Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, О полиномах с критическими значениями на отрезке, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 6, 827–832

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2653>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:28:57

УДК 512.62+517.54

О ПОЛИНОМАХ С КРИТИЧЕСКИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НА ОТРЕЗКЕ

В. Н. Дубинин

Для полиномов $P(z)$ с вещественными коэффициентами и с фиксированным старшим коэффициентом, удовлетворяющих условиям $P(z) \in [-1, 1]$ при $z \in [-1, 1]$ и $P(z) \in [-1, 1]$, когда $P'(z) = 0$, получены новые теоремы покрытия, неравенство бернштейновского типа и неравенства для коэффициентов. Доказательства основаны на применении конформного и однолистного отображения.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть $P(z) = az^n + \dots$ — алгебраический полином степени n с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий условию

$$|P(z)| \leq 1 \quad \text{для } z \in [-1, 1]. \quad (1)$$

Многочисленные свойства полиномов с такой нормировкой восходят к классическим работам Чебышева, Маркова, Бернштейна и активно исследуются вплоть до настоящего времени (см., например, [1]–[3]). Часть этих свойств содержит информацию о некоторых коэффициентах полинома $P(z)$. Так, в недавней работе [4] помимо других результатов получены точные неравенства бернштейновского типа для указанных выше полиномов с участием старшего коэффициента a . Знаки равенства при этом достигаются в случае полинома Чебышева первого рода $T_n(z) = 2^{n-1}z^n + \dots$, т.е. в случае, когда $a = 2^{n-1}$. Хорошо известно, что при условии (1) выполняется неравенство $0 < |a| \leq 2^{n-1}$ с равенством только для $P(z) = \pm T_n(z)$. Естественным образом поставить вопрос о получении аналогичных [4] свойств полиномов, где бы экстремальным оказался полином с наперед заданным старшим коэффициентом. Внимание автора к этой проблеме было инициировано В. И. Буренковым на Международной школе-конференции по анализу и геометрии, посвященной 75-летию Ю. Г. Решетняка (Новосибирск, 2004). В данной заметке указанная задача решается для полиномов, чьи значения в критических точках принадлежат отрезку $[-1, 1]$. Для фиксированных a , $0 < a < 2^{n-1}$, и $n \geq 2$ обозначим через $\mathcal{P}_n^a$ совокупность всех полиномов $P(z) = az^n + \dots$ степени n с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих условию (1) и таких, что если в некоторой

Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН, грант № 05-III-A-01-039, и программы «Университеты России», грант № 04.01.053.

точке z выполняется $P'(z) = 0$, то необходимо $P(z) \in [-1, 1]$. Ниже будут доказаны теоремы покрытия, неравенство бернштейновского типа и неравенства для коэффициентов полиномов класса $\mathcal{P}_n^a$. Экстремальным в каждом случае будет полином

$$T_n^a(z) := T_n(bz + b - 1) = az^n + \dots,$$

где $b = (a2^{1-n})^{1/n} < 1$. Напомним представление полинома Чебышева $T_n(z)$ через конформные отображения. Пусть

$$\eta = \Phi(\omega) = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$$

означает ту ветвь аналитической функции, обратной функции Жуковского, которая конформно и однолистно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на круг $|\eta| < 1$. Тогда

$$T_n(z) = \frac{1}{2}(\Phi^n(z) + \Phi^{-n}(z)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ключевую роль в приведенных ниже доказательствах играет функция

$$w = g(\zeta) := \left[\Phi \left(P \left(\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right) \right) \right]^{1/n} = \frac{1}{b}\zeta + \dots, \quad (2)$$

которая согласно лемме 2.7 работы [4] и ввиду (1) конформно и однолистно отображает область $\{\zeta : |\zeta| < 1, P((\zeta + 1/\zeta)/2) \notin [-1, 1]\}$ на круг $|w| < 1$. Здесь $P(z) \in \mathcal{P}_n^a$ и $1^{1/n} = 1$. Соответственно обратная $w = g(\zeta)$ функция

$$\zeta = h(w) = (a2^{1-n})^{1/n}w + \dots$$

принадлежит классу ограниченных однолистных в круге $|w| < 1$ функций, экстремальные свойства которых хорошо изучены в литературе (см., например, [5]).

2. Теоремы покрытия. Обозначим через $\zeta = p(w; b)$ функцию Пика, заданную соотношениями

$$\frac{\zeta}{(1+\zeta)^2} = \frac{bw}{(1+w)^2}, \quad |w| < 1, \quad |\zeta| < 1, \quad \zeta \notin [d, 1),$$

где $d = 2b^{-1} - 1 - 2\sqrt{b^{-1}(b^{-1} - 1)}$, $0 < b < 1$.

Следуя методике работы [4], приходим к теоремам покрытия образов и прообразов эллипсов при отображении полиномами $P(z) \in \mathcal{P}_n^a$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого полинома $P(z)$ класса $\mathcal{P}_n^a$ и любого числа ρ , $0 < \rho < 1$, прообраз эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $(\rho + 1/\rho)/2$ лежит в кольцевой области $G(n, a, \rho)$, ограниченной двумя эллипсами с фокусами в точках ± 1 и большими полуосями, равными

$$\frac{1}{2} \left(-p(-\rho^{1/n}; b) - \frac{1}{p(-\rho^{1/n}; b)} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \left(p(\rho^{1/n}; b) + \frac{1}{p(\rho^{1/n}; b)} \right),$$

где $b = (a2^{1-n})^{1/n}$. Исключение составляет случай, когда $P(z) \equiv T_n^a(z)$ и, следовательно, прообраз указанного эллипса есть эллипс, все точки которого принадлежат области $G(n, a, \rho)$, кроме точек

$$\frac{1}{2} \left(p(-\rho^{1/n}; b) + \frac{1}{p(-\rho^{1/n}; b)} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \left(p(\rho^{1/n}; b) + \frac{1}{p(\rho^{1/n}; b)} \right),$$

которые лежат на ее границе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По заданному полиному $P(z)$ класса $\mathcal{P}_n^a$ построим функцию $w = g(\zeta)$ (2) и рассмотрим обратное отображение $\zeta = h(w) = bw + \dots$. Для любой точки w на окружности $|w| = \rho^{1/n}$ справедливы неравенства Пика [5, с. 55]

$$p(\rho^{1/n}; b) \leq |h(w)| \leq -p(-\rho^{1/n}; b). \quad (3)$$

Это означает, что точка $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $\zeta = h(w)$, принадлежит замыканию области $G(n, a, \rho)$, в то время как точка $P(z) = (w^n + 1/w^n)/2$ является произвольной точкой эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $(\rho + 1/\rho)/2$. Принадлежность точки $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$ границе области $G(n, a, \rho)$ означает равенство в левой либо правой части неравенства (3) для некоторой точки w . Хорошо известно, что в этом случае функция $h(w) \equiv \alpha p(\beta w; b)$, где α и β – комплексные числа, удовлетворяющие условию $|\alpha| = |\beta| = 1$. Тогда из представления (2) вытекает, что $\alpha = \beta = 1$ и полином $P(z)$ отображает отрезок $[-1, (d+1/d)/2]$ на отрезок $[-1, 1]$, где d из определения функции Пика. Следовательно, полином $P((z+1-b)/b) = 2^{n-1}z^n + \dots$ отображает отрезок $[-1, 1]$ на себя (т.е. $(d+1/d)/2 = 2b^{-1} - 1$). Отсюда $P((z+1-b)/b) \equiv T_n(z)$ и $P(z) \equiv T_n^a(z)$. Характер отображения, осуществляемого полиномом $T_n^a(z)$, непосредственно виден из его определения. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если полином $P(z)$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n^a$, то для любого числа t , $0 < t < 1$, образ эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $(t+1/t)/2$ при отображении этим полиномом лежит в конечной области, ограниченной эллипсом с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $(\rho + 1/\rho)/2$, где $p(-\rho^{1/n}; b) = -t$, $b = (a^{2^{1-n}})^{1/n}$. Исключение составляет случай, когда $P(z) \equiv T_n^a(z)$ и, следовательно, все точки образа эллипса принадлежат указанной выше области, кроме точки $-(\rho + 1/\rho)/2$, которая лежит на ее границе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что для любого t , $0 < t < 1$, уравнение

$$p(-\rho^{1/n}; b) = -t$$

имеет единственное решение ρ , $0 < \rho < 1$. Из правого неравенства в (3) заключаем, что, если точка $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $\zeta = h(w)$, принадлежит эллипсу с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $(t+1/t)/2$, т.е. если $|\zeta| = t$, то соответствующая точка $w = g(\zeta)$ удовлетворяет неравенству $|w| \geq \rho^{1/n}$. Это означает принадлежность точки $P(z) = (w^n + 1/w^n)/2$ замыканию области, указанной в формулировке теоремы 2, причем, если $P(z)$ лежит на границе этой области, то $|w| = \rho^{1/n}$ и в правой части (3) имеет место знак равенства. В случае равенства в (3), как и при доказательстве теоремы 1, приходим к тождеству $P(z) \equiv T_n^a(z)$. Теорема доказана.

Заметим, что при отображении полиномом $T_n^a(z)$, $0 < a < 2^{n-1}$, образ эллипса с фокусами в точках ± 1 не является эллипсом (в отличие от случая полинома Чебышева $T_n(z)$, т.е. когда $a = 2^{n-1}$). Далее, повторяя доказательство теоремы 2, но с привлечением левой части неравенства (3), можно получить принадлежность образа эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой полуосью $(t+1/t)/2$ “внешности” некоторого эллипса, но только в случае $t < d$. Аналог теоремы 2, но для произвольных полиномов $P(z)$, удовлетворяющих условию (1) (без ограничения на критические значения), получен автором в работе [4, с. 26]. Доказанная там оценка также зависит от старшего коэффициента, и достигается она в случае $P(z) \equiv T_n(z)$. Следствие этой оценки звучит как “образ

эллипса с фокусами в точках ± 1 принадлежит образу этого же эллипса, но при отображении полиномом $T_n(z)$ [4, следствие 3.1]. Последний результат установлен много лет назад Дочевым [6, с. 521] путем исследования соответствующих тригонометрических полиномов и впоследствии был забыт специалистами. Автору этот факт сообщил А. В. Олесов после тщательного изучения литературы.

3. Неравенства типа Маркова и Бернштейна. В работе [4, с. 41] получено неравенство типа неравенства Маркова

$$\max\{|P'(z)| : z \in [-1, 1]\} \leq n^2(a2^{1-n})^{1/n}, \quad (4)$$

доказательство которого полностью подходит для полиномов класса $\mathcal{P}_n^a$. Случайным образом это неравенство оказалось точным в данном классе, причем знак равенства достигается в случае $P(z) \equiv T_n^a(z)$. Соответствующее неравенство бернштейновского типа [4, теорема 4.5] этим свойством не обладает. Тем не менее, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Если полином $P(z)$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n^a$, то для любого $z \in [-1, 1]$ выполняется неравенство

$$\left| P'(z) \sin\left(\frac{1}{n} \arccos P(z)\right) \right| \leq n(a2^{1-n})^{1/n} \sqrt{1 - P^2(z)}. \quad (5)$$

Равенство в (5) для любого $z \in [-1, 1]$ достигается в случае $P(z) \equiv T_n^a(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По заданному полиному $P(z) \in \mathcal{P}_n^a$ построим функцию $w = g(\zeta)$ из (2) и рассмотрим обратную ей функцию $\zeta = h(w) = (a2^{1-n})^{1/n}w + \dots$. Пусть

$$\zeta_1 = e^{i\theta}, \quad \zeta_2 = e^{-i\theta}, \quad w_k = g(\zeta_k), \quad k = 1, 2, \quad 0 < \theta < \pi,$$

и пусть в точках w_k , $k = 1, 2$, существуют производные $h'(w_k)$, $k = 1, 2$, а в точках ζ_k , $k = 1, 2$, — производные $g'(\zeta_k)$, $k = 1, 2$. Применяя к функции $\zeta = h(w)$ результат Померенке и Васильева [7, следствие 3.3], [8, неравенство (1.1)] и выписывая его в терминах функции $w = g(\zeta)$, получаем

$$\left| \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{g(\zeta_1) - g(\zeta_2)} \right| \geq (a2^{1-n})^{-1/n} |g'(\zeta_1)g'(\zeta_2)|^{1/2}. \quad (6)$$

Положим $z = (\zeta_1 + 1/\zeta_1)/2 = (\zeta_2 + 1/\zeta_2)/2$. Простые вычисления дают

$$\begin{aligned} |\zeta_1 - \zeta_2| &= 2\sqrt{1 - z^2}, \quad |g(\zeta_1) - g(\zeta_2)| = 2 \left| \sin\left(\frac{1}{n} \arccos P(z)\right) \right|, \\ |g'(\zeta_k)| &= \frac{d|g|}{d|\zeta|} = \frac{1}{n} |\Phi(P(z))|^{1/n-1} \frac{|P'(z)| |(1 - \zeta_k^{-2})/2|}{\sqrt{1 - P^2(z)}} \\ &= \frac{1}{n} \frac{|P'(z)| \sqrt{1 - z^2}}{\sqrt{1 - P^2(z)}}, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Подставляя выписанные соотношения в (6), приходим к неравенству (5) для всех точек z отрезка $[-1, 1]$ за исключением, может быть, конечного числа таких точек. Предельным

переходом убеждаемся в справедливости неравенства (5) на всем отрезке $[-1, 1]$. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Неравенство (5) содержит неравенство (4). Действительно, обозначим $\cos((1/n) \times \arccos P(z))$ через ξ , так что $P(z) = T_n(\xi)$. Из неравенства (5) с привлечением леммы 4.1 работы [4] имеем последовательно

$$\begin{aligned} |P'(z)| &\leq n(a2^{1-n})^{1/n} \frac{\sqrt{1 - (T_n(\xi))^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\ &\leq n(a2^{1-n})^{1/n} \max\{\sqrt{|T'_n(\xi)|} : \xi \in [-1, 1]\} = n^2(a2^{1-n})^{1/n}. \end{aligned}$$

4. Неравенства для коэффициентов. Пусть, как и выше, $\zeta = h(w)$ – функция, обратная функции (2), где полином $P(z) \in \mathcal{P}_n^a$. Применяя к функции $\zeta = h(w)$ известные оценки коэффициентов для регулярных и однолистных функций, приходим к некоторым неравенствам для коэффициентов полинома $P(z)$. Ограничимся следующим результатом.

ТЕОРЕМА 4. Пусть полином

$$P(z) = az^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$$

принадлежит классу $\mathcal{P}_n^a$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} na + |a_{n-1}| &\leq n(2a)^{(n-1)/n}, \\ n^2 a^2 + |n^2 a^2 + 4naa_{n-2} - 2(n-1)a_{n-1}^2| &\leq n^2(2a)^{2(n-1)/n}. \end{aligned}$$

Равенство в обоих случаях достигается для полинома $T_n^a(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$w = \frac{(a2^{1-n})^{1/n}}{h(1/z)} = z + \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k}, \quad |z| > 1,$$

принадлежит классу $\sum_b$, $b = (a2^{1-n})^{1/n}$, работы Сайджека и Тамми [9]. В данной работе получены точные оценки всех коэффициентов в разложении обратной функции

$$z = I(w) = w - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k w^{-k}, \quad |w| > 1.$$

В частности, имеют место неравенства [9, с. 92]

$$|\beta_0| \leq 2(1-b), \quad |\beta_1| \leq 1-b^2. \quad (7)$$

Выписанные неравенства относятся к классическим, и они были доказаны также ранее другими авторами различными методами. Элементарные вычисления дают

$$I(w) = \frac{1}{g(b/w)} = w + \frac{2a_{n-1}b}{na} + \left[1 + \frac{4a_{n-2}}{na} - \frac{2(n-1)a_{n-1}^2}{n^2 a^2} \right] \frac{b^2}{w} + \dots,$$

где функция $w = g(\zeta)$ задана соотношением (2). Поэтому из неравенств (7) вытекают неравенства теоремы 4. В случае $P(z) = T_n^a(z)$ функция $\zeta = h(w)$ является функцией Пика, для которой в неравенствах (7), как известно, достигается знак равенства. Этим завершается доказательство теоремы 4.

Учитывая полученные здесь результаты, можно предположить, что полином $T_n^a(z)$ является экстремальным также в аналогичных задачах для более широкого класса полиномов (без ограничения на критические значения).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Milovanovic G. V., Mitrinovic D. S., Rassias Th. M. Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros. Singapore: World Scientific Publ., 1994.
- [2] Borwein P., Erdelyi T. Polynomials and Polynomial Inequalities. Grad. Texts in Math. V. 161. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [3] Govil N. K., Mahapatra R. N. Markov and Bernstein type inequalities for polynomials // J. Inequal. Appl. 1999. V. 3. P. 349–387.
- [4] Дубинин В. Н. Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 5. С. 16–43.
- [5] Goodman A. W. Univalent Functions. I. II. Tampa: Mariner Publ. Comp., 1983.
- [6] Дочев К. О некоторых экстремальных свойствах многочленов // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 3. С. 519–521.
- [7] Pommerenke Ch., Vasil'ev A. On bounded univalent functions and the angular derivative // Ann. Univ. Maria Curie-Sklodowska. Ser. A. 2000. V. 8. P. 79–106.
- [8] Pommerenke Ch., Vasil'ev A. Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partitions of the unit disk // Pacific J. Math. 2002. V. 206. № 2. P. 425–450.
- [9] Siejka H., Tammi O. On estimating the inverse coefficients for meromorphic univalent functions omitting a disc // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 1987. V. 12. P. 85–93.

Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило
25.02.2005