Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Чернятин, О представлении интеграла Стильтьеса интегралом Римана, зависящим от параметра, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 6, 919–933

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2651>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:40:06

УДК 517.3

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИНТЕГРАЛА СТИЛТЬЕСА ИНТЕГРАЛОМ РИМАНА, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПАРАМЕТРА

В. А. Чернятин

В работе найдена новая формула представления интеграла Римана–Стилтьеса от непрерывных функций в форме предельного перехода по параметру от интеграла Римана, зависящего от этого параметра. Вывод данной формулы основан на исследовании функциональных свойств решения вспомогательного разностного уравнения первого порядка, реализующего представление взвешенной первой разности заданной функции в виде простой первой разности неизвестной функции. Полученный результат может быть использован для аналитического и приближенного вычисления интегралов Стилтьеса.

Библиография: 4 названия.

1. Постановка задачи. В работе исследуется вопрос представления интеграла Римана–Стилтьеса $\int_0^a g(t) df(t)$ от двух непрерывных на $[0, a]$ функций $f(t)$ и $g(t)$ с помощью интеграла Римана от этих функций. Известное из классической литературы [1, с. 205], [2, том 3, с. 101] такое представление интеграла Стилтьеса, по существу, исчерпывается тривиальным случаем функции $f(t)$ с интегрируемой (в смысле Римана) производной и имеет вид

$$\int_0^a g(t) df(t) = \int_0^a g(t) f'(t) dt.$$

Если воспользоваться определением производной

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

а затем на основании теоремы Арцела [2, том 2, с. 752] введенный предел вынести за знак последнего интеграла, то получим

$$\int_0^a g(t) df(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^a [f(t+h) - f(t)] g(t) dt. \quad (1)$$

Для корректного определения интеграла в правой части этого равенства необходимо определить непрерывную функцию $f(t)$ в области $D = (-H, a + H)$ несколько более широкой, чем $[0, a]$, где $H > 0$ – достаточно малое число. Останется ли формула (1) справедливой для недифференцируемой функции $f(t)$? Отыскание условий позитивного

ответа на данный вопрос и является основной целью данной работы, а содержательный смысл самого соотношения (1) определяется ее заглавием.

Простейшим условием такого типа является существование интегрируемой (в смысле Римана) на $[0, a]$ производной $g'(t)$. Тогда, обозначая через $F(t)$ первообразную для $f(t)$ и интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^a f(t+h)g(t) dt = F(a+h)g(a) - F(h)g(0) - \int_0^a F(t+h)g'(t) dt. \quad (2)$$

Отсюда следует соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^a [f(t+h) - f(t)]g(t) dt &= \frac{F(a+h) - F(a)}{h} g(a) - \frac{F(h) - F(0)}{h} g(0) \\ &\quad - \int_0^a \frac{F(t+h) - F(t)}{h} g'(t) dt, \end{aligned}$$

допускающее предельный переход при $h \rightarrow 0$, так что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^a [f(t+h) - f(t)]g(t) dt = f(t)g(t)|_0^a - \int_0^a f(t)g'(t) dt. \quad (3)$$

Но

$$\int_0^a f(t)g'(t) dt = \int_0^a f(t) dg(t),$$

а формула интегрирования по частям для интеграла Стильеса [1, с. 203] дает

$$\int_0^a f(t) dg(t) = f(t)g(t)|_0^a - \int_0^a g(t) df(t). \quad (4)$$

Компилируя теперь соотношения (3) и (4), приходим к искомому (1), однако уже для недифференцируемой функции $f(t)$.

Примечательно, что в рассматриваемом случае, как это следует из дифференцируемости по h правой части равенства (2) на основании одного обобщения теоремы Арцела [2, том 2, с. 752], существует производная $\frac{d}{dh} \int_0^a f(t+h)g(t) dt$, имеющая конечный предел при $h \rightarrow 0$. Значит, преобразуя предел из правой части равенства (1) по правилу Лопиталя [2, том 1, с. 317], получим эквивалентное представление интеграла Стильеса

$$\int_0^a g(t) df(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d}{dh} \int_0^a f(t+h)g(t) dt. \quad (1')$$

Подчеркнем еще раз, что представления (1) и (1') справедливы, если существует интегрируемая (в смысле Римана) на $[0, a]$ производная $g'(t)$.

2. Решение вспомогательного разностного уравнения. Дальнейший поиск нетривиальных условий представления интеграла Стильтеса в виде (1) будет основан на исследовании функциональных свойств решения простейшего разностного уравнения

$$x(t+h) - x(t) = \varphi(t, h) \quad \forall t \in [0, a], \quad (5)$$

где шаг $h \neq 0$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения в области $|h| < H$, а функция $\varphi(t, h)$ определена в области $G = \{(t, h) : 0 < |h| < H, t \in [-|h|, a]\}$ соотношением

$$\varphi(t, h) = \begin{cases} [f(t+h) - f(t)]g(t) & \forall t \in [0, a], \\ \varphi(0, h) \left(1 + \frac{t}{|h|}\right) & \forall t \in [-|h|, 0). \end{cases} \quad (6)$$

Такое определение правой части разностного уравнения (5) в области несколько более широкой, чем область его задания $[0, a]$, вызвано необходимостью однозначного определения его решения $F(t, h)$. Наконец подчеркнем, что функция $\varphi(t, h)$, определенная соотношением (6), непрерывна в области G по совокупности переменных (t, h) и обладает очевидными свойствами

$$\varphi(-|h|, h) = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(y(h), h) = 0 \quad \forall y(h) \in [-|h|, a], \quad (7)$$

первое из которых играет ключевую роль в непрерывности искомого решения.

Для корректного определения искомого решения $F(t, h)$ уравнения (5) необходимо, прежде всего, задать область Q его существования. Очевидно, при каждом допустимом h эта область должна быть несколько расширена влево и вправо от интервала $[0, a]$ задания самого разностного уравнения, для того чтобы при подстановке $F(t, h)$ в уравнение (5) были реализуемы значения $F(t+h)$, соответствующие отрицательным и положительным h . Отсюда следует, что области

$$\begin{aligned} Q_+ &\equiv Q(h > 0) = \{(t, h) : h \in (0, H), t \in [0, a+h]\}, \\ Q_- &\equiv Q(h < 0) = \{(t, h) : h \in (-H, 0), t \in [-h, a]\}, \end{aligned}$$

а $Q = Q_+ \cup Q_-$ (см. рис. 1). Следует подчеркнуть, что при $h = 0$ функция $F(t, h)$ вообще не определена, так как при этом уравнение (5) не имеет смысла, но по-видимому, можно говорить о ее пределе при $h \rightarrow 0$. Предлагаемая ниже конструкция решения $F(t, h)$ разностного уравнения (5) заимствована с несущественными модификациями из [3, с. 248].

Рис. 1

Исследуем вначале случай $h > 0$, в котором решение разностного уравнения (5) будем обозначать символом $F_+(t, h)$ с областью определения Q_+ . На каждом из интервалов оси t длиной h определим искомую функцию $F_+(t, h)$ следующим образом:

$$F_+(t, h) = \sum_{k=-1}^{n-1} \varphi(t - (n-k)h, h) \quad \forall nh \leq t < (n+1)h, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, N+1, \quad (8)$$

где $N = \langle a/|h| \rangle$, а символ $\langle b \rangle$ означает целую часть числа b . Впрочем, последний интервал с номером $n = N+1$, в соответствии с областью определения Q_+ , будет заведомо короче h , а именно $[(N+1)h, a+h]$, и может даже вырождаться в точку $t = (N+1)h$ при целом a/h .

Легко видеть, что введенная согласно (8) функция $F_+(t, h)$ при каждом $h > 0$ удовлетворяет разностному уравнению (5) при любых $t \in [0, a]$. Действительно, если $nh \leq t < (n+1)h$, а $(n+1)h \leq t+h < (n+2)h$, то в силу (8)

$$F_+(t+h, h) - F_+(t, h) = \sum_{k=-1}^n \varphi(t+h - (n+1-k)h, h) - \sum_{k=-1}^{n-1} \varphi(t - (n-k)h, h) = \varphi(t, h)$$

для любых $n = 0, 1, 2, \dots, N$, т.е. для всех $t \in [0, a]$.

Исследуем функциональные свойства решения $F_+(t, h)$. Начнем с вычисления его граничных значений при $t = 0$ и $t = a$. В силу (7) и (8)

$$F_+(0, h) = \varphi(-h, h) = 0 \quad \forall h \in (0, H). \quad (9)$$

Далее, так как $Nh \leq a < (N+1)h$, то согласно (8)

$$F_+(a, h) = \sum_{k=-1}^{N-1} \varphi(a + (N-k)h, h) = \sum_{k=-1}^{N-1} \varphi(kh + \eta, h), \quad (10)$$

где $0 \leq \eta = a - Nh < h$.

Установим теперь непрерывность функции $F_+(t, h)$ по совокупности обеих переменных в области Q_+ . Для этого дадим переменным t и h достаточно малые допустимые в этой области приращения τ и γ соответственно. Пусть выбранная точка $t \in [nh, (n+1)h)$ находится в n -ом интервале длины h . При новом разделении оси t соответственно шагу $h + \gamma > 0$ точка $t + \tau$ для достаточно малых τ и γ может оказаться либо на интервале с тем же номером n , т.е. $t + \tau \in [n(h+\gamma), (n+1)(h+\gamma))$, либо внутри соседнего интервала с меньшим номером $n-1$, т.е. $t + \tau \in ((n-1)(h+\gamma), n(h+\gamma))$, причем последнее возможно только при $t = nh$. В первом случае в силу (8), конечности номера n и непрерывности функции $\varphi(t, h)$ получаем

$$F_+(t+\tau, h+\gamma) = \sum_{k=-1}^{n-1} \varphi(t+\tau - (n-k)(h+\gamma), h+\gamma) \rightarrow \sum_{k=-1}^{n-1} \varphi(t - (n-k)h, h) = F_+(t, h)$$

при любых допустимых $\tau, \gamma \rightarrow 0$, а во втором –

$$F_+(t+\tau, h+\gamma) = \sum_{k=-1}^{n-2} \varphi(t+\tau - (n-1-k)(h+\gamma), h+\gamma) \rightarrow \sum_{k=-1}^{n-2} \varphi(t - (n-k-1)h, h).$$

Как отмечено выше, здесь $t = nh$, а потому к последней сумме можно добавить слагаемое $\varphi(t - (n + 1)h, h)$, равное нулю в силу граничного условия из (7). Тогда

$$\sum_{k=-1}^{n-2} \varphi(t - (n - k - 1)h, h) = \sum_{k=-2}^{n-2} \varphi(t - (n - k - 1)h, h) = \sum_{i=-1}^{n-1} \varphi(t - (n - i)h, h),$$

откуда также следует, что $F_+(t + \tau, h + \gamma) \rightarrow F_+(t, h)$ при любых допустимых $\tau, \gamma \rightarrow 0$. Тем самым, искомая непрерывность функции $F_+(t, h)$ в области Q_+ доказана.

3. Предельные свойства решения $F_+(t, h)$. Установленная непрерывность в Q_+ решения $F_+(t, h)$, определяемого соотношением (8), означает существование двойного предела $\lim F_+(t, h) = F_+(T^*, h^*)$ при любых $h \rightarrow h^* \in (0, H)$ и $t \rightarrow t^* \in [0, a + h^*]$. Цель этого пункта – исследовать существование такого предела при $h^* = 0$ и двух граничных значениях $t^* = 0$ и $t^* = a$.

Начнем, однако, с более простого, но имеющего самостоятельный интерес, вопроса существования простых пределов $\lim F_+(0, h)$ и $\lim F_+(a, h)$ при $h \rightarrow +0$. Для первого из них легко получаем

$$\lim_{h \rightarrow +0} F_+(0, h) = 0, \quad (11)$$

что является простым следствием соотношения (9). Для существования второго предела $\lim F_+(a, h)$ введем в качестве достаточных некоторые дополнительные условия на функции $f(t)$ и $g(t)$ помимо их непрерывности.

ЛЕММА 1. Если функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны соответственно в D и $[0, a]$ и существует (конечный) интеграл Стильеса $\int_0^a g(t) df(t)$, то

$$\lim_{h \rightarrow +0} F_+(a, h) = \int_0^a g(t) df(t). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем сумму в правой части равенства (10) в следующем виде:

$$F_+(a, h) = \varphi(-h + \eta, h) + \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(kh + \eta, h) + \varphi(0, \eta) - \varphi(0, \eta). \quad (13)$$

Легко видеть, что сумма

$$\varphi(0, \eta) + \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(kh + \eta, h) = [f(\eta) - f(0)]g(0) + \sum_{k=0}^{N-1} [f((k+1)h + \eta) - f(kh + \eta)]g(kh + \eta)$$

представляет собой одну из интегральных сумм Стильеса θ для интеграла $\int_0^a g(t) df(t)$, а значит, в ней можно перейти к пределу при $h \rightarrow +0$, так что

$$\lim_{h \rightarrow +0} \theta = \lim_{h \rightarrow +0} \left[\varphi(0, \eta) + \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(kh + \eta, h) \right] = \int_0^a g(t) df(t). \quad (14)$$

Тогда выражение (13) можно записать в виде

$$F_+(a, h) = \varphi(-h + \eta, h) - \varphi(0, \eta) + \theta.$$

А так как по определению $\eta \rightarrow +0$ одновременно с h , то в силу предельного свойства из (7) предыдущее равенство допускает предельный переход при $h \rightarrow +0$, что согласно (14) и доказывает искомое (12).

Перейдем теперь к существованию двойного предела функции $F_+(t, h)$ при $t \rightarrow a$ и $h \rightarrow +0$ одновременно. С этой целью проанализируем ее значения $F_+(a + \tau, h)$ при достаточно малых величинах $h > 0$ и $\tau = t - a$. Согласно (8) имеем

$$F_+(a + \tau, h) = \sum_{k=-1}^{m-1} \varphi(a + \tau - (m - k)h, h), \quad m = \left\langle \frac{a + \tau}{h} \right\rangle. \quad (15)$$

Введем одно существенное ограничение на допустимую область изменения независимых переменных $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow +0$ в двойном предельном переходе $\lim F_+(a + \tau, h)$. Точнее, пусть эта область на плоскости (τ, h) есть внутренность угла, определяемого неравенством $|\tau| \leq h$, с вершиной в предельной точке $(0, 0)$.

Введем два новых обозначения, именно, номер

$$p = m - N = \left\langle \frac{a + \tau}{h} \right\rangle - N = \left\langle \frac{Nh + \eta + \tau}{h} \right\rangle - N = \left\langle \frac{\eta + \tau}{h} \right\rangle$$

и величину $0 \leq \mu = \tau + \eta - ph < h$. Так как $0 \leq \eta < h$, а $|\tau| \leq h$, то при различных комбинациях этих величин номер p может принимать только три значения: -1 , 0 и 1 . Это позволяет представить выражение функции $F_+(a + \tau, h)$ из (15) в следующем виде:

$$F_+(a + \tau, h) = \sum_{k=-1}^{N+p-1} \varphi(a + \tau - (N + p - k)h, h) = \sum_{k=-1}^{N-1} \varphi(kh + \mu, h) + S(p), \quad (16)$$

где

$$S(p) = \begin{cases} -\varphi((N-1)h + \mu, h) & \text{при } p = -1, \\ 0 & \text{при } p = 0, \\ \varphi(Nh + \mu, h) & \text{при } p = 1. \end{cases}$$

Подчеркнем, что редукция выражения (15) к виду (16) справедлива только при $|\tau| \leq h$, иначе здесь вместо $S(p)$ должна была бы появиться сумма большего числа соответствующих слагаемых. Из данного выше определения $S(p)$ и предельного свойства в (7) следует, что

$$\lim_{h \rightarrow +0} S(p) = 0 \quad (17)$$

для любых значений τ , не обязательно стремящихся к нулю.

Исследуем теперь первую сумму из правой части последнего равенства в (16), для чего представим ее в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^{N-1} \varphi(kh + \mu, h) &= \varphi(-h + \mu, h) + \sum_{k=0}^{N-2} \varphi(kh + \mu, h) \\ &\quad + \varphi((N-1)h + \mu, h) + \varphi(0, \mu) - \varphi(0, \mu) \\ &= \varphi(-h + \mu, h) - \varphi(0, \mu) \\ &\quad + \varphi((N-1)h + \mu, h) - \varphi((N-1)h + \mu, \varkappa) + \sigma_+, \end{aligned} \quad (18)$$

где $0 < \varkappa = h - \mu + \eta < 2h$, а сумма

$$\begin{aligned}\sigma_+ &= \varphi(0, \mu) + \sum_{k=0}^{N-2} \varphi(kh + \mu, h) + \varphi((N-1)h + \mu, \varkappa) \\ &= [f(\mu) - f(0)]g(0) + \sum_{k=0}^{N-2} [f((k+1)h + \mu) - f(kh + \mu)]g(kh + \mu) \\ &\quad + [f(a) - f((N-1)h + \mu)]g((N-1)h + \mu)\end{aligned}$$

является, очевидно, одной из интегральных сумм Стильтьеса для интеграла $\int_0^a g(t) df(t)$ (см. рис. 2).

Рис. 2

Поскольку существование этого интеграла по-прежнему предполагается, то сумма $\sigma_+ \rightarrow \int_0^a g(t) df(t)$ при $h \rightarrow +0$. Остальные же слагаемые из правой части последнего равенства в (18) стремятся к нулю при $h \rightarrow +0$ в силу предельного свойства из (7). Это означает, что в соотношении (18) можно перейти к пределу при $h \rightarrow +0$, так что

$$\lim_{h \rightarrow +0} \sum_{k=-1}^{N-1} \varphi(kh + \mu, h) = \int_0^a g(t) df(t), \quad (19)$$

причем данное предельное свойство выполняется независимо от значений τ .

Такая независимость от τ предельных свойств (17) и (19) позволяет выполнить в равенстве (16) двойной предельный переход при $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow +0$, однако, поскольку само выражение $F_+(a + \tau, h)$ в форме (16) имеет силу только при $p = 1, 0$ или -1 , то условие $|\tau| < h$ становится здесь существенным. Этот важный для дальнейшего результат сформулируем в виде следующего утверждения.

ЛЕММА 2. Если функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны соответственно в D и $[0, a]$ и существует интеграл Стильтьеса $\int_0^a g(t) df(t)$, то при выполнении условия $|\tau| < h$ двойной предел

$$\lim_{\substack{h \rightarrow +0, \\ \tau \rightarrow 0}} F_+(a + \tau, h) \equiv \lim_{\substack{h \rightarrow +0, \\ t \rightarrow a}} F_+(t, h) = \int_0^a g(t) df(t). \quad (20)$$

Выше во всех выкладках предполагалось $a > 0$, однако ниже потребуются и знание двойного предела функции $F_+(\tau, h)$ при $h \rightarrow +0$ и $\tau \rightarrow 0$ одновременно. А так как

при каждом $h > 0$ она определена лишь в интервале $[0, a + h]$, то здесь, вообще говоря, корректно вести речь только о правостороннем двойном пределе $\lim F_+(\tau, h)$ при $h \rightarrow +0$ и $\tau \rightarrow +0$. Поэтому нужное выражение для $F_+(\tau, h)$ уже не будет следствием (16) при $a = 0$ и может быть найдено непосредственно из определений (6) и (8) при условии $0 < \tau \leq h$, а именно,

$$F_+(\tau, h) = \varphi(\tau - h, h) = \varphi(0, h) \left(1 + \frac{\tau - h}{h}\right) = \varphi(0, h) \frac{\tau}{h}.$$

Отсюда в силу предельного свойства из (7) заключаем

$$\lim_{\substack{h \rightarrow +0 \\ \tau \rightarrow +0}} F_+(\tau, h) = 0 \quad \text{при } |\tau| \leq h. \quad (21)$$

В заключение отметим, что вопрос об условиях существования фигурирующего здесь и ниже интеграла Стильтеса оставляем открытым. Укажем, однако, что наряду с общепринятыми [1, с. 204] достаточными условиями его существования, основанными на ограниченности вариации функции $f(t)$, есть и малоизвестные условия [4], состоящие в принадлежности функций $f(t)$ и $g(t)$ некоторому классу Гёльдера.

4. Продолжение функции $F(t, h)$ при $h < 0$. Искомое продолжение $F_-(t, h)$ с областью определения Q_- является решением разностного уравнения (5) с отрицательным шагом h . Представляется более удобным исследовать соответствующее разностное уравнение с положительным шагом, для чего, вводя шаг $\delta = -h > 0$, сведем уравнение (5) к следующему виду:

$$\begin{aligned} x(t) - x(t - \delta) &= \bar{\varphi}(t, \delta) \quad \forall t \in [0, a], \\ \bar{\varphi}(t, \delta) &= -\varphi(t, -\delta) = [f(t) - f(t - \delta)]g(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Очевидно, решением уравнения (22) является введенная выше функция $F_-(t, -\delta)$ и обратно, решением $F_-(t, h)$ уравнения (5) с шагом $h < 0$ является любое решение уравнения (22) при $\delta = -h$.

Определим на каждом из интервалов оси t длиной δ искомую функцию $F_-(t, -\delta)$ в виде, вообще говоря, несколько отличном от (8), а именно,

$$F_-(t, -\delta) = \sum_{k=-1}^n \bar{\varphi}(t - (n - k)\delta, \delta) \quad \forall t: \quad n\delta \leq t < (n + 1)\delta, \quad n = -1, 0, 1, 2, \dots, N. \quad (23)$$

Такая конструкция решения уравнения (22) предполагает доопределение его правой части $\bar{\varphi}(t, \delta)$ на интервале $t \in [-\delta, 0)$, которое непосредственно переписывается на основании (6) и (7) в виде

$$\bar{\varphi}(t, \delta) = \bar{\varphi}(0, \delta) \left(1 + \frac{t}{\delta}\right) \quad \forall t \in [-\delta, 0), \quad \bar{\varphi}(-\delta, \delta) = 0. \quad (24)$$

Согласно (23) легко получаем

$$F_-(t, -\delta) - F_-(t - \delta, -\delta) = \sum_{k=-1}^n \bar{\varphi}(t - (n - k)\delta, \delta) - \sum_{k=-1}^{n-1} \bar{\varphi}(t - \delta - (n - 1 - k)\delta, \delta) = \bar{\varphi}(t, \delta),$$

откуда следует, что определенная таким образом функция $F_-(t, -\delta)$ является решением разностного уравнения (22) на интервале $[0, a]$.

Исследование функциональных свойств решения $F_-(t, -\delta)$ может быть проведено с несущественными отличиями теми же средствами, как и выше для функции $F_+(t, h)$. Приведем лишь основные из этих свойств без подробных выкладок. Прежде всего, в силу (23) и (24) при учете оценки $N\delta \leq a < (N+1)\delta$ находим ее граничные значения

$$F_-(-\delta, -\delta) = \bar{\varphi}(-\delta, \delta) = 0, \quad F_-(0, -\delta) = \bar{\varphi}(0, \delta) \quad \forall \delta \in (0, H),$$

$$F_-(a, -\delta) = \sum_{k=-1}^N \bar{\varphi}(a - (N-k)\delta, \delta) = \sum_{k=-1}^N \bar{\varphi}(k\delta + \eta, \delta),$$

где $0 \leq \eta = a - N\delta < \delta$, так как $N = \langle a/\delta \rangle$. Далее, на основании первого из этих граничных значений и непрерывности функции $\bar{\varphi}(t, \delta)$ констатируем непрерывность определяемого согласно (23) решения $F_-(t, -\delta)$ по совокупности переменных (t, δ) в области Q_- .

Несколько более подробно проанализируем существование и вычисление двойного предела функции $F_-(a + \tau, -\delta)$ при $\tau \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow +0$ одновременно. Для этого согласно (23) запишем ее значение в виде

$$F_-(a + \tau, -\delta) = \sum_{k=-1}^m \bar{\varphi}(a + \tau - (m-k)\delta, \delta), \quad m = \left\langle \frac{a + \tau}{\delta} \right\rangle.$$

Как и прежде, в искомом двойном предельном переходе предполагаем выполненным условие $|\tau| \leq \delta$. Кроме того, здесь значение $t = a$ находится на правой границе области Q_- , а потому необходимо $-\delta \leq \tau < 0$. Тогда, вводя номер $p = m - N = \langle (\eta + \tau)/\delta \rangle$, который теперь может принимать только два значения -1 и 0 , получим

$$F_-(a + \tau, -\delta) = \sum_{k=-1}^{N+p} \bar{\varphi}(a + \tau - (N+p-k)\delta, \delta) = \sum_{k=-1}^{N-1} \bar{\varphi}(k\delta + \mu, \delta) + \bar{S}(p), \quad (25)$$

где $0 \leq \mu = \tau + \eta - p\delta < \delta$, а

$$\bar{S}(p) = \begin{cases} 0 & \text{при } p = -1, \\ \bar{\varphi}(a + \tau, \delta) & \text{при } p = 0. \end{cases}$$

В силу предельного свойства из (7) заключаем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} S(p) = 0. \quad (26)$$

Представим теперь первую сумму из правой части последнего равенства в (25) в виде

$$\sum_{k=-1}^{N-1} \bar{\varphi}(k\delta + \mu, \delta) = \bar{\varphi}(-\delta + \mu, \delta) + \bar{\varphi}(\mu, \delta) + \sigma_- - \bar{\varphi}(\mu, \mu) - \bar{\varphi}(a, \varkappa), \quad (27)$$

где $0 < \varkappa = \delta - \mu + \eta < 2\delta$, а сумма

$$\begin{aligned}\sigma_- &= \bar{\varphi}(\mu, \mu) + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{\varphi}(k\delta + \mu, \delta) + \bar{\varphi}(a, \varkappa) \\ &= [f(\mu) - f(0)]g(\mu) + \sum_{k=1}^{N-1} [f(k\delta + \mu) - f((k-1)\delta + \mu)]g(k\delta + \mu) \\ &\quad + [f(a) - f((N-1)\delta + \mu)]g(a)\end{aligned}$$

является, как легко видеть, одной из интегральных сумм Стильтеса для интеграла $\int_0^a g(t) df(t)$. Несущественное отличие этой интегральной суммы по сравнению с аналогичной суммой σ_+ для $F_+(t, h)$ состоит в том, что значения функции $g(t)$ в каждом ее слагаемом берутся не в левых концах каждого интервала разложения отрезка $[0, a]$, как прежде, а в правых. Естественно, это не влияет на предельное значение самой суммы, так что $\sigma_- \rightarrow \int_0^a g(t) df(t)$ при $\delta \rightarrow +0$. Но тогда с учетом предельного свойства из (7) равенство (27) допускает предельный переход при $\delta \rightarrow +0$:

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \tau \rightarrow -0}} \sum_{k=-1}^{N-1} \bar{\varphi}(k\delta + \mu, \delta) = \int_0^a g(t) df(t). \quad (28)$$

Примечательно, что предельные свойства (26) и (28) выполняются для любых τ , в то время как само представление (25) справедливо только при $-\delta \leq \tau < 0$. На этом основании в равенстве (25) можно выполнить двойной предельный переход при $\tau \rightarrow -0$ и $\delta \rightarrow +0$ одновременно и утверждать, что

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \tau \rightarrow -0}} F_-(a + \tau, -\delta) \equiv \lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \tau \rightarrow a-0}} F_-(t, -\delta) = \int_0^a g(t) df(t) \quad \text{при } |\tau| \leq \delta. \quad (29)$$

Наконец, вычислим двойной предел функции $F_-(\tau, -\delta)$ при $\delta \rightarrow +0$ и $\tau \rightarrow 0$ одновременно при условии $|\tau| \leq \delta$. Для этого ее значение представим согласно определению (23) в виде

$$F_-(\tau, -\delta) = \sum_{k=-1}^m \bar{\varphi}(\tau - (m-k)\delta, \delta), \quad m = \left\langle \frac{\tau}{\delta} \right\rangle.$$

Отсюда видно, что в зависимости от знака τ номер m может принимать только два значения -1 и 0 , соответственно при $\tau < 0$ и $\tau > 0$, а тогда

$$F_-(\tau, -\delta) = \begin{cases} \bar{\varphi}(\tau, \delta) & \text{при } \tau > 0, \\ \bar{\varphi}(\tau - \delta, \delta) + \bar{\varphi}(\tau, \delta) & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

В силу предельного свойства из (7) это означает, что существует двойной предел

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow +0 \\ \tau \rightarrow 0}} F_-(\tau, -\delta) \quad \text{при } |\tau| \leq \delta. \quad (30)$$

Компиляция определений (8) и (23) при учете в последнем обратной замены $\delta = -h$ и очевидного соотношения $\bar{\varphi}(t - (n - k)\delta, \delta) = -\varphi(t + (n - k)h, h)$ позволяет представить решение $F(t, h)$ разностного уравнения (5) на каждом из интервалов $n|h| \leq t < (n+1)|h|$ в форме

$$F(t, h) = \begin{cases} F_+(t, h) = \sum_{k=-1}^{n-1} \varphi(t - (n - k)h, h) & \text{при } h > 0, \quad n = 0, 1, \dots, N + 1, \\ F_-(t, h) = - \sum_{k=-1}^n \varphi(t + (n - k)h, h) & \text{при } h < 0, \quad n = -1, 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (31)$$

Все установленные ранее свойства непрерывности функций $F_+(t, h)$ и $F_-(t, h)$, а также их предельные свойства из леммы 2 и соотношений (21), (29) и (30), отнесенные к функции $F(t, h)$ из (31), дадим в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны соответственно в D и $[0, a]$. Тогда решение $F(t, h)$ разностного уравнения (5), определяемое формулой (31), непрерывно по совокупности переменных (t, h) в области Q и имеет условный двойной предел

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} F(t, h) = 0 \quad \text{при } |\tau| \leq |h|.$$

Если при этом существует (конечный) интеграл Стильеса $\int_0^a g(t) df(t)$, то существует и условный двойной предел

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow a}} F(t, h) = \int_0^a g(t) df(t) \quad \text{при } |t - a| \leq |h|.$$

5. Представление интеграла Стильеса. Покажем, что установленных выше свойств функции $F(t, h)$ достаточно для доказательства существования предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^a [F(t + h, h) - F(t, h)] dt \quad (32)$$

и его отыскания. Действительно, так как функция $F(t, h)$ непрерывна по t в области Q , то по этой переменной она имеет первообразную $\Phi(t, h)$. Непосредственно проверяется, что $\Phi(t + h, h)$ также является первообразной для $F(t + h, h)$ по переменной t .

Тогда на основании формулы Ньютона–Лейбница имеем

$$\begin{aligned} \int_0^a F(t, h) dt &= \Phi(a, h) - \Phi(0, h), \\ \int_0^a F(t + h, h) dt &= \Phi(a + h, h) - \Phi(h, h) \end{aligned}$$

и выражение под знаком предела в (32) принимает вид

$$\frac{1}{h} \int_0^a [F(t + h, h) - F(t, h)] dt = \frac{\Phi(a + h, h) - \Phi(a, h)}{h} - \frac{\Phi(h, h) - \Phi(0, h)}{h}. \quad (33)$$

Найдем теперь пределы двух дробей из правой части этого равенства при $h \rightarrow 0$. С этой целью, воспользовавшись формулой Ньютона–Лейбница и интегральной теоремой о среднем значении, преобразуем разность

$$\Phi(a+h, h) - \Phi(a, h) = \int_a^{a+h} F(t, h) dt = hF(\xi(h), h),$$

где зависящая от h величина $\xi(h)$ лежит между a и $a+h$, а значит, условие $|\tau| = |\xi(h) - a| < |h|$ выполняется автоматически и, кроме того, $\xi(h) \rightarrow a$ при $h \rightarrow 0$. Тогда в вытекающем отсюда равенстве

$$\frac{\Phi(a+h, h) - \Phi(a, h)}{h} = F(\xi(h), h)$$

на основании теоремы 1 можно перейти к пределу при $h \rightarrow 0$ и утверждать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(a+h, h) - \Phi(a, h)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow a}} F(\xi, h) = \int_0^a g(t) df(t). \quad (34)$$

В результате совершенно аналогичных рассуждений получим

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(h, h) - \Phi(0, h)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ v \rightarrow 0}} F(v, h) = 0, \quad (35)$$

где v заключено между 0 и h , а двойной предел определяется той же теоремой.

Соотношения (34) и (35) позволяют перейти к пределу при $h \rightarrow 0$ в равенстве (33):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^a [F(t+h, h) - F(t, h)] dt = \int_0^a g(t) df(t).$$

Если при этом учесть, что функция $F(t, h)$ есть решение разностного уравнения (5), то отсюда получим окончательное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Если функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны соответственно в D и $[0, a]$ и существует (конечный) интеграл Стильеса $\int_0^a g(t) df(t)$, то он представляется в виде следующего предела интеграла Римана, зависящего от параметра:*

$$\int_0^a g(t) df(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^a [f(t+h) - f(t)]g(t) dt. \quad (36)$$

Важно отметить, что условие данной теоремы о существовании интеграла Стильеса не следует считать “обременительным”, поскольку без него поставленная задача вообще не имеет смысла, а существенное условие $|\tau| < |h|$ в двойном предельном переходе из теоремы 1, лежащей в основе всего вывода, осталось чисто внутренним и никак не влияет на функции $f(t)$ и $g(t)$. Наконец, представление (36) было найдено и ранее в формуле (1) и явилось до некоторой степени тривиальным результатом, однако там оно было обусловлено весьма сильным требованием об интегрируемости (в смысле Римана) на $[0, a]$ производной $g'(t)$.

Основная формула (36), представляющая теоретический результат всей работы, имеет, кроме того, и определенное прикладное значение. Во-первых, она может быть использована для точного вычисления интеграла Стильтьеса, если удастся в явном виде найти интеграл Римана в ее правой части, а затем выполнить указанный предельный переход по параметру $h \rightarrow 0$. А во-вторых, сходимость интеграла

$$\frac{1}{h} \int_0^a [f(t+h) - f(t)]g(t) dt \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

позволяет использовать его значения при достаточно малых h для приближенной оценки величины самого интеграла Стильтьеса $\int_0^a g(t) df(t)$.

Из теоремы 2 легко извлечь также необходимое условие существования интеграла Стильтьеса от непрерывных функций $f(t)$ и $g(t)$. Действительно, при ее доказательстве предположение о существовании интеграла $\int_0^a g(t) df(t)$ привело нас к существованию конечного предела в правой части равенства (36), а именно,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^a [f(t+h) - f(t)]g(t) dt = A. \quad (37)$$

Это и означает, что данное условие является необходимым для существования указанного интеграла Стильтьеса. В заключение поставим обратный вопрос: что можно сказать о существовании интеграла $\int_0^a g(t) df(t)$, если существует конечный предел (37)?

6. Замечание о достаточности условия (37). К сожалению, в рамках данной работы не удалось однозначно ответить на вопрос о достаточности условия (37) для существования интеграла $\int_0^a g(t) df(t)$. Тем не менее, о некоторой достаточности этого условия в связи с существованием упомянутого интеграла Стильтьеса говорить можно. Пусть Δ_i – некоторое стандартное разложение отрезка интегрирования $[0, a]$ на конечное число интервалов [1, с. 120], длина наибольшего из которых равна l_i , а S_i – одна из интегральных сумм Стильтьеса на этом разложении для интеграла $\int_0^a g(t) df(t)$.

ЛЕММА 3. Если функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны соответственно в D и $[0, a]$, то условие (37) достаточно для существования последовательности $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ разложений отрезка $[0, a]$ со свойством $l_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, а также соответствующей ей последовательности интегральных сумм Стильтьеса $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$, сходящейся к числу A .

В самом деле, из выполнения условия (37) следует также, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^a [F(t+h, h) - F(t, h)] dt = A, \quad (38)$$

поскольку $F(t, h)$ есть решение разностного уравнения (5). Как было ясно выше, справедливость соотношения (35) не требует существования интеграла Стильтьеса, а потому из сопоставления соотношений (33) и (38) получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(a+h, h) - \Phi(a, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} F(\xi(h), h) = A, \quad (39)$$

где величина $\xi(h)$ определяется, вообще говоря, неоднозначно, теоремой о среднем значении [2, том 2, с. 113] как решение интегрального уравнения

$$F(\xi, h) = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} F(t, h) dt \quad (40)$$

относительно ξ . Однако в любом случае $|\xi(h) - a| < |h|$, а значит $\xi(h) \rightarrow a$ при $h \rightarrow 0$. Вводя зависящую от h величину $\lambda = \xi(h) - a$, можем последний предел в (39) представить как

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(\xi(h), h) = \lim_{h \rightarrow 0} F(a + \lambda, h) = A \quad \text{при } |\lambda| < |h|. \quad (41)$$

Тогда согласно (31) величину $F(a + \lambda, h)$ можно определить из формул (16) и (25), если в них формально заменить τ на λ . Однако здесь следует подчеркнуть существенную разницу этих величин. Дело в том, что τ в соотношениях (16) и (25), хотя и стеснена ограничением $|\tau| \leq |h|$, тем не менее, является независимой величиной, которая в таком качестве и выступает позднее в двойных предельных переходах (20) и (29) равноправно с независимой переменной h . В противоположность этому, λ определяется, как отмечено выше, из интегрального уравнения (40) и потому является зависимой от h переменной.

Легко видеть, что в силу соотношений (31), (16), (18), (25) и (27) функцию $F(a + \lambda, h)$ можно записать в виде

$$F(a + \lambda, h) = \sigma + \rho(\lambda, h),$$

где

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_+|_{\tau=\lambda} & \text{при } h > 0, \\ \sigma_-|_{\tau=\lambda} & \text{при } h < 0, \end{cases}$$

а величина $\rho(\lambda, h)$ представляет собой сумму нескольких исчезающих при $h \rightarrow 0$ слагаемых. Отсюда, полагая $h = h_i$ и $\lambda|_{h=h_i} = \lambda_i$, заключаем при учете последнего равенства в (41), что

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} F(a + \lambda_i, h_i) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \sigma|_{h=h_i} = A.$$

Так как величина σ при каждом $h = h_i$, $i = 1, 2, \dots$, является интегральной суммой Стильеса, то вышеустановленное предельное свойство для нее позволяет определить искомую последовательность $\{S_i\}_{i=1}^\infty$ из равенства $S_i = \sigma|_{h=h_i}$, если числа h_i выбрать только из условия сходимости к нулю последовательности $\{h_i\}_{i=1}^\infty$. Для обоснованности такого определения достаточно убедиться, что $l_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Но это свойство прямо следует из выражений интегральных сумм Стильеса σ_+ и σ_- в (18) и (27) при $h = h_i$, поскольку обе составлены на одном и том же разложении Δ_i отрезка $[0, a]$ на $N + 1$ интервалов, длина наибольшего из которых $l_i < 2|h_i|$.

7. Приложения. В качестве непосредственных следствий полученных выше результатов приведем несколько нетривиальных предельных соотношений для интегралов, содержащих первые разности $\Delta_h q(t) = q(t + h) - q(t)$ некоторых непрерывных функций. Два наиболее простых из них –

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^a \Delta_h f(t) dt = f(t)|_0^a, \quad (42)$$

$$\int_0^a \psi(t) f(t) dt = \Psi(t) f(t)|_0^a - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^a \Psi(t) \Delta_h f(t) dt \quad (43)$$

–вытекают из соотношения (3) при $g(t) \equiv 1$ и при $g(t) = \Psi(t)$, $g'(t) = \psi(t)$ соответственно. При этом соотношение (42) можно интерпретировать как аналог формулы Ньютона–Лейбница, а (43) – как аналог формулы интегрирования по частям, оба для недифференцируемой функции $f(t)$.

Два следующих соотношения являются непосредственными следствиями теоремы 2. Первое соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^a g(t) \Delta_h f(t) dt + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^a f(t) \Delta_h g(t) dt = f(t)g(t)|_0^a \quad (44)$$

получается на основании формулы интегрирования по частям (4) и последовательного использования теоремы 2 для интегралов $\int_0^a g(t) df(t)$ и $\int_0^a f(t) dg(t)$. Очевидно, соотношение (44) обобщает классическую формулу $\int_0^a [f(t)g(t)]' dt = f(t)g(t)|_0^a$ на случай недифференцируемых функций $f(t)$ и $g(t)$. Наконец, представляет интерес и последнее соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^a \Delta_h f(t) \cdot \Delta_h g(t) dt = 0, \quad (45)$$

обобщающее тривиальное утверждение $\int_0^a f'(t) \Delta_h g(t) dt \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ на случай недифференцируемой функции $f(t)$. Искомое соотношение вытекает из тривиального тождества $\Delta_h f(t) \cdot \Delta_h g(t) = \Delta_h(f(t)g(t)) - g(t)\Delta_h f(t) - f(t)\Delta_h g(t)$ и предельных соотношений (42) и (44).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957.
- [2] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1–3. М.: Физматгиз, 1962.
- [3] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1967.
- [4] Kondurar V. Sur l'integrale de Stieltjes // Recueil Math. 1937. V. 2. P. 361–366.

Щецинский университет, Польша
E-mail: cherny@wmf.univ.szczecin.pl

Поступило
23.06.2003
Исправленный вариант
30.08.2004