Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е. В. Жужома, О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 6, 813–826

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2655>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:52:11

УДК 513.83+517.9

О ПОВЕРХНОСТНЫХ АТТРАКТОРАХ И РЕПЕЛЛЕРАХ НА 3-МНОГООБРАЗИЯХ

В. З. Гринес, В. С. Медведев, Е. В. Жужома

Мы показываем, что если $f: M^3 \rightarrow M^3$ является A -дiffeоморфизмом с поверхностным двумерным аттрактором или репеллером $\mathcal{B}$, для которого $M_{\mathcal{B}}^2$ является носителем, тогда $\mathcal{B} = M_{\mathcal{B}}^2$ и существует $k \geq 1$ такое, что

- 1) $M_{\mathcal{B}}^2$ есть объединение $M_1^2 \cup \dots \cup M_k^2$ непересекающихся ручных поверхностей таких, что каждая поверхность M_i^2 гомеоморфна двумерному тору T^2 ;
- 2) ограничение f^k на M_i^2 , $i \in \{1, \dots, k\}$, сопряжено с автоморфизмом Аносова на торе T^2 .

Библиография: 28 названий.

1. Введение. Одним из важных вопросов теории динамических систем является изучение взаимосвязи между рассматриваемым классом систем и топологией несущих многообразий. Например, Франкс [1] и Ньюхаус [2] показали, что любой аносовский диффеоморфизм коразмерности 1 сопряжен с гиперболическим автоморфизмом тора (как следствие, многообразие, допускающее такие диффеоморфизмы, гомеоморфно тору T^n). Простое доказательство этого результата было недавно получено в работе [3] с помощью техники теории слоений.

Гринес и Жужома показали в [4] (результат анонсирован в [5]), что если замкнутое n -многообразие M^n , $n > 2$, допускает структурно устойчивый диффеоморфизм f с ориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности 1, то многообразие M^n гомотопно эквивалентно тору T^n и гомеоморфно T^n для $n \neq 4$. Кроме того, неблуждающее множество диффеоморфизма f не содержит нетривиальных базисных множеств, отличных от растягивающегося аттрактора коразмерности один. Это позволило классифицировать (с точностью до сопряженности) структурно устойчивые диффеоморфизмы с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один на T^n .

Отправной точкой для получения упомянутых выше результатов является существование так называемой гиперболической структуры на неблуждающем множестве диффеоморфизма. Более точно, пусть $f: M \rightarrow M$ является диффеоморфизмом замкнутого k -многообразия M , $k = \dim M \geq 2$, наделенного некоторой римановой метрикой ρ (все

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-00098, № 05-01-00501.

определения этого пункта могут быть найдены в [6] и [7]). Точка $x \in M$ является *неблуждающей*, если для любой окрестности U точки x пересечение $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ для бесконечного множества целых n . Тогда *неблуждающее множество* $NW(f)$ определяется как множество неблуждающих точек и является f -инвариантным и замкнутым. Замкнутое инвариантное множество $\Lambda \subset M$ называется *гиперболическим*, если существует непрерывное df -инвариантное разложение касательного подрааслоения $T_\Lambda M$ в сумму $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$ устойчивого и неустойчивого подрааслоений таких, что выполняются оценки

$$\|df^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad \forall v \in E_\Lambda^s, \quad \|df^{-n}(w)\| \leq C\lambda^n \|w\| \quad \forall w \in E_\Lambda^u, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

для некоторых фиксированных чисел $C > 0$ и $\lambda < 1$.

Для каждого $x \in \Lambda$ множества

$$W^s(x) = \left\{ y \in M : \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(f^j(x), f^j(y)) \rightarrow 0 \right\},$$

$$W^u(x) = \left\{ y \in M : \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(f^{-j}(x), f^{-j}(y)) \rightarrow 0 \right\}$$

являются гладкими инъективно вложенными подмногообразиями; при этом E_x^s и E_x^u являются касательными пространствами к W_x^s и W_x^u соответственно. Множества $W^s(x)$ и $W^u(x)$ называются соответственно *устойчивым* и *неустойчивым* многообразием точки x .

Для диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$ Смейл [8] ввел *аксиому A*: множество $NW(f)$ является гиперболическим и периодические точки плотны в $NW(f)$. Диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме *A*, называются *A-диффеоморфизмами*. Согласно теореме Смейла о спектральном разложении множество $NW(f)$ любого *A*-диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения непересекающихся так называемых базисных множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ таких, что каждое Ω_i является замкнутым, f -инвариантным и содержит плотную орбиту [8]. Следуя [9], пару (a, b) называют *типом* базисного множества Ω , если $a = \dim E_x^s$ и $b = \dim E_x^u$, где $x \in \Omega$.

Смейл привел несколько важных примеров базисных множеств различной топологической размерности:

- (a) нулевой размерности – подковы Смейла;
- (b) размерности один – соленоиды Смейла и их обобщение – соленоиды Смейла–Вильямса (см. [10], название предложено в [11]);
- (c) коразмерности один – растягивающиеся аттракторы и сжимающиеся репеллеры DA-диффеоморфизмов;
- (d) базисные множества транзитивных ановских диффеоморфизмов, чьи размерности совпадают с размерностями несущего многообразия (потому что они совпадают с этим многообразием).

Хорошо известно, что нет ограничений на топологию несущего многообразия, когда базисное множество $\mathcal{B}$ имеет нулевую размерность [12]. В случае ненулевой размерности базисного множества, ситуация, вообще говоря, другая, о чем говорят упомянутые выше примеры. В дополнение к ним отметим работу [13], в которой доказано, что неблуждающее множество *A*-диффеоморфизма замкнутого ориентируемого

3-многообразие M содержит заузленный соленоид Смейла тогда и только тогда, когда разложение M в связную сумму имеет линзовое пространство $L(p, q)$ с $p \neq 0, \pm 1$ в качестве простого слагаемого¹. Недавно этот результат был передоказан в [14].

Настоящая статья посвящена топологической классификации поверхностных базисных множеств A -дiffeоморфизмов на гладких замкнутых ориентируемых 3-многообразиях.

Введем понятие поверхностного базисного множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Базисное множество $\mathcal{B}$ A -дiffeоморфизма $f: M^3 \rightarrow M^3$ называется *поверхностным базисным множеством*, если $\mathcal{B}$ принадлежит f -инвариантной замкнутой поверхности $M_{\mathcal{B}}^2$, топологически вложенной в 3-многообразие M^3 .

f -инвариантная поверхность $M_{\mathcal{B}}^2$ называется *носителем* для $\mathcal{B}$.

По определению носитель не обязан быть связным. Однако существует некоторая степень диффеоморфизма f , для которой каждое поверхностное базисное множество имеет связный носитель.

Напомним, что базисное множество $\mathcal{B}$ A -дiffeоморфизма $f: M \rightarrow M$ называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества $\mathcal{B}$ такая, что

$$f(U) \subset \text{int } U, \quad \bigcap_{j \geq 0} f^j(U) = \mathcal{B}.$$

Если $\mathcal{B}$ является двумерным базисным множеством A -дiffeоморфизма f , заданного на замкнутом 3-многообразии M^3 , то согласно [16, теорема 3] $\mathcal{B}$ является либо аттрактором, либо репеллером.

Напомним, что аттрактор $\mathcal{B}$ A -дiffeоморфизма f , заданного на замкнутом многообразии M , называется *растягивающимся аттрактором*, если топологическая размерность $\dim \mathcal{B}$ равна размерности $\dim(E_{\mathcal{B}}^u)$ неустойчивого подрасслоения $E_{\mathcal{B}}^u$ (название предложено в [10], [17]). Сжимающийся репеллер диффеоморфизма f является растягивающимся аттрактором для f^{-1} . Ясно, что изучение сжимающегося репеллера аналогично изучению растягивающегося аттрактора и наоборот. Хорошо известно, что растягивающийся аттрактор коразмерности 1 состоит из $(\dim M - 1)$ -мерных неустойчивых многообразий $W^u(x)$, $x \in \mathcal{B}$, и локально гомеоморфен прямому произведению

¹Пусть M, M_1, M_2 — связные 3-многообразия. Напомним, что M является *связной суммой* M_1 и M_2 (обозначается $M = M_1 \# M_2$), если существуют замкнутые 3-диски $B_i \subset M_i$ и вложения $h_i: M_i - \text{Int } B_i \rightarrow M$, $i = 1, 2$, такие, что

$$h_1(M_1 - \text{Int } B_1) \cap h_2(M_2 - \text{Int } B_2) = h_1(\partial B_1) = h_2(\partial B_2), \\ M = h_1(M_1 - \text{Int } B_1) \cup h_2(M_2 - \text{Int } B_2).$$

При этом M_1, M_2 называются *слагаемыми*. 3-многообразие M называется *простым*, если из условия $M = M_1 \# M_2$ следует, что в точности одно многообразие из M_1 и M_2 должно быть гомеоморфно сфере. Хорошо известно (см., например, [15, теорема 3.15]), что каждое компактное 3-многообразие может быть представлено как связная сумма конечного числа простых слагаемых. Напомним, что линзовое пространство является простым многообразием (см. [13, упражнение 3.12]).

$(\dim M - 1)$ -мерного евклидова пространства и канторовского множества (см., например, [16, теорема 2]). Аналогичную структуру имеет сжимающийся репеллер коразмерности 1. Поэтому употребляется унифицирующее понятие *псевдоручного базисного множества* для растягивающегося аттрактора или сжимающегося репеллера.

Насколько мы знаем, является открытым следующий вопрос Смейла (см. [8, с. 785]): существует ли базисное множество коразмерности один, которое не является компактным подмногообразием и не устроено локально как прямое произведение евклидова пространства и канторовского множества?

В п. 2 мы докажем (в лемме 1), что поверхностный аттрактор (соответственно репеллер) $\mathcal{B}$ размерности два A -диффеоморфизма $f: M^3 \rightarrow M^3$ имеет тип $(2, 1)$ (соответственно $(1, 2)$). Отсюда следует, что $\mathcal{B}$ не является ни растягивающимся аттрактором, ни сжимающимся репеллером.

Кроме того, мы докажем в п. 2 (лемма 2), что двумерное базисное множество $\mathcal{B}$ совпадает с его носителем $M_{\mathcal{B}}^2$.

Таким образом, вопрос Смейла в рассматриваемом нами случае может быть сформулирован следующим образом: существует ли двумерный аттрактор (соответственно репеллер) с типом $(2, 1)$ (соответственно $(1, 2)$), отличный от компактного подмногообразия?

Заметим, что согласно [18] существует пример A -диффеоморфизма, заданного на замкнутом 3-многообразии, неблуждающее множество которого состоит из двумерного поверхностного базисного множества, носитель которого, вообще говоря, является не гладко вложенным 2-тором. Отметим также, что согласно [19], [20] существует диффеоморфизм Морса–Смейла $f: S^3 \rightarrow S^3$, обладающий f -инвариантной притягивающей поверхностью S , которая гомеоморфна сфере S^2 и дико вложена в S^3 (следует подчеркнуть, что S не является в этом случае базисным множеством диффеоморфизма f).

Однако первый результат нашей статьи утверждает, что носитель поверхностного базисного множества является объединением ручных торов.

Напомним определение ручной поверхности, вложенной в M^3 .

Пусть $D_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ – стандартный диск, и M^2 – поверхность, топологически вложенная в 3-многообразие M^3 . Поверхность M^2 называется *локально плоской* или *ручной*, если для каждой точки $x \in M^2$ существует окрестность U_x точки x в M^3 и гомеоморфизм $h_x: \overline{U_x} \rightarrow \mathbb{R}^3$ такой, что $h(U_x \cap M^2) = D_0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f: M^3 \rightarrow M^3$ является A -диффеоморфизмом с поверхностным двумерным базисным множеством $\mathcal{B}$ и $M_{\mathcal{B}}^2$ – носитель для $\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{B} = M_{\mathcal{B}}^2$ и существует число $k \geq 1$ такое, что $M_{\mathcal{B}}^2$ является объединением $M_1^2 \cup \dots \cup M_k^2$ непересекающихся ручных поверхностей, гомеоморфных тору T^2 .

Следующая теорема описывает динамику ограничения диффеоморфизма f на поверхностное базисное множество.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует число $k \geq 1$ такое, что ограничение f^k на M_i^2 , $i \in \{1, \dots, k\}$, сопряжено с ановским автоморфизмом тора T^2 .

2. Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 следует из лемм 1, 2 и 3, которые будут доказаны ниже.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{B}$ является двумерным поверхностным аттрактором (соответственно репеллером) A -диффеоморфизма f , заданного на 3-многообразии M^3 . Тогда $\mathcal{B}$ имеет тип $(2, 1)$ (соответственно $(1, 2)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим для определенности, что $\mathcal{B}$ – поверхностный аттрактор и $M_{\mathcal{B}}^2$ – носитель для $\mathcal{B}$. Согласно [16, теорема 1] для любой точки $z \in \mathcal{B}$ неустойчивое многообразие $W^u(x)$ принадлежит $\mathcal{B}$. Так как ограничение f на $\mathcal{B}$ транзитивно, то $\dim W^u(z)$ не зависит от выбора $z \in \mathcal{B}$. Напомним, что $\dim E_z^u = \dim W^u(z)$. Таким образом, достаточно доказать что $\dim W^u(z) = 1$.

Предположим противное. Так как $\dim W^u(z) \leq \dim \mathcal{B}$, то либо $\dim W^u(z) = 0$, либо $\dim W^u(z) = 2$.

Если $\dim W^u(z) = 0$, тогда $\mathcal{B}$ должно быть притягивающей орбитой диффеоморфизма f и, следовательно, нульмерным базисным множеством. Это противоречит предположению о том, что $\dim \mathcal{B} = 2$.

Предположим, что $\dim W^u(z) = 2$. Так как $\mathcal{B}$ – нетривиальное базисное множество, то оно содержит бесконечное множество $\text{Per}(f)|_{\mathcal{B}}$ периодических точек, которое плотно в $\mathcal{B}$. С другой стороны, так как $\mathcal{B}$ является поверхностным базисным множеством, то для любой точки $p \in \text{Per}(f)|_{\mathcal{B}}$ неустойчивое многообразие $W^u(p)$ принадлежит поверхности $M_{\mathcal{B}}^2$ и, следовательно, множество $W^u(p) \setminus \{p\}$ не содержит периодических точек диффеоморфизма f . Это противоречит тому, что множество $\text{Per}(f)|_{\mathcal{B}}$ плотно в $\mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{B}$ – двумерный аттрактор A -диффеоморфизма $f: M^3 \rightarrow M^3$.

Согласно Аносову [21] и Боуэну [22] существует число $k \geq 1$ такое, что базисное множество $\mathcal{B}$ может быть представлено как объединение замкнутых непересекающихся подмножеств $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ таких, что

$$f(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_{i+1} \quad (\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_1)$$

и для любой точки $z \in \mathcal{B}_i$ имеет место свойство: $\overline{W^u(z)} = \mathcal{B}_i$. Положим $g = f^k$.

Из доказательства леммы 1 следует, что $\dim W^u(z) = 1$ для любой точки $z \in \mathcal{B}_i$, и $W^u(z)$ принадлежит $\mathcal{B}_i$.

Обозначим F_i^u семейство неустойчивых многообразий $W^u(z)$ для всех точек $z \in \mathcal{B}_i$.

ЛЕММА 2. Пусть $f: M^3 \rightarrow M^3$ является A -диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого содержит двумерный аттрактор $\mathcal{B}$ с носителем $M_{\mathcal{B}}^2$. Тогда

- 1) $\mathcal{B} = M_{\mathcal{B}}^2$;
- 2) семейство F_i^u является непрерывным слоением без особенностей, заданным на M_i^2 ;
- 3) $M_{\mathcal{B}}^2$ является объединением $M_1^2 \cup \dots \cup M_k^2$ непересекающихся поверхностей таких, что каждая из них гомеоморфна 2-тору T^2 и $\mathcal{B}_i = M_i^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $g = f^k$.

Очевидно, что для любых $i \in \{1, \dots, k\}$ существует поверхность $M_i^2 \subseteq M^2$, которая является носителем для базисного множества $\mathcal{B}_i$ диффеоморфизма g . Покажем, что $\mathcal{B}_i = M_i^2$.

Так как по предположению $\dim \mathcal{B}_i = 2$ и $\mathcal{B}_i \subset M_i^2$, то $\mathcal{B}_i$ содержит непустое открытое (во внутренней топологии M_i^2) множество, назовем V (см. теорему 4.3 из [23]).

Пусть z – любая точка, принадлежащая $\text{int } V$. Согласно [8] существует $\alpha > 0$ такое, что у точки z есть замкнутая окрестность $U_z \subset V$, гомеоморфная прямому произведению $\tilde{W}_\alpha^s(z) \times W_\alpha^u(z)$, где $\tilde{W}_\alpha^s(z) = \mathcal{B} \cap W_\alpha^s(z)$ и $W_\alpha^s(z)$, $W_\alpha^u(z)$ – замкнутые α -окрестности точки z в некоторой внутренней метрике многообразий $W^s(z)$, $W^u(z)$ соответственно. Это значит, что для любой точки $w \in U_z$ существует единственная пара точек

$$w^s \in \tilde{W}_\alpha^s(z), \quad w^u \in W_\alpha^u(z) \quad \text{таких, что} \quad w = W^u(w^s) \cap W_\alpha^s(w^u).$$

Определим проекцию $\pi_z: U_z \rightarrow W^s(z)$ следующим образом. Для $w \in U_z$ положим $\pi_z(w) = w^s$.

Так как V – открытое подмножество поверхности M^2 , топологически вложенной в M^3 , то можно предположить без потери общности, что U_z гомеоморфно замкнутому 2-диску.

Положим $U_z^s = \pi_z(U_z)$. Покажем, что существует простой замкнутый путь $\gamma \subset U_z^s$ такой, что $z \in \text{int } \gamma$.

Хорошо известно (см., например, [24]), что любая замкнутая кривая является ручной на диске. Таким образом, существует открытая окрестность $D_z \subset U_z$ точки z такая, что

- 1) множество $W^u(z) \cap D_z$ состоит в точности из одной связной компоненты, скажем $\lambda \subset W^u(z)$;
- 2) множество $D \setminus \lambda$ состоит из двух связных компонент, скажем D_1, D_2 ;
- 3) $\pi(D_1) \cap \pi(D_2) = \emptyset$.

Выберем любые точки

$$z_1 \in \pi(D_1), \quad z_2 \in \pi(D_2).$$

Так как множества $D_1 \cup \lambda$, $D_2 \cup \lambda$ являются линейно-связными подмножествами и π – непрерывное отображение, то $\pi(D_1 \cup \lambda)$, $\pi(D_2 \cup \lambda)$ – также линейно-связные подмножества. Кроме того, так как $\pi(D_1 \cup \lambda)$, $\pi(D_2 \cup \lambda)$ являются хаусдорфовыми подпространствами (в индуцированной топологии), то существуют² простая дуга $\gamma_1 \subset \pi(D_1 \cup \lambda)$, соединяющая точки z_1, z , и простая дуга $\gamma_2 \subset \pi(D_2 \cup \lambda)$, соединяющая точки z_2, z . Тогда дуга $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ является простой дугой, соединяющей точки z_1 и z_2 . По построению $z \in \text{int } \gamma$.

Введем параметр $t \in [-1, 1]$ на дуге γ такой, что $\gamma(-1) = z_1$, $\gamma(0) = z$ и $\gamma(1) = z_2$. Для любого $t \in [-1, 1]$ определим $l_t = W_\alpha^u(\gamma(t))$ и положим

$$F_z^u = \bigcup_{t \in [-1, 1]} l_t.$$

Для любой точки $\gamma(t)$ неустойчивое многообразие $W_\alpha^u(\gamma(t))$ трансверсально пересекает устойчивое многообразие $W_\alpha^s(z)$ в единственной точке.

²См., например, [25, предложение 6.3.12(a)], которое утверждает, что хаусдорфово пространство линейно связно тогда и только тогда, когда для любых точек x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) существует гомеоморфное вложение $h: I \rightarrow X$ замкнутого единичного интервала $I = [0, 1]$ в пространство X , удовлетворяющее условиям $h(0) = x_1$, $h(1) = x_2$ (т.е. X является дугообразно связным).

Пусть $V_0(z)$ – диск, состоящий из всех точек, принадлежащих объединению кривых l_t , $t \in [-1, 1]$. Согласно теореме о непрерывной зависимости неустойчивых многообразий от начальных условий (см., например, [8]) семейство кривых F_z^u локально гомеоморфно семейству прямых, параллельных оси Ox на евклидовой плоскости, посредством некоторого гомеоморфизма $h_z: V_0(z) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Следовательно, F_z^u – непрерывное слоение, заданное на замкнутом диске $V_0(z)$.

Пусть $y \in \mathcal{B}_i$ – любая точка. Так как $W^u(y) = \mathcal{B}_i$, то существует точка $w \in \text{int } \gamma$ такая, что $[y, w]^u \subset W^u(y)$. Согласно теореме о непрерывной зависимости неустойчивых многообразий от начальных условий существуют открытые окрестности $U_w \subset \text{int } \gamma$ точки w и $U_y \subset M_i^2$ точки y такие, что для любой точки $y' \in U_y$ существует $w' \in U_w$ такая, что $[w', y']^u \subset W^u(w')$. Следовательно, точка y' принадлежит $\mathcal{B}_i$. Это означает, что множество $\mathcal{B}_i$ открыто. Так как $\mathcal{B}_i$ замкнуто, то оно совпадает с поверхностью M_i^2 . Так как $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ для $i \neq j$, то $M_i^2 \cap M_j^2 = \emptyset$.

Таким образом, $\mathcal{B} = M_{\mathcal{B}}^2$ и $M_{\mathcal{B}}^2$ является объединением $M_1^2 \cup \dots \cup M_k^2$ непересекающихся поверхностей.

Из приведенных выше рассуждений следует, что для любой точки $b \in \mathcal{B}_i$ существует окрестность U_b и гомеоморфизм $h_b: U_b \rightarrow \mathbb{R}^2$ такой, что h_b отображает пересечения кривых из F_i^u с окрестностью U_b на семейство прямых, параллельных оси Ox . Таким образом, семейство F_i^u является транзитивным слоением без особенностей, заданным на M_i^2 . Следовательно, поверхность M_i^2 гомеоморфна либо бутылке Клейна, либо тору. В силу [26] любое слоение без особенностей на бутылке Клейна должно иметь, по крайней мере, один замкнутый слой. Как следствие получаем, что бутылка Клейна не допускает транзитивных слоений. Таким образом, многообразие M_i^2 гомеоморфно тору, и лемма полностью доказана.

ЛЕММА 3. *Поверхность M_i^2 является ручной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства леммы 2 следует, что для любой точки $z \in M_i^2$ существует окрестность $V_0(z) \subset M_i^2$ такая, что

- 1) $V_0(z)$ гомеоморфна прямому произведению $\gamma \times W_\alpha^u(z)$, где γ – простая кривая, принадлежащая $W_\alpha^s(z)$;
- 2) $V_0(z)$ есть объединение гладких кривых $W_\alpha^u(w)$, $w \in \gamma$, которые принадлежат слоям слоения F_i^u и образуют слоение $\tilde{F}^u$ на окрестности $V_0(z)$;
- 3) любая кривая $W_\alpha^u(w)$ пересекает $W_\alpha^s(z)$ точно в одной точке;
- 4) кривая γ является локальной секущей (в топологическом смысле) для слоения $\tilde{F}^u$ ³.

Покажем, что существует окрестность B_z точки z , гомеоморфная 3-диску, и вложение $h_z: B_z \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что $h_z(B_z \cap V_0(z)) = D_0$.

Без потери общности мы можем предположить, что существует окрестность $\tilde{B}_z$ точки z , которая гомеоморфна 3-диску, такая, что

- 1) $W_\alpha^s(z) \subset \tilde{B}_z$, $V_0(z) \subset \tilde{B}_z$;

³Говорят, что γ есть *локальная секущая* (в топологическом смысле) для слоения $\tilde{F}^u$, если для любой точки $d \in \gamma$ существует окрестность $V_d \subset V_0(z)$ такая, что для любого слоя $l \subset \tilde{F}^u$ такого, что $(l \cap V_d) \neq \emptyset$, пересечение $(l \cap V_d) \cap \gamma$ состоит в точности из одной точки x_l и $V_d \setminus \gamma$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых содержит в точности одну компоненту множества $l \setminus \{x_l\}$.

- 2) существует диффеоморфизм $g: \overline{B_z} \rightarrow B_0^3$ такой, что $g(W_\alpha^s(z)) \subset Oxy$, $g(z) = O(0, 0, 0)$, где B_0^3 – замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^3$.

Положим

$$V = g(V_0(z)), \quad Q = g(W_\alpha^s(z))$$

и обозначим через $\hat{F}^u$ слоение, заданное на V , являющееся образом слоения $\tilde{F}^u$ при отображении g . По построению кривая $\lambda = g(\gamma)$ является локальной секущей (в топологическом смысле) для слоения $\hat{F}^u$. Выберем замкнутую простую дугу $\lambda_1 \subset \text{int } \lambda$, обозначим через a, b концевые точки дуги λ_1 . Обозначим через a_0 (b_0) точку, принадлежащую компоненте связности множества $\lambda \setminus \text{int } \lambda_1$, для которой точка a (b) принадлежит ее границе. Обозначим через $\gamma_{a_0 a}$ и $\gamma_{b b_0}$ простые замкнутые дуги, принадлежащие λ , для которых точки a_0, a и b, b_0 являются соответственно концевыми точками.

Покажем, что существуют простые кусочно-линейные дуги $\tilde{\gamma}_{a_0 a}$ и $\tilde{\gamma}_{b b_0}$ с концевыми точками a_0, a и b, b_0 соответственно, принадлежащие Q и удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\tilde{\gamma}_{a_0 a} \cap \tilde{\gamma}_{b b_0} = \emptyset$;
- 2) $\tilde{\gamma}_{a_0 a} \cap \lambda_1 = a$, $\tilde{\gamma}_{b b_0} \cap \lambda_1 = b$;
- 3) концевые точки каждого линейного звена кривой $\tilde{\gamma}_{a_0 a}$ (соответственно $\tilde{\gamma}_{b b_0}$) принадлежит кривой $\gamma_{a_0 a}$ (соответственно $\gamma_{b b_0}$).

Покажем существование кривой $\gamma_{a_0 a}$ (существование кривой $\gamma_{b b_0}$ устанавливается аналогично). Положим $\nu = \gamma_{a_0 a} \setminus \{a\}$ и выберем открытую окрестность $U_\nu \subset V$ множества ν такую, что

- 1) $U_\nu \cap (\lambda_1 \cup \gamma_{b b_0}) = \emptyset$;
- 2) U_ν допускает триангуляцию $\Sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} \sigma_i$ такую, что для любой точки $x \in U_\nu$ любая окрестность $U_x \subset U_\nu$ точки x пересекает только конечное число симплексов из объединения $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} \sigma_i$.

Введем параметр $t \in [0, \infty)$ на дуге ν такой, что $\nu(0) = a_0$ и $\nu(t)$ стремится к a при $t \rightarrow +\infty$.

Так как $\nu(t)$ стремится к a (при $t \rightarrow +\infty$), то существует последовательность чисел

$$0 = t_{i_0} < t_{i_1} < \dots < t_{i_k} < \dots, \quad t_{i_k} \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow +\infty,$$

такая, что

$$\nu(t_{i_k}) \in \sigma_{i_k}, \quad \sigma_{i_j} \cap \sigma_{i_{j+1}} \neq \emptyset, \quad \text{int } \sigma_{i_j} \cap \text{int } \sigma_{i_{j+1}} = \emptyset$$

и для любого $t > t_{i_k}$ точка $\nu(t)$ не принадлежит $\bigcup_{j \leq k} \sigma_{i_j}$. Обозначим l_k отрезок прямой, соединяющей точки $\nu(t_{i_k})$ и $\nu(t_{i_{k+1}})$, $k \in \mathbb{Z}^+$. По построению последовательность точек $\{\nu(t_{i_k})\}$ стремится к a при $k \rightarrow +\infty$. Тогда множество $\tilde{\gamma}_{a_0 a} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} l_i \cup \{a\}$ будет искомой кривой.

Без потери общности мы можем предположить, что существует число $N > 0$ такое, что для любого $c \in [-N, N]$ плоскость P_c , заданная уравнением $z = c$, пересекает любой слой слоения $\hat{F}^u$ в точности в одной точке.

Для любой точки $x \in \lambda$ обозначим через $\tilde{L}_x^u$ замкнутую дугу такую, что

- 1) $\tilde{L}_x \subset L_x^u$, где L_x^u есть слой слоения $\hat{F}^u$, проходящий через точку x ;
- 2) $\tilde{L}_x$ лежит между плоскостями $P_{-N} : z = -N$, $P_N : z = N$.

Тогда дуга $\tilde{L}_{\nu(t_{i_k})}^u$ может быть задана уравнениями

$$x = x_k(z), \quad y = y_k(z), \quad z = z, \quad z \in [-N, N]. \quad (1)$$

Заметим, что по построению точка $\nu(t_{i_k})$ имеет координаты $(x_k(0), y_k(0), 0)$.

Обозначим через S_k диск, определенный следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= x_k(z) + s_k(x_{k+1}(z) - x_k(z)), & y &= y_k(z) + s_k(y_{k+1}(z) - y_k(z)), \\ z &= z, \quad z \in [-N, N], & s_k &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Положим

$$S_{a_0a} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^+} S_k \cup \tilde{L}_a^u.$$

По конструкции S_{a_0a} является кусочно-гладким диском. Используя кусочно-линейную кривую $\tilde{\gamma}_{bb_0}$ построим кусочно-гладкий диск S_{bb_0} , аналогичный S_{a_0a} .

Положим

$$S_{ab} = \bigcup_{x \in \lambda_1} \tilde{L}_x^u, \quad S = S_{a_0a} \cup S_{bb_0} \cup S_{ab}, \quad \nu_{-N} = S \cap P_{-N}, \quad \nu_N = S \cap P_N.$$

Нетрудно найти гладко вложенные диски S_1, S_2 такие, что

- 1) S_1, S_2 трансверсально пересекают каждую плоскость $P_c, c \in [-N, N]$;
- 2) $\text{int } S_i \cap \text{int } S = \emptyset, S_i \cap S = \tilde{L}_{a_0}^u \cup \tilde{L}_{b_0}^u, i = 1, 2$;
- 3) $\text{int } S_1 \cap \text{int } S_2 = \emptyset, S_1 \cap S_2 = \tilde{L}_{a_0}^u \cup \tilde{L}_{b_0}^u$;
- 4) граница диска S_i состоит из кривых $\tilde{L}_{a_0}^u, \tilde{L}_{b_0}^u$ и кривых $\nu_{-N}^i = S_i \cap P_{-N}, \nu_N^i = S_i \cap P_N, i = 1, 2$.
- 5) кривые ν_{-N}^1, ν_{-N}^2 (соответственно ν_N^1, ν_N^2) образуют границу замкнутого диска $D_{-N} \subset P_{-N}$ (соответственно $D_N \subset P_N$), который содержит кривую ν_{-N} (соответственно ν_N), делящую диск D_{-N} (соответственно D_N) на два диска: диск D_{-N}^1 , ограниченный кривыми ν_{-N}, ν_{-N}^1 и диск D_{-N}^2 , ограниченный кривыми ν_{-N}, ν_{-N}^2 (соответственно диск D_N^1 ограниченный кривыми ν_N, ν_N^1 и диск D_N^2 , ограниченный кривыми ν_N, ν_N^2).

Обозначим через B_i замкнутое множество, ограниченное объединением $S \cup S_i \cup D_{-N}^i \cup D_N^i$.

Так как пересечение множеств $B_i \cap P_c$ гомеоморфно стандартному диску D_0 , то B_i гомеоморфно $D_0 \times [-N, N]$ и, следовательно, B_i гомеоморфно стандартному шару

$$B_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Тогда существует окрестность U_S диска S такая, что $U_S \cap B_1$ (соответственно $U_S \cap B_2$) гомеоморфна $D_0 \times [-1, 0]$ (соответственно $D_0 \times [0, 1]$). Таким образом существует окрестность U_O точки O и гомеоморфизм $h_O: \overline{U_O} \rightarrow \mathbb{R}^3$ такой, что $h_O(U_O \cap S)$ является стандартным замкнутым диском D_0 .

Множество $B_z = g^{-1}(U_O)$ является окрестностью точки z в M^3 и отображение $h_z = h_O \circ g: B_z \rightarrow \mathbb{R}^3$ удовлетворяет следующему условию: $h_z(B_z \cap V_0(z))$ является стандартным замкнутым диском D_0 . Это означает, что поверхность M_i^2 ручная. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 2 следует из лемм 4 и 5, которые будут доказаны ниже.

Для любой точки $x \in M_i^2$ положим

$$L_i^s(x) = W^s(x) \cap M_i^2$$

и обозначим

$$F_i^s = \bigcup_{x \in M_i^2} L_i^s(x).$$

Из локальной структуры прямого произведения и доказательства леммы 2 следует, что существует $\alpha > 0$ такое, что для любой точки $z \in M_i^2$ существует окрестность $V_0(z)$ такая, что

- 1) $W_\alpha^u(z) \subset V_0(z)$ и для любой точки $y \in W_\alpha^u(z)$ пересечение $W_\alpha^s(y) \cap V_0(z)$ является простой кривой γ_y^s ;
- 2) семейство кривых $\bigcup_{y \in W_\alpha^u(z)} \gamma_y^s$ является непрерывным слоением на окрестности $V_0(z)$, т.е. существует гомеоморфизм $q_z: V_0(z) \rightarrow \mathbb{R}^2$, отображающий семейство $\bigcup_{y \in W_\alpha^u(z)} \gamma_y^s$ в семейство прямых линий, параллельных оси Ox на плоскости $\mathbb{R}^2$;
- 3) любая кривая γ_y^s является локальной трансверсалью (в топологическом смысле) к слоению F_i^u .

Так как $\mathcal{B}_i = M_i^2$ и для любой точки $x \in \mathcal{B}_i$ пересечение $W^s(x) \cap \mathcal{B}_i$ плотно в $\mathcal{B}_i$, то любой слой слоения F_i^s плотен в M_i^2 . Таким образом, F_i^s является транзитивным слоением без особенностей на торе M_i^2 .

Представим тор M_i^2 как фактор-пространство $\mathbb{R}^2/\Gamma$, где Γ – дискретная группа движений $\gamma_{m,n}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, заданных формулами

$$\gamma_{m,n}: \quad \bar{x} = x + m, \quad \bar{y} = y + n, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow M_i^2$ естественную проекцию и через g_* – автоморфизм группы Γ , индуцированный диффеоморфизмом g ($g = f^k$). Заметим, что автоморфизм g_* можно задать следующим образом. Пусть $\bar{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – накрывающий диффеоморфизм для $g: M_i^2 \rightarrow M_i^2$, т.е. $\pi \circ \bar{g} = g \circ \pi$, и предположим, что $\bar{g}$ задан формулами

$$\bar{g}: \quad \bar{x} = g_1(x, y), \quad \bar{y} = g_2(x, y).$$

Тогда для любого $\gamma_{m,n} \in \Gamma$ положим

$$g_*(\gamma_{m,n}) = \gamma_{m',n'}, \quad \text{где } m' = g_1(m, n) - g_1(0, 0), \quad n' = g_2(m, n) - g_2(0, 0).$$

ЛЕММА 4. Автоморфизм g_* является гиперболическим, т.е. собственные значения λ_1, λ_2 матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}),$$

задающей автоморфизм g_* , удовлетворяют условию $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слоения F_i^u и F_i^s транзитивны и трансверсальны на торе M_i^2 . Это означает, что они образуют транзитивную 2-ткань на M_i^2 . Тогда согласно [27, теорема 1], существуют различные иррациональные числа μ^u, μ^s (которые являются числами вращения Пуанкаре слоений F_i^u и F_i^s соответственно) и гомеоморфизм $\varphi: M_i^2 \rightarrow M_i^2$ такой, что φ отображает слоения F_i^u и F_i^s в линейные слоения L_{μ^u} и L_{μ^s} соответственно (слоение L_{μ^σ} есть образ при проекции π слоения $\bar{L}_{\mu^\sigma}$, каждый слой которого задается уравнением $y = \mu^\sigma x + c$, $\sigma \in \{u, s\}$, $c \in \mathbb{R}^1$).

Обозначим через $\bar{F}_i^\sigma$ слоение на $\mathbb{R}^2$, которое является накрывающим для слоения F_i^σ , $\sigma \in \{s, u\}$. Тогда имеется накрывающий гомеоморфизм $\bar{\varphi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ для гомеоморфизма φ , отображающий слоения $\bar{F}_i^u$ и $\bar{F}_i^s$ в линейные слоения $\bar{L}_{\mu^u}$ и $\bar{L}_{\mu^s}$ соответственно. Отсюда следует, что любой слой l^u слоения $\bar{F}_i^u$ пересекает любой слой l^s слоения $\bar{F}_i^s$ в точности в одной точке.

Покажем теперь, что автоморфизм g_* является гиперболическим. Предположим противное. Пусть $p \in \text{Per}(g)$ – периодическая точка периода $m \geq 1$. Без ограничения общности можно предположить, что $p = \pi(O)$ (где O – начало евклидовой системы координат на плоскости). Обозначим через $\bar{g}_m$ накрывающий гомеоморфизм для g^m такой, что $\bar{g}_m(O) = O$. Множество $\theta = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(O)$ есть решетка на плоскости $\mathbb{R}^2$. Матрица A^m определяет автоморфизм g_*^m . Обозначим $\mathcal{A}_m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ линейное отображение, определенное матрицей A^m . Из определения g_* следует, что $\bar{g}_m|_\theta = \mathcal{A}_m|_\theta$. Так как модуль собственных значений матрицы A^m равен 1, то имеется периодическая точка $O_1 \in \theta$ ($O_1 \neq O$) некоторого периода $l \geq 1$ отображения $\mathcal{A}_m|_\theta$. Следовательно, O_1 есть периодическая точка периода l диффеоморфизма $\bar{g}_m$. Тогда точки O, O_1 являются неподвижными точками диффеоморфизма $\bar{g}_m^l$. Обозначим через l_O^u (соответственно $l_{O_1}^s$) слой слоения $\bar{F}_i^u$ (соответственно $\bar{F}_i^s$), проходящий через точку O (соответственно O_1). Так как $l_O^u \cap l_{O_1}^s \neq \emptyset$ и $l_O^u, l_{O_1}^s$ являются инвариантными неустойчивым и устойчивым многообразиями неподвижных седловых (в топологическом смысле) точек O, O_1 соответственно, то имеется бесконечное множество гетероклинических точек диффеоморфизма $\bar{g}_m^l$, принадлежащих пересечению $l_O^u \cap l_{O_1}^s$. Получаем противоречие с тем, что $l_O^u \cap l_{O_1}^s$ состоит в точности из одной точки. Лемма доказана.

Обозначим $\mathcal{G}$ линейный автоморфизм тора M_i^2 такой, что $\mathcal{G}_* = g_*$.

Согласно [1, предложение 2.1] существует непрерывное гомотопное тождественному отображение $h: M_i^2 \rightarrow M_i^2$ такое, что $\mathcal{G}h = hg$.

ЛЕММА 5. *Отображение h есть гомеоморфизм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{h}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – накрывающее отображение для h . Разделим доказательство леммы на три шага.

Шаг 1. Покажем, что если точки $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2$, $\bar{x} \neq \bar{y}$, принадлежат одному и тому же слою l^σ слоения $\bar{F}_i^\sigma$, то $\bar{h}(\bar{x}) \neq \bar{h}(\bar{y})$, $\sigma \in \{s, u\}$.

Рассмотрим для определенности случай $\sigma = u$ (для $\sigma = s$ доказательство аналогично) и предположим противное. Пусть имеется слой l^u слоения $\bar{F}_i^u$ и точки $\bar{x}, \bar{y} \in l^u$ такие, что $\bar{h}(\bar{x}) = \bar{h}(\bar{y})$. Положим $x = \pi(\bar{x})$, $y = \pi(\bar{y})$, $L^u = \pi(l^u)$ и обозначим через $[x, y]^u \subset L^u$ замкнутую дугу с концевыми точками x, y . Пусть p – любая периодическая точка некоторого периода $l \geq 1$ ограничения диффеоморфизма g на M_i^2 . Обозначим L_p^s слой слоения F_i^s , проходящий через точку p . Мы имеем две возможности:

- а) точка p принадлежит $[x, y]^u$;

б) точка p не принадлежит $[x, y]^u$.

Поскольку слой L_p^s плотен на поверхности M_i^2 , то в случае б) имеется точка $v \in L_p^s \cap (x, y)^u$.

Следовательно, имеются два случая:

а) существует точка $\bar{p} \in \pi^{-1}(p)$, принадлежащая дуге $[\bar{x}, \bar{y}]^u \subset l^u$;

б) имеются точки $\bar{p} \in \pi^{-1}(p)$, $\bar{v} \in \pi^{-1}(v)$ такие, что $\bar{p}$ и $\bar{v}$ принадлежат одному и тому же слою слоения $\bar{F}^s$ и точка $\bar{v}$ принадлежит дуге $(\bar{x}, \bar{y})^u \subset l^u$.

Рассмотрим поднятие $\bar{g}_l$ диффеоморфизма g^l такое, что $\bar{g}_l(\bar{p}) = \bar{p}$. Тогда в обоих случаях а) и б) мы имеем

$$\rho(\bar{g}_l^n(\bar{x}), \bar{g}_l^n(\bar{y})) \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Заметим, что согласно [1, лемма 3.4] отображение $\bar{h}$ является собственным⁴. Следовательно, согласно [28] имеется число $r > 0$ такое, что для любых точек $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условию $\bar{h}(\bar{x}_1) = \bar{h}(\bar{x}_2)$, имеет место⁵ неравенство $\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < r$. Так как $\mathcal{G}^l \circ h = h \circ g^l$ и h гомотопен тождественному, то существует накрывающее отображение $\bar{\mathcal{G}}_l$ для линейного диффеоморфизма $\mathcal{G}^l$ такое, что $\bar{\mathcal{G}}_l \circ \bar{h} = \bar{h} \circ g_l$. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеем $\bar{h}(\bar{g}^n(\bar{x})) = \bar{\mathcal{G}}_l^n(\bar{h}(\bar{x})) = \bar{\mathcal{G}}_l^n(\bar{h}(\bar{y})) = \bar{h}(\bar{g}^n(\bar{y}))$. Следовательно, $\rho(\bar{g}^n(\bar{x}), \bar{g}^n(\bar{y})) < r$. Получаем противоречие с тем, что $\rho(\bar{g}_l^n(\bar{x}), \bar{g}_l^n(\bar{y})) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Шаг 2. Так как $\mathcal{G}$ – линейный гиперболический автоморфизм тора, то через каждую точку $x \in M_i^2$ проходят два трансверсальных многообразия: устойчивое $W^s(x)$ и неустойчивое $W^u(x)$, которые являются образами проекции $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow M_i^2$ прямых линий $w^s(\bar{x})$, $w^s(\bar{y})$ соответственно, проходящих через любую точку $\bar{x} \in \pi^{-1}(x)$.

Покажем, что для любой точки $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ справедливо свойство:

$$\bar{h}(l_{\bar{x}}^\sigma) = w^\sigma(\bar{h}(\bar{x})),$$

где $l_{\bar{x}}^\sigma$ – слой слоения $\bar{F}_i^\sigma$.

Рассмотрим для определенности случай $\sigma = s$ (в случае $\sigma = u$ доказательство аналогично). Сначала покажем, что $\bar{h}(l_{\bar{x}}^s) \subset W^s(\bar{h}(\bar{x}))$. Пусть $\bar{y}$ – любая точка, принадлежащая $l_{\bar{x}}^s$ ($\bar{y} \neq \bar{x}$). Положим $x = \pi(\bar{x})$, $y = \pi(\bar{y})$. Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(g^n(x), g^n(y)) \rightarrow 0$ (d – метрика на торе M_i^2), то из непрерывности отображения h следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(h(g^n(x)), h(g^n(y))) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\mathcal{G}^n(h(x)), \mathcal{G}^n(h(y))) = 0.$$

Отсюда следует, что $h(y) \subset W^s(h(x))$. Так как $\bar{h}$ является накрывающим отображением для h , то $\bar{h}(l_{\bar{x}}^s) \subset w^s(\bar{h}(\bar{x}))$.

⁴Отображение $\bar{h}$ называется *собственным*, если прообраз компактного множества является ограниченным множеством.

⁵Для удобства читателя мы повторяем здесь рассуждение из [28]. Действительно, поскольку отображение $\bar{h}$ является собственным, то имеется $r > 0$ такое, что прообраз фундаментальной области Π группы Γ принадлежит открытому диску $D_{r/2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2/4\}$. Пусть $\gamma \in \Gamma$ такой, что $\gamma(\bar{h}(\bar{x}_1)) \in \Pi$. Так как отображение h гомотопно тождественному и $\bar{h}(\bar{x}_1) = \bar{h}(\bar{x}_2)$, то $\gamma(\bar{h}(\bar{x}_1)) = \gamma(\bar{h}(\bar{x}_2))$, $\bar{h}(\gamma(\bar{x}_1)) = \bar{h}(\gamma(\bar{x}_2))$. Отсюда следует, что $\rho(\gamma(\bar{x}_1), \gamma(\bar{x}_2)) < r$. Поскольку отображение γ является изометрией на $\mathbb{R}^2$, то $\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < r$.

Покажем теперь, что $\bar{h}(l_x^s) = w^s(\bar{h}(\bar{x}))$. Предположим противное. Так как $\bar{h}(w^s(\bar{x}))$ является связным множеством, содержащим точку $\bar{h}(\bar{x})$, и принадлежит прямой линии $w^s(\bar{h}(\bar{x}))$, то образ при отображении $\bar{h}$, по крайней мере, одной из компонент множества $l_x^s \setminus \bar{x}$ является ограниченным подмножеством прямой линии $w^s(\bar{h}(\bar{x}))$. Это противоречит тому, что отображение $\bar{h}$ является собственным.

Шаг 3. Покажем, что отображение h является гомеоморфизмом. Из выше доказанного следует, что

- 1) любая точка $\bar{x}$ плоскости $\mathbb{R}^2$ является единственной точкой пересечения $l_x^s \cap l_x^u$ и $w^s(\bar{x}) \cap w^u(\bar{x})$;
- 2) ограничение отображения $\bar{h}$ на каждую из кривых l_x^s, l_x^u является взаимнооднозначным отображением на $w^s(\bar{h}(\bar{x})), w^u(\bar{h}(\bar{x}))$ соответственно.

Из свойств 1) и 2) следует, что отображение $\bar{h}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ является взаимнооднозначным.

Тогда отображение $h: M_i^2 \rightarrow M_i^2$ является взаимнооднозначным и непрерывным отображением и, как легко видеть, является гомеоморфизмом.

Лемма полностью доказана.

Работа была в основном написана, когда первый и третий авторы находились в университетах городов Нанта и Ренна соответственно в марте–июне 2004 года. Они благодарят CNRS, который сделал эти пребывания возможными. Они хотели бы также поблагодарить Франсуа Лауденбаха и Андрея Пажитнова, Вадима Каймановича и Антона Зорича за очень плодотворные обсуждения и гостеприимство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Franks J. Anosov diffeomorphisms // Global Analysis. Proc. of Symposia in Pure Math. V. 14. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1970. P. 61–94.
- [2] Newhouse S. On codimension one Anosov diffeomorphisms // Amer. J. Math. 1970. V. 92. № 3. P. 761–770.
- [3] Hiraide K. A simple proof of the Franks–Newhouse theorem on codimension one Anosov diffeomorphisms // Ergodic Theory Dynamical Systems. 2001. V. 21. P. 801–806.
- [4] Grines V., Zhuzhoma E. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors // Trans. Amer. Math. Soc. 2005. V. 357. № 2. P. 617–667.
- [5] Гринес В.З., Жужома Е.В. Огрубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 6. С. 735–737.
- [6] Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Encyclopedia of Math. and its Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
- [7] Robinson C. Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. 2nd edition. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999.
- [8] Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 1. P. 741–817.
- [9] Abraham R., Smale S. Nongenericity of Ω -stability // Global Analysis. Proc. of Symposia in Pure Math. V. 14. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1970. P. 5–8.
- [10] Williams R. F. One-dimensional non-wandering sets // Topology. 1967. V. 6. P. 473–487.
- [11] Pesin Y. Dimension Theory in Dynamical Systems, Contemporary Views and Applications. Chicago: Univ. of Chicago Press 1997.
- [12] Shub M., Sullivan D. Homology theory and dynamical systems // Topology. 1975. V. 14. P. 109–132.
- [13] Bothe H. The ambient structure of 1-dimensional hyperbolic structure in 3-manifolds. V. 81. Berlin: Inst. Math., Akad. Wissensch. DDR, 1981.

- [14] Jiang B., Ni Y., Wang S. 3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. V. 356. № 11. P. 4371–4382.
- [15] Hempel J. 3-Manifolds. Ann. of Math. Studies. V. 86. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1976.
- [16] Плыкин Р. В. О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С. Смейла // Матем. сб. 1971. Т. 84. № 2. С. 301–312.
- [17] Williams R. F. Expanding attractors // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 169–203.
- [18] Kaplan J., Mallet-Paret J. Yorke J. The Lyapunov dimension of nowhere differentiable attracting torus // Ergodic Theory Dynamical Systems. 1984. V. 4. № 2. P. 261–281.
- [19] Pixton D. Wild unstable manifolds // Topology. 1977. V. 16. P. 167–172.
- [20] Bonatti C., Grines V. Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // J. Dynamical Control Systems. 2000. V. 6. № 4. P. 579–602.
- [21] Аносов Д. В. Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Качественные методы. Киев 1970. Т. 2. С. 39–45.
- [22] Bowen R. Periodic points and measures for axiom A-diffeomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 154. P. 377–397.
- [23] Hurewicz W., Wallman H. Dimension Theory. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1984.
- [24] Moise Ed. E. Geometric Topology in Dimensions 2 and 3. Graduate Texts in Math. V. 47. New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1977.
- [25] Engelking R. General Topology. Berlin: Helderman-Verlag, 1989.
- [26] Knezer H. Reguläre Kurvenscharen auf Ringflächen // Math. Ann. 1924. V. 91. P. 135–154.
- [27] Aranson S., Grines V., Kaimanovich V. Classification of supertransitive 2-webs on surfaces // J. Dynamical Control Systems. 2003. V. 9. № 4. P. 455–468.
- [28] Franks J. Anosov diffeomorphisms on tori // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 145. P. 117–124.

(В.З. Гринес) Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия
 (В.С. Медведев) Научно-исследовательский институт
 прикладной математики и кибернетики при Нижегородском
 государственном университете им. Н. И. Лобачевского
 (Е.В. Жужома) Нижегородский государственный политехнический университет
E-mail: grines@vmk.unn.ru, medvedev@uic.nnov.ru, zhuzhoma@mail.ru

Поступило
 07.02.2005