Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Банару, О 6-мерных G_2 -подмногообразиях алгебры
Кэли, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 323–328

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:27:46

УДК 513.74

О 6-МЕРНЫХ G_2 -ПОДМНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

М. Б. Банару

Доказано, что 6-мерные почти эрмитовы подмногообразия общего типа алгебры октав являются минимальными тогда и только тогда, когда принадлежат классу G_2 Грея–Хервеллы. Названный факт является максимальным усилением известного результата Грея, доказавшего минимальность 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли.

Библиография: 20 названий.

1. Одним из самых значительных результатов, полученных выдающимся американским геометром Альфредом Греем, по праву является классификация почти эрмитовых структур по дифференциально-геометрическим инвариантам первого порядка. А. Грей (совместно со своим стажером испанцем Л. М. Хервеллой) разбил все возможные почти эрмитовы структуры на 16 классов и получил аналитические критерии принадлежности каждой конкретной структуры тому или иному классу [1].

К числу наименее изученных классов почти эрмитовых структур относится класс G_2 (или $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$). Едва ли не единственная значительная работа, посвященная G_2 -многообразиям, – это содержательная и оригинальная статья Хервеллы и Видаля [2]. Такое положение вещей по меньшей мере странно, ибо класс G_2 -многообразий включает в себя классы келеровых (K -), почти келеровых (AK -), специальных эрмитовых (SH -) и эрмитовых (H -) многообразий. Более того, G_2 -многообразия образуют минимальный класс, включающий в себя два важнейших класса почти эрмитовых многообразий – почти келеровых и эрмитовых, изучению которых посвящено огромное количество публикаций. Не вдаваясь в подробности столь обширной тематики, выделим классические работы [3]–[11], а также исследование [12], которое помимо новых результатов содержит систематизацию достижений предшественников.

В настоящей статье приводятся несколько результатов о 6-мерных G_2 -подмногообразиях алгебры октав. Эти результаты получены с использованием структурных уравнений подмногообразия, записанных на пространстве присоединенной g -структуры.

2. Почти эрмитово многообразие M^{2n} называется G_2 -многообразием [1], если для произвольных векторных полей $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^{2n})$ выполняется условие

$$G_{(XYZ)}\{\nabla_X(F)(Y, Z) - \nabla_{JX}(F)(JY, Z)\} = 0. \quad (1)$$

Здесь $F(X, Y) = \langle X, JY \rangle$ – фундаментальная (или келерова) форма многообразия M^{2n} , ∇ – риманова связность метрики. Грей и Хервелла установили [1], что равенство (1)

равносильно следующему условию, налагаемому на тензор Нейенхейса S почти эрмитова многообразия:

$$G_{(XYZ)} \langle S(X, Y), JZ \rangle = 0.$$

Пусть $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$ – алгебра Кэли. Как известно [5], в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$\begin{aligned} P_1(X, Y, Z) &= -X(\overline{Y}Z) + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y, \\ P_2(X, Y, Z) &= -(X\overline{Y})Z + \langle X, Y \rangle Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle Z, X \rangle Y. \end{aligned}$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \rightarrow \overline{X}$ – оператор сопряжения в $\mathbf{O}$ [13], определяемый равенством $\overline{X} = \text{Re } X - \text{Ve } X$. Сопряжение в алгебре октав можно определить и через сопряжение кватернионов. В самом деле, если $X = (\xi, \eta)$, то $\overline{X} = (\overline{\xi}, -\eta)$ [14].

Известно также, что любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных [5].

Если $M^6 \subset \mathbf{O}$ – 6-мерное ориентируемое подмногообразие, то на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, определяемая в каждой точке $t \in M^6$ соотношением

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\{e_1, e_2\}$ – произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 пространства в точке t , $X \in T_t(M^6)$ [5]. Напомним [8], что точка $t \in M^6$ называется *общей*, если

$$e_0 \notin T_t(M^6) \overline{\cap} L(e_0)^\perp,$$

где $e_0 \in \mathbf{O}$ – единица алгебры Кэли, $L(e_0)^\perp$ – ее ортогональное дополнение. Открытое подмногообразие, состоящее только из общих точек, называется подмногообразием общего типа [8]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются *подмногообразиями общего типа*.

3. В [9] В. Ф. Кириченко получил структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерных ориентируемых подмногообразиях алгебры октав:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_h^c] \omega_b \wedge \omega_c + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_h^c \omega_c \wedge \omega_b, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D_h^c] \omega_b \wedge \omega_c + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D_h^c \omega_c \wedge \omega^b, \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_h^{[k} D^g_{j]} + \sum_\varphi T_{a[k}^\varphi T_{j]b}^\varphi \right) \omega^k \wedge \omega^j, \end{aligned}$$

где $\{\omega^k\}$ – компоненты форм смещения, $\{\omega_j^k\}$ – компоненты форм римановой связности. Условимся, что здесь и далее $\varphi = 7, 8$; $a, b, c, d, g, h, f = 1, 2, 3$; $\hat{a} = a + 3$; $k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $i = \sqrt{-1}$. Как и в [9]–[11], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ – компоненты тензора Кронекера порядка три [15]; $\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$;

$$\begin{aligned} D^{ch} &= D_{\hat{c}\hat{h}}, & D_h^c &= D_{h\hat{c}}, & D^h_c &= D_{\hat{h}\hat{c}}, \\ D_{cj} &= \pm T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, & D_{\hat{c}\hat{j}} &= \pm T_{\hat{c}\hat{j}}^8 - iT_{\hat{c}\hat{j}}^7, \end{aligned}$$

где T_{kj}^φ – компоненты конфигурационного тензора (в терминологии А. Грея [4], или второй основной формы погружения подмногообразия M^6 [16]).

Условие Грея–Хервеллы (1) принадлежности произвольной почти эрмитовой структуры классу $G_2 (= W_2 \oplus W_3 \oplus W_4)$ равносильно следующему условию, налагаемому на структурные тензоры Кириченко [17]:

$$B^{abc} + B^{bca} + B^{cab} = 0, \quad B_{abc} + B_{bca} + B_{cab} = 0.$$

Как известно [18], компоненты структурных тензоров Кириченко связаны с компонентами ∇J соотношениями

$$B^{abc} = \frac{i}{2} J_{[\hat{b}, \hat{c}]}^a, \quad B_{abc} = -\frac{i}{2} J_{[\hat{b}, \hat{c}]}^{\hat{a}}.$$

Воспользуемся выражениями для структурных тензоров Кириченко 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли [18]:

$$B^{abc} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_h^c], \quad B_{abc} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D_h^c].$$

Из последних равенств вытекает следующий критерий принадлежности 6-мерного почти эрмитова подмногообразия алгебры октав классу G_2 -многообразий:

$$\varepsilon^{ah[b} D_h^c] + \varepsilon^{bh[c} D_h^a] + \varepsilon^{ch[a} D_h^b] = 0, \quad \varepsilon_{ah[b} D_h^c] + \varepsilon_{bh[c} D_h^a] + \varepsilon_{ch[a} D_h^b] = 0. \quad (2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Условие (2) равносильно тому, что $\text{tr } D_{d\hat{a}} = 0$ (т.е. след матрицы $(D_{d\hat{a}})$ нулевой).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что каждое равенство из условия (2) получается комплексным сопряжением другого. Поэтому достаточно провести такие рассуждения.

1. Пусть имеет место (2):

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ah[b} D_h^c] + \varepsilon^{bh[c} D_h^a] + \varepsilon^{ch[a} D_h^b] &= 0 \\ \Leftrightarrow \varepsilon^{ahb} D_h^c - \varepsilon^{ahc} D_h^b + \varepsilon^{bhc} D_h^a - \varepsilon^{bha} D_h^c + \varepsilon^{cha} D_h^b - \varepsilon^{chb} D_h^a &= 0 \\ \Leftrightarrow \varepsilon^{ahb} D_{h\hat{c}} - \varepsilon^{ahc} D_{h\hat{b}} + \varepsilon^{bhc} D_{h\hat{a}} - \varepsilon^{bha} D_{h\hat{c}} + \varepsilon^{cha} D_{h\hat{b}} - \varepsilon^{chb} D_{h\hat{a}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\varepsilon^{bhc} - \varepsilon^{chb}) D_{h\hat{a}} + (\varepsilon^{cha} - \varepsilon^{ahc}) D_{h\hat{b}} + (\varepsilon^{ahb} - \varepsilon^{bha}) D_{h\hat{c}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \varepsilon^{bhc} D_{h\hat{a}} + \varepsilon^{cha} D_{h\hat{b}} + \varepsilon^{ahb} D_{h\hat{c}} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Свернем обе части равенства (3) с ε_{cdf} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cdf} \varepsilon^{bhc} D_{h\hat{a}} + \varepsilon_{cdf} \varepsilon^{cha} D_{h\hat{b}} + \varepsilon_{cdf} \varepsilon^{ahb} D_{h\hat{c}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \delta_{df}^{bh} D_{h\hat{a}} - \delta_{df}^{ah} D_{h\hat{b}} + \varepsilon_{cdf} \varepsilon^{ahb} D_{h\hat{c}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\delta_d^b \delta_f^h - \delta_f^b \delta_d^h) D_{h\hat{a}} - (\delta_d^a \delta_f^h - \delta_f^a \delta_d^h) D_{h\hat{b}} + \varepsilon_{cdf} \varepsilon^{ahb} D_{h\hat{c}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \delta_d^b D_{f\hat{a}} - \delta_f^b D_{d\hat{a}} - \delta_d^a D_{f\hat{b}} + \delta_f^a D_{d\hat{b}} + \varepsilon_{cdf} \varepsilon^{ahb} D_{h\hat{c}} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(bd) : \quad & 3D_{f\hat{a}} - D_{f\hat{a}} - D_{f\hat{a}} + \delta_f^a \operatorname{tr} D_{d\hat{a}} + \varepsilon_{cdf} \varepsilon^{ahb} D_{h\hat{c}} = 0 \\
& \Leftrightarrow D_{f\hat{a}} + \delta_f^a \operatorname{tr} D_{d\hat{a}} - \delta_{cf}^{ah} D_{h\hat{c}} = 0 \\
& \Leftrightarrow D_{f\hat{a}} + \delta_f^a \operatorname{tr} D_{d\hat{a}} - (\delta_c^a \delta_f^h - \delta_f^a \delta_c^h) D_{h\hat{c}} = 0 \\
& \Leftrightarrow D_{f\hat{a}} + \delta_f^a \operatorname{tr} D_{d\hat{a}} - \delta_c^a D_{f\hat{c}} + \delta_f^a \operatorname{tr} D_{d\hat{a}} = 0 \\
& \Leftrightarrow D_{f\hat{a}} + \delta_f^a \operatorname{tr} D_{d\hat{a}} - D_{f\hat{a}} + \delta_f^a \operatorname{tr} D_{d\hat{a}} = 0 \\
& \Leftrightarrow \delta_f^a \operatorname{tr} D_{d\hat{a}} = 0, \\
(af) : \quad & 3 \operatorname{tr} D_{d\hat{a}} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr} D_{d\hat{a}} = 0.
\end{aligned}$$

2. Обратно, пусть $\operatorname{tr} D_{d\hat{a}} = 0$. Рассмотрим левую часть равенства (3):

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{bhc} D_{h\hat{a}} + \varepsilon^{cha} D_{h\hat{b}} + \varepsilon^{ahb} D_{h\hat{c}} &= \varepsilon^{b1c} D_{1\hat{a}} + \varepsilon^{b2c} D_{2\hat{a}} + \varepsilon^{b3c} D_{3\hat{a}} \\
&+ \varepsilon^{c1a} D_{1\hat{b}} + \varepsilon^{c2a} D_{2\hat{b}} + \varepsilon^{c3a} D_{3\hat{b}} \\
&+ \varepsilon^{a1b} D_{1\hat{c}} + \varepsilon^{a2b} D_{2\hat{c}} + \varepsilon^{a3b} D_{3\hat{c}} \\
&= 3 \operatorname{tr} D_{d\hat{a}} = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку $(3) \Leftrightarrow (2)$, и учитывая замечание, предваряющее доказательство, делаем вывод

$$\operatorname{tr} D_{d\hat{a}} = 0 \Leftrightarrow (2).$$

Итак, условия (2) и $\operatorname{tr} D_{d\hat{a}} = 0$ равносильны, что и требовалось доказать.

4. Примечательно, что равенство $\operatorname{tr} D_{d\hat{a}} = 0$ является критерием принадлежности 6-мерного почти эрмитова подмногообразия алгебры Кэли классу $W_2 \oplus W_3$ -многообразий [17], [18]. Напомним, что почти эрмитовы многообразия класса $W_2 \oplus W_3$ определяются условием [1]

$$\delta F = G_{(XYZ)} \langle S(X, Y), JZ \rangle = 0,$$

где δ – оператор кодифференцирования. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Всякое 6-мерное $G2$ -подмногообразие алгебры Кэли является многообразием класса $W_2 \oplus W_3$.*

Поскольку все почти эрмитовы структуры класса $W_2 \oplus W_3$ – полукелеровы (или семикелеровы [1], SK -) структуры, получаем важное

СЛЕДСТВИЕ 1. *Всякое 6-мерное $G2$ -подмногообразие алгебры Кэли является полукелеровым многообразием.*

Заметим, что эрмитовы (H -) структуры на 6-мерных подмногообразиях алгебры октав могут быть представлены лишь структурами, принадлежащими классу $H \cap SK$:

$$H = W_3 \oplus W_4, \quad SK = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3, \quad H \cap SK = W_3.$$

Из этого вытекает интересное

СЛЕДСТВИЕ 2. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли является специальным эрмитовым (SH -, W_3 -) многообразием.*

Аналогичные рассуждения приведут нас к справедливости еще двух утверждений.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Всякое 6-мерное $W_2 \oplus W_4$ -подмногообразие алгебры Кэли является почти келеровым (АК-)многообразием.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Всякое 6-мерное локально конформно келерово подмногообразие алгебры Кэли является келеровым многообразием.*

5. Известно [16], что критерием минимальности подмногообразия риманова многообразия является следующее соотношение, налагаемое на метрику g и конфигурационный тензор подмногообразия:

$$g^{kj} T_{kj}^\varphi = 0.$$

Воспользовавшись значениями спектра метрического тензора [19]

$$g_{ab} = g^{\hat{a}\hat{b}} = 0, \quad g_{a\hat{b}} = g^{\hat{a}b} = \delta_a^b, \quad g_{\hat{a}b} = g^{ab} = \delta_b^a, \quad g_{\hat{a}\hat{b}} = g^{ab} = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} g^{kj} T_{kj}^\varphi &= g^{ab} T_{ab}^\varphi + g^{\hat{a}\hat{b}} T_{\hat{a}\hat{b}}^\varphi + g^{a\hat{b}} T_{a\hat{b}}^\varphi + g^{\hat{a}b} T_{\hat{a}b}^\varphi \\ &= \delta_a^b T_{ab}^\varphi + \delta_b^a T_{ab}^\varphi = 2 \operatorname{tr} T_{ab}^\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку $D_{a\hat{b}} = \pm T_{a\hat{b}}^8 + iT_{a\hat{b}}^7$, то

$$\operatorname{tr} D_{a\hat{b}} = \pm \operatorname{tr} T_{a\hat{b}}^8 + i \operatorname{tr} T_{a\hat{b}}^7.$$

1. Если $\operatorname{tr} T_{a\hat{b}}^\varphi = 0$, то $\operatorname{tr} D_{a\hat{b}} = 0 + 0 = 0$.

2. Обратно, пусть $\operatorname{tr} D_{a\hat{b}} = 0$. Тогда и $\operatorname{tr} D_{\hat{a}b} = 0$. Значит,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \pm \operatorname{tr} T_{a\hat{b}}^8 + i \operatorname{tr} T_{a\hat{b}}^7 = 0, \\ \pm \operatorname{tr} T_{\hat{a}b}^8 - i \operatorname{tr} T_{\hat{a}b}^7 = 0, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \pm \operatorname{tr} T_{a\hat{b}}^8 + i \operatorname{tr} T_{a\hat{b}}^7 = 0, \\ \pm \operatorname{tr} T_{\hat{a}b}^8 - i \operatorname{tr} T_{\hat{a}b}^7 = 0, \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tr} T_{a\hat{b}}^8 = 0, \\ \operatorname{tr} T_{a\hat{b}}^7 = 0, \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tr} T_{a\hat{b}}^\varphi = 0. \end{aligned}$$

Итак, $\operatorname{tr} D_{a\hat{b}} = 0 \Rightarrow \operatorname{tr} T_{a\hat{b}}^\varphi = 0$.

В силу (4) имеем

$$g^{kj} T_{kj}^\varphi = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr} D_{a\hat{b}} = 0.$$

Поскольку последнее условие (в силу доказанного в п. 3 предложения) есть критерий принадлежности 6-мерного почти эрмитова подмногообразия классу алгебры октав G_2 , получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *6-мерное почти эрмитово подмногообразие алгебры Кэли является минимальным тогда и только тогда, когда принадлежит классу G_2 .*

Так как минимальное подмногообразие евклидова пространства не может быть компактным [18], то справедливо

СЛЕДСТВИЕ. *Всякое 6-мерное G_2 -подмногообразие алгебры Кэли некомпактно.*

Отметим, что теорема 2 усиливает результат Грея [20], доказавшего минимальность 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав.

Автор признателен рецензенту за ценные замечания, которые способствовали существенному улучшению работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // *Ann. Mat. Pure Appl.* 1980. V. 123. № 4. P. 35–58.
- [2] Hervella L. M., Vidal E. Nouvelles géométries pseudo-kähleriennes G_1 et G_2 // *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A.* 1976. V. 283. P. 115–118.
- [3] Koto S. Some theorems on almost Kählerian spaces // *J. Math. Soc. Japan.* 1960. № 12. P. 422–433.
- [4] Gray A. Some examples of almost Hermitian manifolds // *Illinois J. Math.* 1969. № 10. P. 353–366.
- [5] Gray A. Vector cross product on manifolds // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1969. V. 141. P. 465–504.
- [6] Tanno S. The automorphism groups of almost Hermitian manifolds // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1969. V. 137. P. 269–275.
- [7] Vaisman I. On locally conformal almost Kählerian manifolds // *Israel J. Math.* 1976. V. 24. № 3, 4. P. 338–351.
- [8] Кириченко В. Ф. Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // *Вестн. МГУ.* 1973. № 3. С. 70–75.
- [9] Кириченко В. Ф. Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // *Изв. вузов. Матем.* 1980. № 8. С. 32–38.
- [10] Кириченко В. Ф. Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // *Укр. геом. сб.* 1982. С. 60–69.
- [11] Кириченко В. Ф. Эрмитова геометрия шестимерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // *Вестн. МГУ.* 1994. № 3. С. 6–13.
- [12] Третьякова И. В. Дифференциальная геометрия почти келеровых многообразий. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МПГУ, 2000.
- [13] Фрейденгаль Г. Октавы, особые группы и октавная геометрия // *Математика.* 1957. Т. 1. № 1. С. 117–153.
- [14] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1988.
- [15] Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономий. М.: ИЛ, 1960.
- [16] Kobayasi III., Nomidzu K. Основы дифференциальной геометрии. Т. II. М.: Наука, 1981.
- [17] Банару М. Б. О почти эрмитовых структурах, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных ориентируемых подмногообразиях алгебры октав // *Полианалитические функции.* Смоленск, 1997. С. 113–117.
- [18] Банару М. Б. Классы Грея–Хервеллы почти эрмитовых структур на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // *Науч. тр. МПГУ им. В. И. Ленина.* 1994. С. 36–38.
- [19] Банару М. Б. О спектрах важнейших тензоров 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // *Новейшие проблемы теории поля.* Казань: КГУ–КЦ РАН, 2000. С. 18–22.
- [20] Gray A. Minimal varieties and almost Hermitian submanifolds // *Michigan J. Math.* 1965. V. 12. P. 273–287.

Смоленский государственный университет
 E-mail: banaru@keytown.com

Поступило
 01.06.2001
 Исправленный вариант
 15.05.2002