Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Гомотопические теории алгебр над операдами, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 2, 278–285

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2650>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:09:15

УДК 512

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ АЛГЕБР НАД ОПЕРАДАМИ

В. А. Смирнов

В работе определяются гомотопические теории алгебр над операдами и, в частности, над операдами “ n -мерных кубиков”. Построены спектральные последовательности и проведены вычисления соответствующих гомотопических групп.

Библиография: 8 названий.

Имеются две классические теории гомотопий:

- 1) гомотопическая теория топологических пространств, в которой вычисление гомотопических групп сфер является одной из труднейших проблем алгебраической топологии;
- 2) рациональная гомотопическая теория, в которой вычисление гомотопических групп сфер – довольно простая задача.

В работе [1] было показано, что рациональная гомотопическая теория эквивалентна гомотопической теории коммутативных DGA -алгебр. В работах [2], [3] было показано, что сингулярный цепной комплекс $C_*(X)$ (коцепной комплекс $C^*(X)$) топологического пространства X имеет естественную структуру E_∞ -коалгебры (E_∞ -алгебры) и гомотопическая теория топологических пространств эквивалентна гомотопической теории E_∞ -коалгебр (E_∞ -алгебр).

Естественный вопрос состоит в определении промежуточных гомотопических теорий между гомотопическими теориями DGA -алгебр и E_∞ -алгебр, а также в вычислении гомотопических групп сфер в этих теориях.

Здесь мы определим гомотопические теории алгебр над операдами и, в частности, над операдами “ n -мерных кубиков” E_n , $1 \leq n \leq \infty$ (см. [4]). Будут построены спектральные последовательности и проведены вычисления соответствующих гомотопических групп.

Напомним, что семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$ цепных комплексов $\mathcal{E}(j)$, на которых действуют симметрические группы Σ_j , называется *операдой*, если заданы операции

$$\gamma: \mathcal{E}(k) \otimes \mathcal{E}(j_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}(j_k) \rightarrow \mathcal{E}(j_1 + \cdots + j_k),$$

согласованные с действиями симметрических групп и удовлетворяющие некоторым соотношениям ассоциативности [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00482.

Цепной комплекс X называется *алгеброй* (соответственно *коалгеброй*) над операдой $\mathcal{E}$, или просто $\mathcal{E}$ -*алгеброй* (соответственно $\mathcal{E}$ -*коалгеброй*), если заданы операции

$$\mu(j): \mathcal{E}(j) \otimes X^{\otimes j} \rightarrow X \quad (\text{соответственно } \tau(j): X \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}(j); X^{\otimes j})),$$

согласованные с действиями симметрических групп и удовлетворяющие некоторым соотношениям ассоциативности [2].

Обозначим сумму

$$\sum_j \mathcal{E}(j) \otimes_{\Sigma_j} X^{\otimes j}$$

через $\underline{\mathcal{E}}(X)$. Соответствие $X \mapsto \underline{\mathcal{E}}(X)$ определяет функтор в категории цепных комплексов. Структура операдой на $\mathcal{E}$ определяет естественное преобразование функторов $\gamma: \underline{\mathcal{E}} \circ \underline{\mathcal{E}} \rightarrow \underline{\mathcal{E}}$, задающее на $\underline{\mathcal{E}}$ структуру монады [3]. При этом цепной комплекс X является алгеброй над операдой $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда он является алгеброй над монадой $\underline{\mathcal{E}}$.

Двойственным образом, обозначим

$$\overline{\mathcal{E}}(X) = \prod_j \text{Hom}_{\Sigma_j}(\mathcal{E}(j); X^{\otimes j}).$$

Соответствие $X \mapsto \overline{\mathcal{E}}(X)$ определяет комонаду в категории цепных комплексов. При этом цепной комплекс X является коалгеброй над операдой $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда он является коалгеброй над комонадой $\overline{\mathcal{E}}$.

Заметим, что операдой и алгебры над операдами могут быть определены и в категории топологических пространств. В этом случае вместо тензорного произведения $\otimes$ в определении операций γ нужно написать обычное декартово произведение $\times$ топологических пространств [3].

Рассмотрим некоторые примеры операд и алгебр (коалгебр) над операдами.

ПРИМЕР 1. Операда $E_0 = \{E_0(j)\}$, где $E_0(j)$ – свободный модуль с одной нуль-мерной образующей $e(j)$ и тривиальным действием симметрических групп Σ_j . Таким образом, $E_0(j) \cong R$.

Операция $\gamma: E_0 \times E_0 \rightarrow E_0$ задается формулой

$$\gamma(e(k) \otimes e(j_1) \otimes \cdots \otimes e(j_k)) = e(j_1 + \cdots + j_k).$$

Легко проверяется, что так определенная операция ассоциативна и согласована с действиями симметрических групп.

Алгебрами (коалгебрами) над E_0 являются просто коммутативные и ассоциативные алгебры (коалгебры).

ПРИМЕР 2. Операда $A = \{A(j)\}$, где $A(j)$ – свободный Σ_j -модуль с одной нуль-мерной образующей $a(j)$, т.е. $A(j) \cong R(\Sigma_j)$. Операция $\gamma: A \times A \rightarrow A$ задается формулой

$$\gamma(a(k) \otimes a(j_1) \otimes \cdots \otimes a(j_k)) = a(j_1 + \cdots + j_k).$$

Легко проверяется, что выполняются требуемые соотношения.

Алгебрами (коалгебрами) над операдой A являются просто ассоциативные алгебры (коалгебры).

ПРИМЕР 3. Для произвольного цепного комплекса X определим операды $\mathcal{E}_X, \mathcal{E}^X$, положив

$$\mathcal{E}_X(j) = \text{Hom}(X^{\otimes j}; X), \quad \mathcal{E}^X(j) = \text{Hom}(X; X^{\otimes j}).$$

Действия симметрических групп задаются перестановками сомножителей в $X^{\otimes j}$, а структура операды определяется формулами

$$\begin{aligned} \gamma_X(f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) &= f \circ (g_1 \otimes \cdots \otimes g_k), \quad f \in \mathcal{E}_X(k), \quad g_i \in \mathcal{E}_X(j_i); \\ \gamma^X(f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) &= (g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) \circ f, \quad f \in \mathcal{E}^X(k), \quad g_i \in \mathcal{E}^X(j_i). \end{aligned}$$

Цепной комплекс X является алгеброй (соответственно коалгеброй) над операдой $\mathcal{E}$ в том и только том случае, если имеет место отображение операд $\xi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_X$ (соответственно $\xi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^X$).

ПРИМЕР 4. Для $n \geq 0$ обозначим через Δ^n нормализованный цепной комплекс стандартного n -мерного симплекса. Тогда $\Delta^* = \{\Delta^n\}$ является косимплициальным объектом в категории цепных комплексов.

Обозначим реализацию косимплициального объекта $(\Delta^*)^{\otimes j} = \Delta^* \otimes \cdots \otimes \Delta^*$ через $E^\Delta(j)$, т.е.

$$E^\Delta(j) = \text{Hom}(\Delta^*; (\Delta^*)^{\otimes j}),$$

где Hom рассматривается в категории косимплициальных объектов.

Семейство $E^\Delta = \{E^\Delta(j)\}$ является операдой, для которой действия симметрических групп и структура операды определяются аналогично соответствующим структурам определенной выше операды $\mathcal{E}^X$, где вместо X берется Δ^* .

Заметим, что так как цепные комплексы Δ^n ацикличны, то также ацикличной будет и операда E^Δ .

В работе [3] было показано, что на сингулярном цепном комплексе $C_*(X)$ топологического пространства X имеет место естественная структура E^Δ -коалгебры. Двойственным образом, на коцепном комплексе $C^*(X)$ имеется естественная структура E^Δ -алгебры.

ПРИМЕР 5. Основными примерами операд в категории топологических пространств являются операды n -мерных кубиков $\mathcal{E}_n$, введенные Бордманом и Фогтом [5] и изученные Мэем [4]. В частности, им было показано, что всякое n -кратное пространство петель $\Omega^n X$ является алгеброй над операдой $\mathcal{E}_n$.

Имеют место вложения $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_{n+1}$, прямой предел относительно которых обозначается $\mathcal{E}_\infty$. Операда $\mathcal{E}_\infty$ является ацикличной операдой со свободным действием симметрических групп.

Всякая ацикличная операда со свободным действием симметрических групп называется E_∞ -операдой. Всякая алгебра (коалгебра) над E_∞ -операдой называется E_∞ -алгеброй (E_∞ -коалгеброй).

ПРИМЕР 6. Легко видеть, что если $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}$ – операда в категории топологических пространств, то семейство цепных комплексов $C_*(\mathcal{E}) = \{C_*(\mathcal{E}(j))\}$ будет операдой в категории цепных комплексов. Если $\mathcal{E}$ является E_∞ -операдой, то $C_*(\mathcal{E})$ будет E_∞ -операдой.

Покажем, что сингулярный цепной комплекс $C_*(X)$ (соответственно сингулярный ко-цепной комплекс $C^*(X)$) является E_∞ -коалгеброй (соответственно E_∞ -алгеброй).

Пусть $E - E_\infty$ -операда. Рассмотрим операду $E^\Delta \otimes E$. Она является E_∞ -операдой, и имеет место проекция операд $p: E^\Delta \otimes E \rightarrow E^\Delta$. Тогда композиция

$$E^\Delta \otimes E \xrightarrow{p} E^\Delta \xrightarrow{\xi} \mathcal{E}^{C_*(X)} \quad (\text{соответственно } E^\Delta \otimes E \xrightarrow{p} E^\Delta \xrightarrow{\xi} \mathcal{E}^{C^*(X)})$$

будет задавать на $C_*(X)$ (соответственно $C^*(X)$) структуру $E^\Delta \otimes E$ -коалгебры (соответственно $E^\Delta \otimes E$ -алгебры).

Обозначим операду $E^\Delta \otimes C_*(\mathcal{E}_n)$ просто E_n , и будем называть ее также операдой n -мерных кубиков. Тогда $C_*(X)$ можно считать E_n -коалгеброй. Двойственным образом $C^*(X)$ можно считать E_n -алгеброй.

Нам потребуется следующее общее свойство алгебр (коалгебр) над операдами.

ТЕОРЕМА 1. *Если $X_* = \{X_n\}$ – симплициальный объект в категории алгебр над операдой $\mathcal{E}$, то его реализация $|X_*|$ также будет $\mathcal{E}$ -алгеброй. Двойственным образом, если $X^* = \{X^n\}$ – косимплициальный объект в категории коалгебр над операдой $\mathcal{E}$, то его реализация $|X^*|$ также будет $\mathcal{E}$ -коалгеброй.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X_* = \{X_n\}$ – симплициальный объект в категории $\mathcal{E}$ -алгебр, $\mu_n: \mathcal{E}(X_n) \rightarrow X_n$ – структура $\mathcal{E}$ -алгебры на X_n . Отображения Эйленберга–Зильбера

$$\psi: |X_*| \otimes \cdots \otimes |X_*| \rightarrow |X_* \otimes \cdots \otimes X_*|$$

перестановочны с действиями симметрических групп и, следовательно, индуцируют отображения

$$\psi: \mathcal{E}(j) \otimes_{\Sigma_j} |X_*|^{\otimes j} \rightarrow |\mathcal{E}(j) \otimes_{\Sigma_j} X_*^{\otimes j}|.$$

Эти отображения определяют отображение $\psi: \mathcal{E}(|X_*|) \rightarrow |\mathcal{E}(X_*)|$, и искомое отображение $\mathcal{E}(|X_*|) \rightarrow |X_*|$ задается как композиция

$$\mathcal{E}(|X_*|) \xrightarrow{\psi} |\mathcal{E}(X_*)| \xrightarrow{\mu_*} |X_*|.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Реализация $B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X)$ симплициальной резольвенты*

$$B_*(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X): \mathcal{E}(X) \leftarrow \mathcal{E}^2(X) \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{E}^n(X) \leftarrow \cdots$$

над $\mathcal{E}$ -алгеброй X является $\mathcal{E}$ -алгеброй. Причем аугментация $\eta: B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X) \rightarrow X$ является цепной эквивалентностью. Двойственным образом, реализация $F(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X)$ косимплициальной резольвенты

$$F^*(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X): \overline{\mathcal{E}}(X) \rightarrow \overline{\mathcal{E}}^2(X) \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{\mathcal{E}}^n(X) \rightarrow \cdots$$

над $\mathcal{E}$ -коалгеброй X является $\mathcal{E}$ -коалгеброй. Причем аугментация $\xi: X \rightarrow F(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X)$ является цепной эквивалентностью.

Перейдем теперь к теориям гомотопий. Пусть $\mathcal{E}$ – операда, для которой задано отображение операд $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^\Delta$. Это означает, что цепные комплексы Δ^n обладают структурами $\mathcal{E}$ -коалгебр, согласованными с операторами кограней и ковырождения. Это требование довольно естественно для гомотопических теорий. В частности, оно позволяет определить в них гомотопические группы.

Обозначим $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ категорию, объектами которой являются $\mathcal{E}$ -алгебры, а морфизмами – отображения $\mathcal{E}$ -алгебр.

Категория $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ является замкнутой модельной категорией [6] в которой расслоения – сюръективные отображения $p: X \rightarrow Y$; слабые эквивалентности – отображения, индуцирующие изоморфизм гомологий; корасслоения – отображения $i: A \rightarrow B$, удовлетворяющие свойству левого поднятия относительно тривиальных расслоений. Это означает, что для любой коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

существует диагональное отображение $f: B \rightarrow X$, сохраняющее коммутативность.

Двойственным образом, обозначим через $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ категорию, объектами которой являются $\mathcal{E}$ -коалгебры, а морфизмами – отображения $\mathcal{E}$ -коалгебр.

Категория $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ является замкнутой модельной категорией, в которой корасслоения – инъективные отображения $i: A \rightarrow B$; слабые эквивалентности – отображения, индуцирующие изоморфизм гомологий; расслоения – отображения $p: X \rightarrow Y$, удовлетворяющие свойству правого поднятия относительно тривиальных корасслоений. Это означает, что для любой рассмотренной выше коммутативной диаграммы существует диагональное отображение $f: B \rightarrow X$, сохраняющее коммутативность.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого тривиального расслоения $p: X \rightarrow Y$ в категории $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ существует отображение $\mathcal{E}$ -алгебр $\tilde{q}: B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, Y) \rightarrow X$ такое, что*

$$p \circ \tilde{q} = \eta: B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, Y) \rightarrow Y.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p: X \rightarrow Y$ – тривиальное расслоение. Это означает, что p сюръективно и индуцирует изоморфизм гомологий. Следовательно, существует цепное отображение $q: Y \rightarrow X$ и цепная гомотопия $h: X \rightarrow X$ такие, что

$$p \circ q = \text{Id}, \quad d(h) = q \circ p - \text{Id}, \quad p \circ h = 0, \quad h \circ q = 0, \quad h \circ h = 0.$$

Построим отображение $\mathcal{E}$ -алгебр $\tilde{q}: B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, Y) \rightarrow X$.

Легко видеть, что задание такого отображения эквивалентно заданию семейства отображений $\mathcal{E}$ -алгебр $q^n: \mathcal{E}^{n+1}(Y) \rightarrow \text{Hom}(\Delta^n; X)$, для которого коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^n(Y) & \xrightarrow{q^{n-1}} & \text{Hom}(\Delta^{n-1}; X) \\ s_i \downarrow \uparrow d_i & & s_i \downarrow \uparrow d_i \\ \mathcal{E}^{n+1}(Y) & \xrightarrow{q^n} & \text{Hom}(\Delta^n; X) \end{array}.$$

Так как задание отображения $\mathcal{E}$ -алгебр $q^n: \mathcal{E}^{n+1}(Y) \rightarrow \text{Hom}(\Delta^n; X)$ эквивалентно заданию цепного отображения $\tilde{q}^n: \mathcal{E}^n(Y) \rightarrow \text{Hom}(\Delta^n; X)$, то задание отображения $\mathcal{E}$ -алгебр $\tilde{q}: B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, Y) \rightarrow X$ эквивалентно заданию семейства цепных отображений $\tilde{q}^n: \mathcal{E}^n(A) \rightarrow \text{Hom}(\Delta^n; X)$, для которых соответствующие отображения $\mathcal{E}$ -алгебр f^n дают приведенные выше коммутативные диаграммы.

Положим $\tilde{q}^0 = q: Y \rightarrow X$ и $\tilde{q}^n = h \circ \mu \circ \mathcal{E}(h) \circ \mathcal{E}(\mu) \circ \dots \circ \mathcal{E}^{n-1}(\mu) \circ \mathcal{E}^n(q)$. Прямые вычисления показывают, что выполняются требуемые соотношения.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть A – $\mathcal{E}$ -алгебра. Тогда $\mathcal{E}$ -алгебра $B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, A)$ является кораслоенным объектом в категории $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$.

Действительно, пусть $p: X \rightarrow Y$ – тривиальное расслоение, $f: B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, A) \rightarrow Y$ – отображение $\mathcal{E}$ -алгебр. Построим отображение $\mathcal{E}$ -алгебр $\tilde{f}: B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, A) \rightarrow X$, для которого $p \circ \tilde{f} = f$.

В силу доказанной теоремы мы имеем отображение $\mathcal{E}$ -алгебр $\tilde{q}: B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, Y) \rightarrow X$. Так как $\eta: B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, A) \rightarrow A$ – тривиальное расслоение, то существует отображение $\mathcal{E}$ -алгебр $\psi: B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, A) \rightarrow B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, A))$. Определим $\tilde{q}$ как композицию

$$B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, A) \xrightarrow{\psi} B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, A)) \xrightarrow{B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, f)} B(\mathcal{E}, \mathcal{E}, Y) \xrightarrow{\tilde{q}} X.$$

Двойственным образом, имеем

ТЕОРЕМА 2'. Для любого тривиального корасслоения $i: A \rightarrow B$ в категории $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ существует отображение $\mathcal{E}$ -коалгебр $\tilde{j}: B \rightarrow F(\mathcal{E}, \mathcal{E}, A)$, для которого

$$\tilde{j} \circ i = \xi: A \rightarrow F(\mathcal{E}, \mathcal{E}, A).$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – $\mathcal{E}$ -коалгебра. Тогда $\mathcal{E}$ -коалгебра $F(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X)$ является расслоенным объектом в категории $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$.

Рассмотрим категорию $\widetilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{E}}$, объектами в которой являются $\mathcal{E}$ -коалгебры, а морфизмами $f: X \rightarrow Y$ – отображения $\mathcal{E}$ -коалгебр $\tilde{f}: X \rightarrow F(\mathcal{E}, \mathcal{E}, Y)$.

Два морфизма $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ категории $\widetilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{E}}$ будем называть *гомотопными* и обозначать $f \simeq g$, если существует морфизм $h: \Delta^1 \otimes X \rightarrow Y$, называемый *гомотопией*, такой, что

$$h|_{0 \otimes X} = f_0, \quad h|_{1 \otimes X} = f_1.$$

Обозначим $Ho\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ локализацию категории $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ по отношению к слабым эквивалентностям, т.е. морфизмам, индуцирующим изоморфизмы гомологий.

Пусть $\pi\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ обозначает категорию, объектами которой являются $\mathcal{E}$ -коалгебры, а морфизмами гомотопические классы морфизмов категории $\widetilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{E}}$. Общая теория гомотопий в категориях [6] дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Имеет место эквивалентность категорий

$$Ho\mathcal{K}_{\mathcal{E}} \cong \pi\mathcal{K}_{\mathcal{E}}.$$

Двойственным образом, для $\mathcal{E}$ -алгебр имеем

ТЕОРЕМА 3'. Имеет место эквивалентность категорий

$$Ho\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \cong \pi\mathcal{A}_{\mathcal{E}}.$$

Рассмотрим теперь проблему вычисления гомотопических групп $\mathcal{E}$ -коалгебр. Так как цепные комплексы Δ^n стандартных n -мерных симплексов являются $\mathcal{E}$ -коалгебрами, то цепные комплексы S^n n -мерных сфер также будут $\mathcal{E}$ -коалгебрами.

Определим гомотопические группы $\pi_n^{\mathcal{E}}(X)$ $\mathcal{E}$ -коалгебры X , положив $\pi_n^{\mathcal{E}}(X) = [S^n; F(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X)]$ – множество гомотопических классов отображений $\mathcal{E}$ -коалгебр $f: S^n \rightarrow F(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X)$.

ТЕОРЕМА 4. Для произвольной $\mathcal{E}$ -коалгебры X имеет место спектральная последовательность гомотопических групп $\pi_*^{\mathcal{E}}(X)$, член E^1 которой изоморфен кобар конструкции $F(\mathcal{E}_*, X_*)$, где $\mathcal{E}_*$, X_* обозначают гомологии $\mathcal{E}$ и X соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим фильтрацию

$$F(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X) \supset F^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X) \supset \dots \supset F^m(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X) \supset \dots,$$

где $F^m(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X): \overline{\mathcal{E}}^m(X) \rightarrow \overline{\mathcal{E}}^{m+1}(X) \rightarrow \dots$.

Она индуцирует спектральную последовательность. Точные последовательности

$$0 \rightarrow F^{m+1}(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X) \rightarrow F^m(\mathcal{E}, \mathcal{E}, X) \rightarrow \overline{\mathcal{E}}^{m+1}(X) \rightarrow 0$$

индуцируют изоморфизмы

$$E_{n,m}^1 = [S^n, \overline{\mathcal{E}}^{m+1}(X)] \cong H_n(\overline{\mathcal{E}}^m(X))$$

и, следовательно, изоморфизм $E^1 \cong F(\mathcal{E}_*, X_*)$.

Если S^n – тривиальная $\mathcal{E}$ -коалгебра, то дифференциалы этой спектральной последовательности определяются дифференциалами в кобар конструкции $F(\mathcal{E}, X)$ и, таким образом, мы имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Если S^n – тривиальная $\mathcal{E}$ -коалгебра, то для произвольной $\mathcal{E}$ -коалгебры X имеет место изоморфизм

$$\pi_n^{\mathcal{E}}(X) \cong H_n(F(\mathcal{E}, X)).$$

Пусть теперь X – топологическое пространство, E_n – операда n -мерных кубиков. Заметим, что если $m \geq n$, то S^m имеет тривиальную структуру E_n -коалгебры, откуда вытекает следующая

ТЕОРЕМА 6. Если X – топологическое пространство и $m \geq n$, то имеет место изоморфизм

$$\pi_m^{E_n}(X) \cong H_m(F(E_n, C_*(X))).$$

Член E^1 этой спектральной последовательности выражается через гомологии операды E_n и, следовательно, через алгебру Дайера–Лашофа [7], [8].

ТЕОРЕМА 7. Если X – топологическое пространство, то член E^1 спектральной последовательности гомотопических групп $\pi_*^{E_n}(X)$ изоморфен модулю $S^n T_s R_{n-1} L_{n-1} S^{-n} H_*(X)$, где T_s – свободная коммутативная алгебра, R_{n-1} – подмодуль алгебры Дайера–Лашофа, порожденный допустимыми последовательностями избыточности меньше n , L_{n-1} – свободная $(n-1)$ -алгебра Ли.

Если X – n -связное топологическое пространство, то кобар конструкция $F(E_n, C_*(X))$ цепно эквивалентна n -кратной надстройке над цепным комплексом итерированного пространства петель $\Omega^n X$ [8]. Следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 8. Если X – n -связное топологическое пространство, то имеет место изоморфизм

$$\pi_*^{E_n}(X) \cong S^n H_*(\Omega^n X).$$

Эта теорема обобщает результат Квиллена [1], [6] о том, что рациональные гомотопические группы односвязного топологического пространства выражаются через гомотологии его пространства петель. Она устанавливает, до какого m остается непосредственная связь между гомотопическими группами (над операдой E_m) n -связного пространства X и гомотологиями m -кратного пространства петель над X .

Предложенный метод позволяет заменить труднейшую задачу о вычислении гомотопических групп сфер над операдой E_∞ на задачу о вычислении гомотопических групп сфер на операдах E_n .

В частности, из доказанной теоремы следует, что если $m \leq n$, то гомотопические группы (над операдой E_m) сферы S^n изоморфны m -кратной надстройке над гомотологиями m -кратного пространства петель над S^n . Интересно, на наш взгляд, было бы вычислить гомотопические группы сферы S^n над операдами E_n , E_{n+1} и т.д.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Quillen D. Rational homotopy theory // Ann. of Math. 1969. V. 90. № 2. P. 205–295.
- [2] Смирнов В. А. О коцепном комплексе топологического пространства // Матем. сб. 1981. Т. 115. С. 146–158.
- [3] Смирнов В. А. Гомотопическая теория коалгебр // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. С. 1302–1321.
- [4] May J. P. The Geometry of Iterated Loop Spaces. Lecture Notes in Math. V. 271. New York: Springer, 1972.
- [5] Boardman J. M., Vogt R. M. Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces. Lecture Notes in Math. V. 347. New York: Springer, 1973.
- [6] Quillen D. Homotopical Algebra. Lecture Notes in Math. V. 43. New York: Springer, 1967.
- [7] Dyer E., Lashof R. Homology of iterated loop spaces // Amer. J. Math. 1962. V. 84. P. 35–88.
- [8] Smirnov V. A. The homology of iterated loop spaces // Forum Mathematicum. 2002. V. 14. P. 345–381.

Московский государственный педагогический университет
E-mail: V.Smirnov@ru.net

Поступило
12.08.2003
Исправленный вариант
06.07.2004