]$, то $\Phi(\lambda, x) \neq 0$ для любого $x \in \partial V$. Следовательно, Φ является гомотопией, соединяющей поля φ_0 и $\varphi = i - \tilde{f}$. Так как вращение вполне непрерывных векторных полей инвариантно при гомотопиях, то $\gamma(\varphi, \partial V) = 1$. Тогда отображение $\tilde{f}$ обязано иметь в множестве V неподвижную точку. Так как $\tilde{f}$ является сечением $\tilde{F}$, то неподвижная точка должна принадлежать множеству X . В силу того, что $\tilde{f}$ совпадает с f на X , получаем, что неподвижную точку имеет отображение f . Лемма доказана.

Пусть E – банахово пространство, X – выпуклое множество в E . Обозначим через

$$S_X(x) := \bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(X - x)$$

конус, порожденный $X - x$, и через

$$T_X(x) := \overline{\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(X - x)}$$

обозначим его замыкание. Множество $T_X(x)$ называется касательным конусом к X в точке x .

Таким образом, для любой точки $v \in S_X(x)$ существует $h > 0$ такое, что $x + hv \in X$. Нетрудно доказать, что множества $S_X(x)$ и $T_X(x)$ являются выпуклыми.

Рассмотрим многозначное отображение $T: X \rightarrow C_v(E)$, $T(x) = T_X(x)$.

ЛЕММА 2. Многозначное отображение T является полунепрерывным снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – произвольное открытое множество в E . Рассмотрим

$$T_{\Pi}^{-1}(V) = \{x \in X \mid T(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

и покажем, что это множество является открытым. Пусть точка $x_0 \in T_{\Pi}^{-1}(V)$, тогда существует точка $y_0 \in (T(x_0) \cap V)$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$ такое, что $U_{2\varepsilon}(y_0) \subset V$. В силу определений множеств $S_X(x_0)$ и $T_X(x_0)$ существует точка $z_0 \in (S_X(x_0) \cap U_{\varepsilon}(y_0))$. Следовательно, существуют точка $u \in X$ и число $h > 0$ такие, что $z_0 = (u - x_0)/h$. Пусть $x_1 \in X$, рассмотрим точку

$$z_1 = \frac{1}{h}(u - x_1) \in S_X(x_1).$$

Тогда

$$\|z_0 - z_1\| = \frac{1}{h}\|x_1 - x_0\|.$$

Если $\|x_0 - x_1\| < \delta$, где $0 < \delta < h\varepsilon$, то $S_X(x_1) \cap U_{\varepsilon}(y_0) \neq \emptyset$. Так как

$$(S_X(x_1) \cap U_{\varepsilon}(y_0)) \subset (T_X(x_1) \cap U_{2\varepsilon}(y_0)) \subset (T(x_1) \cap V),$$

то множество $T_{\Pi}^{-1}(V)$ содержит окрестность $U_{\delta}(x_0) \cap X$, что и доказывает открытость множества $T_{\Pi}^{-1}(V)$. Лемма доказана.

Заметим, что другими, более сложными, методами эта лемма была доказана в [4].

Пусть X – выпуклое подмножество гильбертова пространства H . Рассмотрим отображение $r: H \rightarrow X$, сопоставляющее каждой точке $x \in H$ ближайший к ней элемент из X , т.е.

$$\|x - r(x)\| = \min_{y \in X} \|x - y\|.$$

Хорошо известно, что такое отображение существует и непрерывно. Такое отображение называется *метрической проекцией*.

ЛЕММА 3. Для любой точки $x \in H$ ближайшим к ней элементом из множества $P(r(x)) = r(x) + T_X(r(x))$ является точка $r(x)$, т.е.

$$\|x - r(x)\| = \min_{w \in P(r(x))} \|x - w\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что точка $v \in T_X(x)$ в том и только том случае, если $(y - x, v) \leq 0$ для любого $y \in r^{-1}(x)$ (см., например, [1]).

Пусть $w \in P(r(x))$, тогда $w = r(x) + v$, где $v \in T_X(r(x))$. Оценим,

$$\|x - w\|^2 = (x - r(x) - v, x - r(x) - v) = \|x - r(x)\|^2 + \|v\|^2 - 2(x - r(x), v).$$

Очевидно, что минимум левой части достигается при $v = 0$, что и доказывает лемму.

Следствием этой леммы является следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Если точка $x \in U_{\varepsilon}(P(r(x)))$, то $x \in U_{\varepsilon}(X)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – выпуклое замкнутое ограниченное подмножество гильбертова пространства H . Пусть $F: X \rightarrow K\nu(H)$ – вполне непрерывное многозначное отображение такое, что для любой точки $x \in X$ пересечение $F(x) \cap (x + T_X(x)) \neq \emptyset$. Тогда F имеет неподвижную точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый этап. Пусть ε – произвольное положительное число. Рассмотрим полунепрерывное снизу многозначное отображение $F_\varepsilon: X \rightarrow C\nu(H)$, удовлетворяющее условиям теоремы 2, т.е. $F(x) \subset F_\varepsilon(x)$ для любого $x \in X$; график $\Gamma_X(F_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(\Gamma_X(F))$; $F_\varepsilon(X) \subset \overline{\text{co}}(F(X))$.

Рассмотрим также многозначное отображение $P: X \rightarrow C\nu(H)$, определенное условием, $P(x) = x + T_X(x)$. В силу леммы 2 отображение P является полунепрерывным снизу. Очевидно, что для любого $x \in X$ пересечение $F_\varepsilon(X) \cap P(x) \neq \emptyset$. Тогда в силу теоремы 4 существует однозначное непрерывное отображение $f_\varepsilon: X \rightarrow H$ такое, что:

- (i) $f_\varepsilon(x) \in F_\varepsilon(x)$ для любого $x \in X$;
- (ii) $f_\varepsilon(x) \in U_\varepsilon(P(x))$ для любого $x \in X$;
- (iii) отображение f_ε является вполне непрерывным.

Справедливость условия (iii) вытекает из того, что

$$f_\varepsilon(X) \subset F_\varepsilon(X) \subset \overline{\text{co}}(F(X)).$$

Пусть $r: H \rightarrow X$ – метрическая проекция. Рассмотрим непрерывное однозначное отображение $\tilde{f}_\varepsilon: H \rightarrow H$, определенное условием $\tilde{f}_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(r(x))$. Это отображение является вполне непрерывным и удовлетворяет условию

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) \in U_\varepsilon(P(r(x))).$$

Рассмотрим многозначное отображение $P_\varepsilon: H \rightarrow V(H)$, $P_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(P(r(x)))$. Нетрудно проверить, что многозначное отображение P_ε удовлетворяет условиям леммы 1 на множестве $\overline{U_\varepsilon(X)}$. Действительно, в силу леммы 4 отображение P_ε не имеет неподвижных точек вне $U_\varepsilon(X)$. В качестве точки x_0 можно взять любую точку множества X , звездность образов этого отображения вытекает из выпуклости множеств $\Phi_\varepsilon(x)$. Следовательно, отображение $\tilde{f}_\varepsilon$ имеет неподвижную точку x_ε и $x_\varepsilon \in U_\varepsilon(X)$.

Обозначим точку $r(x_\varepsilon) = y_0$, тогда эта точка удовлетворяет следующим условиям, $\|x_\varepsilon - y_0\| < \varepsilon$ и $f_\varepsilon(y_0) = x_\varepsilon$. Следовательно, $\|f_\varepsilon(y_0) - y_0\| < \varepsilon$.

С другой стороны, так как

$$\Gamma_X(f_\varepsilon) \subset \Gamma_X(F_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(\Gamma_X(F)),$$

то существуют точки $x_0 \in X$ и $z_0 \in F(x_0)$ такие, что $\|y_0 - x_0\| < \varepsilon$ и $\|f_\varepsilon(y_0) - z_0\| < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho(x_0, F(x_0)) &= \min_{y \in F(x_0)} \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - z_0\| \\ &\leq \|x_0 - y_0\| + \|y_0 - f_\varepsilon(y_0)\| + \|f_\varepsilon(y_0) - z_0\| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_0 \in X$ такая, что $\rho(x_0, F(x_0)) < 3\varepsilon$.

Второй этап. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, стремящуюся к 0. Каждому числу ε_n отвечает точка $x_n \in X$ такая, что $\rho(x_n, F(x_n)) < 3\varepsilon_n$. Рассмотрим последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_n \in F(x_n)$ и $\|x_n - y_n\| < 3\varepsilon_n$. Тогда последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{F(X)}$. В силу того, что многозначное отображение F является вполне непрерывным, без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к некоторой точке y_* . Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ также сходится к y_* . Так как множество X является замкнутым, то $y_* \in X$. Тогда из замкнутости графика многозначного отображения F вытекает, что $y_* \in F(y_*)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Остается открытым вопрос о справедливости теоремы 5 для произвольного банахова пространства.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Обэн Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
- [2] Ben-El-Mechaiekh H., Kryszewski W. Equilibria of set-valued maps on nonconvex domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349. № 10. P. 4159–4179.
- [3] Aubin J.-P., Cellina A. Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory. Grundlehren Math. Wiss. V. 264. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [4] Aubin J.-P., Frankowska H. Set-Valued Analysis. Boston: Birkhäuser, 1990.
- [5] Обэн Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988.
- [6] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // УМН. 1980. Т. 35. № 1. С. 59–126.
- [7] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Многозначные отображения // Итоги науки и техн. Матем. анализ. Т. 19. М.: ВИНТИ, 1982. С. 127–229.
- [8] Реповш Д., Семенов П. В. Теория Э. Майкла непрерывных селекций. Развитие и приложения // УМН. 1994. Т. 49, № 6. С. 151–188.
- [9] Repovš D., Semenov P. V. Continuous Selections of Multivalued Mappings. Mathematics and its Applications. V. 455. Dordrecht: Kluwer, 1998.
- [10] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986.
- [11] Michael E. Continuous selections, 1 // Ann. of Math. 1956. V. 63. № 2. P. 361–382.
- [12] Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

Воронежский государственный университет
E-mail: gelman@func.vsu.ru

Поступило
29.10.2002
Исправленный вариант
25.10.2004