Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Икромов, Демпфированные осцилляторные интегралы и максимальные операторы, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 6, 833–852

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2656>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:43:05

УДК 517.518.5

ДЕМПФИРОВАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И МАКСИМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

И. А. Икромов

В данной работе рассматриваются оценки преобразования Фурье борелевских мер, сосредоточенных на аналитических гиперповерхностях и содержащих множитель гашения. Множители гашения определяются через главные кривизны поверхности. Полученные оценки применяются к проблеме об ограниченности соответствующих максимальных операторов.

Библиография: 25 названий.

1. Введение. Одним из классических результатов действительного анализа является так называемая максимальная теорема Стейна о сферических средних в $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$ (см. [1]). Позднее, аналог теоремы Стейна для плоского случая был доказан Бургеном в работе [2]. Эти результаты стали отправной точкой для изучения различного класса максимальных операторов, связанных с подмногообразиями евклидова пространства. В данной работе рассматриваются максимальные операторы, определенные соотношением

$$Mg(x) = \sup_{t>0} \left| \int_S g(x - ty) \psi(y) d\sigma(y) \right|, \quad (1)$$

где $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – гладкая гиперповерхность, ψ – фиксированная неотрицательная функция с компактным носителем, $d\sigma$ – индуцированная лебегова мера на S и $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Через $L^p := L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ обозначается множество измеримых функций f , определенных в $\mathbb{R}^{n+1}$, для которых $|f(x)|^p$ интегрируема по $\mathbb{R}^{n+1}$.

Говорят, что оператор M *ограничен в L^p* (или *L^p -ограничен*), если существует положительное число C такое, что для любого $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ выполняется неравенство $\|Mg\|_{L^p} \leq C \|g\|_{L^p}$. Так как ψ имеет компактный носитель, то рассматриваемые операторы ограничены в L^∞ . Поэтому, если максимальный оператор ограничен в L^p для некоторого конечного $p = p_0$, то согласно интерполяционной теореме он ограничен в L^p для любого $p > p_0$ [3]. В дальнейшем через $p(S)$ обозначается минимальное число такое, что для любого $p > p(S)$ максимальный оператор (1) ограничен в L^p (разумеется, возможен случай $p(S) = \infty$).

Максимальные операторы вида (1) исследовались в работах многих авторов [4]. Гринлиф [5] доказал, что если S строго выпуклая и звездная относительно начала координат гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$ (это означает, что любой луч исходящий из начала координат пересекается с поверхностью в единственной точке и $K(x) \neq 0$, где $K(x)$ – гауссова кривизна поверхности), и $\psi \neq 0$, то $p(S) = (n+1)/n$. Более того, как он показал, если в каждой точке поверхности S имеются хотя бы k , $k \geq 2$, ненулевые

главные кривизны, то $p(S) \leq (k+1)/k$. В более сложном случае $k = 1$ аналогичный результат получен Согги [6].

В работе [3] Согги и Стейна доказано, что если гауссова кривизна поверхности не имеет нулей бесконечного порядка, то $p(S) < \infty$. Однако, как показывают примеры, оценка, указанная для $p(S)$ в этой работе, далека от его точного значения. В работах [5], [7]–[10] получено точное значение $p(S)$ для некоторых выпуклых гиперповерхностей.

В общем случае проблема об ограниченности максимальных операторов до сих пор остается открытой.

Известно, что L^p -оценки максимальных операторов связаны с поведением осцилляторных интегралов следующего вида:

$$\int_S e^{i(\xi, x)} \psi(x) d\sigma(x). \quad (2)$$

Точнее, чтобы получить L^p -оценки для максимального оператора, необходимо иметь равномерные (относительно направлений вектора ξ) оценки для соответствующего осцилляторного интеграла (2) при больших значениях $|\xi|$. Равномерные оценки осцилляторных интегралов исследовались в различных работах. Как известно, [11]–[13] в зависимости от особенностей фазовой функции (ξ, x) убывание осцилляторного интеграла (2) на бесконечности может быть довольно медленным. Вот почему Согги и Стейн [3] ввели следующие демпфированные осцилляторные интегралы:

$$\int_S e^{i(\xi, x)} |K(x)|^q \psi(x) d\sigma(x), \quad (3)$$

где $K(x)$ – гауссова кривизна поверхности в точке $x \in S$.

Они доказали, что если $q \geq 2n$, то интеграл (3) убывает как $O(|\xi|^{-n/2})$ при $|\xi| \rightarrow +\infty$. Откуда с использованием свойства интегрируемости гауссовой кривизны с некоторой отрицательной степенью получена оценка для $p(S)$. Аналогичные интегралы в случае выпуклых гиперповерхностей рассмотрены в работе [14]. С другой стороны, как показывают результаты Гринлифа и Согги [5], [6], существует гиперповерхность со свойством $p(S) < \infty$, но с нулевой гауссовой кривизной. Таким образом, условие конечности порядка всех нулей гауссовой кривизны далеко не необходимо.

Отсюда возникает естественная

ЗАДАЧА. Если у гиперповерхности S не все главные кривизны тождественно равны нулю, то что можно сказать об L^p -ограниченности соответствующего максимального оператора?

Ясно, что в общем случае, степень гауссовой кривизны в качестве множителя гашения не дает никаких результатов.

Паламодов обратил внимание автора к другим, более естественным семействам множителей гашения [15]. В данной работе мы рассмотрим оценку осцилляторных интегралов с множителем гашения, содержащимся в таких семействах, и получим решение проблемы ограниченности для более широкого класса максимальных операторов.

Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – любая аналитическая гиперповерхность. Для точки $x \in S$ через

$$G(x) = \{g_{ij}(x)\} \quad \text{и} \quad A(x) = \{a_{ij}(x)\}$$

обозначаются матрицы первой и второй фундаментальной формы поверхности S соответственно. Естественно определяется тензор $\{g^{ij}(x)\}$ [16].

Пусть D – тензор, получаемый внешним умножением $A(x)$ на само себя: $A(x) \wedge A(x)$. Тензор $D = \{d_{i_1 i_2 i_3 i_4}\}$ является тензором ранга $(0, 4)$.

Введем функции, определенные следующими равенствами:

$$\begin{aligned}\Lambda_1(x) &:= \sum g^{i_1 j_1}(x) g^{i_2 j_2}(x) a_{i_1 i_2}(x) a_{j_1 j_2}(x), \\ \Lambda_2(x) &:= \sum g^{i_1 j_1}(x) g^{i_2 j_2}(x) g^{i_3 j_3}(x) g^{i_4 j_4}(x) d_{i_1 i_2 i_3 i_4}(x) d_{j_1 j_2 j_3 j_4}(x).\end{aligned}$$

В этих формулах производится суммирование по всем индексам.

Заметим, что если S – аналитическая гиперповерхность, то выше определенные функции аналитичны на S . Демпфирующие множители (множители гашения) определяются следующей формулой:

$$\Lambda(x) := \Lambda_1(x)^{q_1/2} \Lambda_2(x)^{q_2/4},$$

где q_1, q_2 – фиксированные неотрицательные вещественные числа, удовлетворяющие условиям $q_1 + q_2 = 1$ и $q_2 > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В качестве Λ_1, Λ_2 можно взять любые ненулевые элементы идеалов I_1^2, I_2^2 , где I_1 (соответственно I_2) – локальный идеал, порожденный элементами матрицы $A(x)$ (соответственно $A(x) \wedge A(x)$), и по ним определить аналогичные демпфирующие множители. Однако эти множители не улучшают нашу оценку для $p(S)$.

Справедлива следующая теорема об ограниченности максимальных операторов.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – аналитическая гиперповерхность, $\psi \in C_0^\infty(S)$ – фиксированная неотрицательная функция и M – максимальный оператор, определенный равенством (1). Если $\Lambda_1^{-\beta/2} \in L_{\text{loc}}^1(S)$ (где $\beta > 0$ – фиксированное число), а также Λ_2 – ненулевая аналитическая функция, то максимальный оператор M ограничен в L^p для любого $p > p(\beta) := 2 + 3/(2\beta)$. Иными словами, при этих условиях справедлива оценка $p(S) \leq p(\beta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Теорема 1.1 обобщает результат Согги и Стейна [3]. Более того, если гауссова кривизна поверхности не имеет нулей бесконечного порядка, то мы получим более точную оценку для $p(S)$. В частности, из теоремы 1.1 вытекает, что если у поверхности S все главные кривизны, за исключением хотя бы двух, тождественно равны нулю, то $p(S) \leq p(\beta) < \infty$. Таким образом, теорема 1.1 улучшает также результат Гринлифа [5], который рассмотрел случай, когда в каждой точке поверхности имеются хотя бы $k, k \geq 2$, ненулевые главные кривизны. Отметим, что в нашем случае в некотором собственном аналитическом множестве все главные кривизны могут обратиться в нуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Заметим, что если $\Lambda_2 \equiv 0$, то согласно теореме Хартмана и Ниренберга [17] гиперповерхность имеет специальный вид и соответствующее преобразование Фурье с любым ненулевым множителем не может убывать быстрее $O(|\xi|^{-1/2})$ при $|\xi| \rightarrow +\infty$. Следовательно, в этом случае метод демпфированных осцилляторных интегралов неприменим к проблеме об ограниченности соответствующих максимальных операторов. Хотя, если для любого $x \in S$ выполняется условие $\Lambda_1(x) \neq 0$, то согласно теореме Согги [6] максимальный оператор ограничен в L^p при любом $p > 2$. При этом

если Λ_2 – ненулевая аналитическая функция, то в теореме 1.1 в качестве β мы можем взять любое положительное число и получим новое доказательство теоремы Согги в этом частном случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. В общем случае трудно найти точное значение показателя $p(S)$. В работе [10] найдена связь между $p(S)$ и показателем осцилляции [11] фазовой функции в случае выпуклых гиперповерхностей. Например, если $S \subset \mathbb{R}^4$ задается как график функции $f(x) = x_1^{2k} + x_2^{2k} + x_3^{2k} + 1$, $k \geq 3$, и $\psi(0) \neq 0$, то из результатов Ковлинга и Маучери [8] следует, что $p(S) = 2k/3$. В этом случае $p(\beta) = k + 1$. Таким образом, мы получим значение $p(S)$ с точностью до порядка касания.

2. Сведение к демпфированным осцилляторным интегралам. Исходя из общего подхода, теорема 1.1 доказывается методом вложения M в аналитическое семейство операторов. Точнее, для $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > -\beta$, определяется следующая мера (заряд):

$$d\sigma_z(x) = \Lambda(x)^z \psi(x) d\sigma(x) \quad \text{на } S,$$

а также соответствующий максимальный оператор:

$$M_z g(x) = \sup_{t>0} \left| \int_S g(x - ty) d\sigma_z(y) \right|.$$

Так как ψ – неотрицательная функция, то для любых $z \in \mathbb{C}$ и $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ выполняется неравенство $M_z g(x) \leq M_{\operatorname{Re}(z)} |g(x)|$. Следовательно, если $\operatorname{Re}(z) = q > -\beta$ и q_2 – достаточно малое положительное число, то из условий теоремы 1.1 и неравенства Гёльдера вытекает, что Λ^q – локально-интегрируемая функция. Здесь мы используем тот факт, что Λ_2 – ненулевая аналитическая функция и любая такая функция локально интегрируема с некоторой отрицательной степенью. Поэтому при $\operatorname{Re}(z) > -\beta$ мы имеем ограниченность оператора M_z в пространстве L^∞ .

Если $q > 3/2$, то ограниченность оператора $M_q(M_z)$ в пространстве L^2 вытекает из следующего утверждения и теоремы вложения Соболева [3].

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – любая аналитическая гиперповерхность, $\psi \in C_0^\infty(S)$ – любая функция. Если q_1, q_2, q – фиксированные вещественные числа такие, что

$$q_1 + q_2 = 1, \quad q_2 > 0, \quad q > \frac{3}{2},$$

то существует $\varepsilon > 0$ такое, что для преобразования Фурье меры $d\sigma_q(x)$ выполняются следующие неравенства:

$$|\hat{d}\sigma_q(\xi)| \leq \operatorname{const} \frac{\|\psi\|_{L_3^1(S)}}{|\xi|^{1/2+\varepsilon}}, \quad |\nabla \hat{d}\sigma_q(\xi)| \leq \operatorname{const} \frac{\|\psi\|_{L_3^1(S)}}{|\xi|^{1/2+\varepsilon}},$$

где $\nabla \equiv (\partial/\partial\xi_1, \partial/\partial\xi_2, \dots, \partial/\partial\xi_n)$, $\|\cdot\|_{L_3^1(S)}$ – естественная норма пространства Соболева $L_3^1(S)$.

Как показывают примеры, условие $q_2 > 0$ существенно. То есть, вообще говоря, при $q_2 = 0$ оценка с показателем $1/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, неверна.

Наконец, доказательство теоремы 1.1 следует из $L^\infty \mapsto L^\infty$ и $L^2 \mapsto L^2$ оценок с применением интерполяционной теоремы Стейна [3].

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 2.1.

3. Некоторые вспомогательные утверждения. Для оценки осцилляторных интегралов нам необходимо свойство “гладкости” амплитуды, содержащей множитель гашения. С помощью аналитичности поверхности мы установим свойство ограниченности вариации множителя гашения.

Пусть $f: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \mapsto (\mathbb{R}, 0)$ – вещественно-аналитическая функция. Предположим, что f не равняется нулю тождественно.

Утверждение следующей леммы в случае $n = 1$ легко вытекает из подготовительной теоремы Вейерштрасса–Мальгранжа [18].

ЛЕММА 3.1. *Существует вещественно-аналитическое многообразие Y и отображение $\pi: Y \mapsto \mathbb{R}^n$, которое является композицией конечного числа σ -процессов таких, что для любой точки $y^0 \in Y$ существует карта $(y_1, \dots, y_n)$ с центром в точке y^0 , для которой справедливо следующее соотношение:*

$$f(x, \pi(y)) = y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} g(x, y) p(x, y),$$

где $g(x, y)$, $g(0, y^0) \neq 0$, – вещественно-аналитическая функция, $p(x, y)$ – унитарный псевдополином, т.е.

$$p(x, y) = x^m + d_1(y)x^{m-1} + \cdots + d_m(y);$$

здесь $d_1, \dots, d_m$ – вещественно-аналитические функции в точке y^0 и $d_l(y^0) = 0$, $l = 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим функцию $f(x, s)$ в ряд Тейлора по x в точке $x = 0$. Имеем

$$f(x, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(s)x^{\nu}.$$

Существует окрестность нуля $V \subset \mathbb{C}^n$ такая, что для каждого ν функция $a_{\nu}(s)$ имеет аналитическое продолжение в V ; иными словами, $a_{\nu} \in \sigma(V)$. Действительно, $f(x, s)$ как аналитическая функция в начале координат имеет аналитическое продолжение в некоторый полидиск $U \subset \mathbb{C}^n$ с центром в нуле, и в качестве V мы можем взять ортогональную проекцию U на $\mathbb{C}^n$.

Рассмотрим идеал I кольца $\sigma(V)$, порожденный элементами $\{a_{\nu}\}_{\nu=0}^{\infty}$. Если $I = \sigma(V)$, то утверждение леммы 3.1 совпадает с утверждением обычной теоремы Вейерштрасса–Мальгранжа. Далее, предположим, что I – собственный идеал. Согласно теореме Гильберта о нётеровости кольца $\sigma(V)$ идеал I порождается конечным числом, скажем N , элементов $\{a_{\nu}\}_{\nu=0}^N$, где N – некоторое натуральное число.

Определим функцию $c = a_1^2 + \cdots + a_N^2$. Согласно теореме Хиронаки [19] о разрешении особенностей существует вещественно-аналитическое многообразие Y и отображение $\pi: Y \mapsto \mathbb{R}^n$, которое является композицией конечного числа σ -процессов, удовлетворяющих следующему условию: для каждой точки $y^0 \in Y$ существуют локальные координаты $(y_1, \dots, y_n)$ с центром в этой точке, т.е. $y_k(y^0) = 0$, $k = 1, \dots, n$, такие, что справедливо следующее соотношение:

$$c(\pi(y)) = y_1^{k_1} \cdots y_n^{k_n} b(y_1, \dots, y_n),$$

где b – аналитическая функция в начале координат и $b(0) \neq 0$. Так как $c(\pi(y)) \geq 0$ для любой точки $y \in V' \subset \mathbb{R}^n$, то $k_1, \dots, k_n$ – четные неотрицательные целые числа и $b(0) > 0$. Следовательно,

$$a(y) := (c(\pi(y)))^{1/2} = y_1^{k_1/2} \dots y_n^{k_n/2} (b(y))^{1/2}$$

также является аналитической функцией в $V(0)$. Очевидно, что если $q(y)$ – аналитическая функция в $V(0)$ и $q(y)/y_k^l$ ограничена в этой же окрестности, то эта дробь имеет аналитическое продолжение в $V(0)$. Поэтому для каждого ν функция $(a_\nu/a)(\pi(y))$ аналитическая в некоторой фиксированной окрестности точки y^0 .

Рассмотрим функцию

$$f_1(x, s) = \frac{f(x, s)}{a(s)}$$

и многообразие Y . Для каждой точки $y^0 \in Y$ этого многообразия существует координатная окрестность такая, что $f_1(x, \pi(y))$ – вещественно-аналитическая функция в точке $(0, y^0)$ и при этом выполняется условие $f_1(x, \pi(y^0)) \neq 0$. Следовательно, мы можем применить подготовительную теорему Вейерштрасса–Мальгранжа [18] к функции $f_1(x, \pi(y))$ и придем к заключению леммы 3.1.

ЛЕММА 3.2. Пусть $f: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \mapsto (\mathbb{R}, 0)$ – вещественно-аналитическая функция. Существует окрестность нуля $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любого фиксированного положительного числа q функция $|f(\cdot, s)|^q$ имеет ограниченную вариацию по U_1 и полная вариация этой функции $-V_{U_1}[|f(\cdot, s)|^q]$ является ограниченной функцией в U_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $q \geq 1$, то утверждение леммы 3.2 тривиально. Поэтому нам достаточно рассмотреть случай $0 < q < 1$. Если $p(x)$ – полином степени m и функция F имеет ограниченную вариацию по отрезку $[a, b]$, то их композиция $F \circ p(x)$ также имеет ограниченную вариацию по множеству $K := \{x \in \mathbb{R} : a \leq p(x) \leq b\}$. Более того, справедливо неравенство

$$V_K[F \circ p(x)] \leq mV_a^b[F].$$

Если функция f имеет вид $f(x, s) = a(x, s)p(x, s)$, где $a(x, s)$ – аналитическая функция, удовлетворяющая условию $a(0, 0) \neq 0$, и $p(x, s)$ – псевдополином, то легко видеть, что $|f(\cdot, s)|^q$ имеет ограниченную вариацию по x как произведение функций ограниченной вариации. Если $f(x, s) \equiv 0$, то доказывать нечего. В противном случае, т.е. в случае $f(x, s) \not\equiv 0$, применяя лемму 3.1, построим многообразие Y и собственное аналитическое отображение $\pi: Y \mapsto U_2$ такие, что $f(x, \pi(y))$ в локальных координатах имеет вид

$$f(x, \pi(y)) = y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} g(x, y)p(x, y),$$

где $p(x, y)$ – псевдополином и y – локальные координаты. Следовательно, мы получим, что $f(x, \pi(y))$ имеет ограниченную вариацию по U_1 и ее полная вариация ограничена в некоторой координатной окрестности V . Так как $\pi: Y \mapsto U_2$ – собственное аналитическое отображение, то стандартными методами анализа мы приходим к доказательству леммы 3.2.

ЛЕММА 3.3. Пусть $f(x, s)$ удовлетворяет приведенным выше условиям и $0 < q \leq 1$ – фиксированное число. Тогда существует окрестность нуля $U_1 \times U_2$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ такая, что функция

$$\varphi(x, s) = \frac{|f(x, s)|^q - |f(0, s)|^q}{|x|^q}$$

имеет ограниченную вариацию по U_1 и ее полная вариация равномерно ограничена в U_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что $f(x, s)$ – многочлен. Скажем, $f(x, s) := p(x, s) = x^m + s_1 x^{m-1} + \dots + s_m$, и коэффициенты многочлена ограничены: $|s| \leq 1$. Мы покажем, что функция

$$\varphi(x, s) = \frac{|p(x, s)|^q - |s_m|^q}{|x|^q}$$

имеет ограниченную вариацию по отрезку $[-1, 1]$ и ее полная вариация $V_{-1}^1[\varphi(\cdot, s)]$ ограничена с константой, зависящей только от m . Легко доказать, что $\varphi(x, s)$ – кусочно-монотонная функция. Действительно, пусть $x > 0$ и $p(x, s) > 0$. Вычислим производную функции $\varphi(x, s)$ по x и получим

$$\varphi'(x, s) = \frac{q(x(p(x, s))^{q-1} p'(x, s) - ((p(x, s))^q - |s_m|^q))}{x^{q+1}}.$$

Теперь покажем, что числитель имеет не более $2m + 1$ нулей. Вычисляя производную числителя и приравнявая ее к нулю, получим

$$(p(x, s))^{q-2}((1-q)p(x, s)p'(x, s) + x(q-1)(p'(x, s))^2 + xp(x, s)p''(x, s)) = 0.$$

Последнее уравнение имеет не более, чем $2m + 1$ корней.

Поэтому числитель не может иметь более, чем $2m + 2$ нулей. Отсюда следует, что уравнение $\varphi'(x, s) = 0$ имеет не более, чем $4m + 4$ корней. Заметим, что для любых чисел $x, y \in \mathbb{R}$ и $q \in (0, 1]$ справедливо неравенство: $||x|^q - |y|^q| \leq |x - y|^q$. Отсюда следует, что $\varphi(x, s)$ ограничена числом m^q при $|x| \leq 1$.

Следовательно, имеем

$$V_{-1}^1[\varphi(\cdot, s)] \leq (4m + 4) \max_{x \in [-1, 1]} |\varphi(x, s)| \leq (4m + 4)m^q.$$

Таким образом, полная вариация функции φ оценивается константой, зависящей только от m .

Пусть теперь $f(x, s)$ – любая вещественно-аналитическая функция. В этом случае, используя лемму 3.1, приводим нашу функцию к виду

$$f(x, \pi(y)) = y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} a(x, y) p(x, y),$$

где a – аналитическая функция, удовлетворяющая условию $a(0, 0) \neq 0$, и $p(x, y)$ – некоторый псевдополином. В этом случае мы имеем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{|a(x, y)p(x, y)|^q - |a(0, y)p(0, y)|^q}{|x|^q} &= |p(x, y)|^q \frac{|a(x, y)|^q - |a(0, y)|^q}{|x|^q} \\ &\quad + |a(0, y)|^q \frac{|p(x, y)|^q - |p(0, y)|^q}{|x|^q}. \end{aligned}$$

Заметим, что функция $(|a(x, y)|^q - |a(0, y)|^q)/|x|^q$ имеет ограниченную вариацию, так как $a(0, 0) \neq 0$. А также согласно лемме 3.2 $|p(x, y)|^q$ имеет ограниченную вариацию в координатной окрестности V . Наконец, заметим, что $\pi: Y \mapsto U_2$ – собственное аналитическое отображение. Отсюда стандартными методами анализа мы приходим к доказательству леммы 3.3.

4. О разбиении поверхности. Пусть $S(\eta) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – семейство гладких гиперповерхностей, где $\eta \in V \subset \mathbb{R}^m$ и V – некоторая достаточно малая окрестность начала координат в $\mathbb{R}^m$. Мы имеем дело с локальной задачей. Поэтому мы можем фиксировать систему координат в $\mathbb{R}^{n+1}$. Более того, для каждого фиксированного значения параметра $\eta \in V$ имеется взаимно-однозначное соответствие между точками $U \subset \mathbb{R}^n$ и точками гиперповерхности $S(\eta)$.

Наш метод оценки осцилляторных интегралов основан на разбиении гиперповерхности S или семейства гиперповерхностей $S(\eta)$ с использованием главных кривизн поверхности $S(S(\eta))$. Аналогичное разбиение с использованием гауссовой кривизны рассмотрено в работе [3].

Пусть $X_0 \in S(0)$ – фиксированная точка поверхности. Мы рассмотрим покрытые множества

$$S(\eta) \cap \{X \in S(\eta) : \Lambda_1(X, \eta) \neq 0\}$$

в достаточно малой окрестности точки X_0 , где

$$\Lambda_1(x) \equiv \sum g^{i_1 j_1}(x) g^{i_2 j_2}(x) a_{i_1 i_2}(x) a_{j_1 j_2}(x).$$

Без ограничения общности мы можем предполагать, что семейство гиперповерхностей $S(\eta)$ задано как график семейства гладких функций $f(\cdot, \eta)$ и $X(0) = (0, 0)$, $d_x f(0, 0) = 0$. Таким образом, мы имеем

$$S(\eta) = \{X = (x, f(x, \eta)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in U\},$$

где U – окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$. На самом деле, мы рассмотрим покрытые множества

$$U_0(\eta) = U \cap \pi_n(\{X \in S(\eta) : \Lambda_1(X, \eta) \neq 0\}),$$

где $\pi_n: \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ – проекция вдоль оси x_{n+1} .

Обозначим через $\lambda_1(x, \eta), \dots, \lambda_n(x, \eta)$ главные кривизны поверхности $S(\eta)$ в точке $X(\eta) := (x, f(x, \eta))$.

Далее, через $c, c_1, \dots, c_5$ обозначаются постоянные, не зависящие от параметров δ, η , $0 < \delta \leq 1$ (где $\delta \asymp |\lambda|$ – радиус шара), и $t, 0 < t < \infty$ (t – параметр осцилляции).

Постоянные, обозначаемые одними и теми же буквами, могут быть различными в разных местах.

Не умаляя общности, мы можем считать, что

$$|\lambda_1(x, \eta)| = \max_{1 \leq l \leq n} \{|\lambda_l(x, \eta)|\}.$$

Через $B_x := B(x, c \mid \lambda_1(x, \eta))$ обозначим открытый шар радиуса $c|\lambda_1(x, \eta)|$ с центром в точке x , где c – достаточно малое положительное число. Для функций из класса $C^\infty(\overline{U} \times \overline{V})$ введем норму $\|\cdot\|_n$ следующим соотношением:

$$\|f\|_n = \max_{\eta \in \overline{V}} \|f(\cdot, \eta)\|_{C^n(\overline{U})},$$

где $\|\cdot\|_{C^n(\overline{U})}$ – естественная норма пространства $C^n(\overline{U})$.

В дальнейшем ради упрощения обозначений мы будем считать, что функции дифференцируемы в некотором компактном множестве, содержащем множество $U \times V$.

ЛЕММА 4.1. *Существуют окрестность $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, положительные постоянные c, c_1, c_2 , зависящие только от $\|f\|_5$, такие, что для любых $(x, \eta) \in U \times V$ и $y \in B_x$ выполняются следующие неравенства:*

$$c_1 |\lambda_1(x, \eta)| \leq |\lambda_1(y, \eta)| \leq c_2 |\lambda_1(x, \eta)|. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda_1(x, \eta) = 0$ для некоторой точки $(x, \eta) \in U \times V$, то доказывать нечего, так как в этом случае $B_x = \emptyset$.

В противном случае вблизи точки x представим функцию $f(y, \eta)$ по формуле Тейлора:

$$f(y, \eta) = f(x, \eta) + (\nabla_x f(x, \eta), x - y) + (D_x^2 f(x, \eta)(x - y), x - y) + \sum_{|\alpha|=3} (x - y)^\alpha H_\alpha(x, y, \eta),$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $H_\alpha \in C^\infty$. Заметим, что $\|\cdot\|_k$ -нормы функции H_α оцениваются через $\|\cdot\|_{k+3}$ -нормы функции f .

Легко видеть, что если $|x - y| < c |\lambda_1(x, \eta)|$, то для любой точки $y \in B_x$ выполняются следующие неравенства:

$$\left| \partial_{ij}^2 \sum_{|\alpha|=3} (x - y)^\alpha H_\alpha(x, y, \eta) \right| \leq C c |\lambda_1(x, \eta)|, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4.2)$$

где ∂_{ij}^2 – повторное дифференцирование по x_i и x_j , C – постоянное число, зависящее только от $\|f\|_5$. Таким образом, для любой точки $y \in B_x$ выполняется неравенство

$$\|D_y^2 f(y, \eta)\| \leq C |\lambda_1(x, \eta)|, \quad (4.3)$$

здесь $\|D_y^2 f(y, \eta)\| = (\Lambda_1(y, \eta))^{1/2}$. Заметим, что для любой точки $y \in U$ имеет место неравенство

$$|\lambda_1(y, \eta)| \leq \|D_y^2 f(y, \eta)\|.$$

Эти неравенства позволяют получить верхнюю оценку для $|\lambda_1(y, \eta)|$:

$$|\lambda_1(y, \eta)| \leq c_2 |\lambda_1(x, \eta)|,$$

где c_2 – положительное число, зависящее только от $\|f\|_5$. Мы можем выбрать $c_2 = C$, где C – некоторое число, удовлетворяющее оценке (4.3).

Далее, мы рассмотрим оценку снизу для $|\lambda_1(y, \eta)|$. Пусть $G(x, \eta)$ – матрица первой фундаментальной формы (матрица метрического тензора). В нашем случае мы имеем

$$G_{ij}(x, \eta) = \delta_{ij} + f_{x_i}(x, \eta) f_{x_j}(x, \eta), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Следует отметить, что для любых точек $(x, \eta) \in U \times V$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются следующие неравенства:

$$|\xi|^2 \leq (G(x, \eta)\xi, \xi) \leq c_3 |\xi|^2, \quad (4.4)$$

где c_3 – некоторое число, зависящее только от $\nabla f(x, \eta)$, и $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$.

С другой стороны, для любой фиксированной точки $(x, \eta) \in U \times V$ существует вектор $\xi_{x, \eta}$, удовлетворяющий условиям $(G(x, \eta)\xi_{x, \eta}, \xi_{x, \eta}) = 1$ и

$$|\lambda_1(x, \eta)| = \left| \frac{(D_x^2 f(x, \eta)\xi_{x, \eta}, \xi_{x, \eta})}{(1 + |\nabla_x f(x, \eta)|^2)^{1/2}} \right|.$$

Согласно неравенству (4.4) для любых точек $(y, \eta) \in U \times V$, $(x, \eta) \in U \times V$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ мы имеем

$$c_3^{-1}(G(y, \eta)\xi, \xi) \leq (G(x, \eta)\xi, \xi) \leq c_3(G(y, \eta)\xi, \xi).$$

Отсюда, используя принцип мини-макса и теорему Лагранжа о конечном приращении, получим

$$\begin{aligned} |\lambda_1(y, \eta)| &\geq c_3^{-1} \left| \frac{(D_y^2 f(y, \eta)\xi_{x, \eta}, \xi_{x, \eta})}{(1 + |\nabla_y f(y, \eta)|^2)^{1/2}} \right| \\ &\geq c_3^{-1} \left| \frac{(D_x^2 f(x, \eta)\xi_{x, \eta}, \xi_{x, \eta})}{(1 + |\nabla_x f(x, \eta)|^2)^{1/2}} \right| \\ &\quad - c_3^{-1} \left| \left(\left(\frac{D_y^2 f(y, \eta)\xi_{x, \eta}}{(1 + |\nabla_y f(y, \eta)|^2)^{1/2}} - \frac{D_x^2 f(x, \eta)\xi_{x, \eta}}{(1 + |\nabla_x f(x, \eta)|^2)^{1/2}} \right), \xi_{x, \eta} \right) \right| \\ &\geq c_3^{-1}(1 - c_4 c) |\lambda_1(x, \eta)|. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве постоянная c_4 зависит только от $\|f\|_3$. Теперь выбирая c так, чтобы выполнялось неравенство $c_4 c < 1$, мы придем к доказательству леммы 4.1.

Введем обозначения

$$U_0 \times V_0 = \{(x, \eta) \in U \times V : \Lambda_1(x, \eta) \neq 0\}, \quad U_0(\eta) = \{x \in U : \Lambda_1(x, \eta) \neq 0\}.$$

ЛЕММА 4.2. *Существуют положительное число c , не зависящее от параметра $\eta \in V$, и семейство шаров*

$$\{B_k\} = \{B(x^k, c|\lambda_1(x^k, \eta)|)\},$$

обладающие следующими свойствами:

- 1) $U_0(\eta) \subset \bigcup_k B'_k$, где $B'_k = B(x^k, 3c|\lambda_1(x^k, \eta)|)$;
- 2) существует натуральное число N , не зависящее от $\eta \in V$, такое, что ни одна точка множества $U_0(\eta)$ не содержится в более чем N шарах B'_k ;
- 3) $\sum_k |\lambda_1(x^k, \eta)|^n$ ряд сходится, и его сумма оценивается постоянной, не зависящей от η .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что число $4c$ удовлетворяет утверждению леммы 4.1. Напомним, что согласно этой лемме оно не зависит от параметра η .

Если $U_0(\eta) = \emptyset$, то доказывать нечего. Предположим, что $U_0(\eta) \neq \emptyset$. Далее, ради простоты обозначения вместо $U_0(\eta)$ и $\lambda_1(x, \eta)$ мы пишем соответственно U_0 и $\lambda_1(x)$. Заметим, что λ_1 – непрерывная функция. Мы выберем семейство шаров с помощью следующего процесса. Через B_1 обозначим шар $B(x^1, c|\lambda_1(x^1)|)$, где точка x^1 выбрана из условия

$$|\lambda_1(x^1)| \geq \frac{1}{2} \sup_{x \in U_0} |\lambda_1(x)|. \quad (4.5)$$

Очевидно, точка x^1 с таким свойством существует.

Пусть $B_1, B_2, \dots, B_k$, $k \geq 1$, выбраны. Мы будем выбирать B_{k+1} следующим образом: если $U_0 \setminus \bigcup_{l=1}^k B_l = \emptyset$ или $U_0 \setminus \bigcup_{l=1}^k B_l \neq \emptyset$ и для любой точки $x \in U_0 \setminus \bigcup_{l=1}^k B_l$ выполняется соотношение

$$\bigcup_{l=1}^k B_l \cap B(x, c|\lambda_1(x)|) \neq \emptyset,$$

то мы закончим наш процесс; при этом $\{B_l\}_{l=1}^k$ – искомое семейство шаров. В противном случае мы возьмем шар

$$B_{k+1} = B(x^{k+1}, c|\lambda_1(x^{k+1})|),$$

где точка x^{k+1} найдется из условия

$$|\lambda_1(x^{k+1})| \geq \frac{1}{2} \sup |\lambda_1(x)|, \quad (4.5')$$

здесь супремум берется по множеству

$$\left\{ x \in U_0 : \bigcup_{l=1}^k B_l \cap B(x, c|\lambda_1(x)|) \neq \emptyset \right\}.$$

Таким образом, мы определим шар $B_{k+1} = B(x^{k+1}, c|\lambda_1(x^{k+1})|)$, выбирая точку x^{k+1} из условия (4.5').

Заметим, что последовательность шаров $\{B_k\}$ может быть конечной или бесконечной. Если семейство содержит бесконечное число шаров, то $\lambda_1(x^k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, так как $U_0(\eta) \subset U$ и U – ограниченное множество. Пусть $\{B_k\}$ – выбранное семейство шаров и $\{x^k\}$ соответствующая последовательность точек. Определим новое семейство шаров $\{B'_k\}$ следующим образом: шар B'_k концентричен с шаром B_k и имеет радиус $3c|\lambda_1(x^k)|$. Покажем справедливость включения $U_0 \subset \bigcup_k B'_k$. Пусть $x \in U_0$ – фиксированная точка. Если $x \in B_k$ для некоторого k , то доказывать нечего. Предположим, что $x \in U_0 \setminus \bigcup_k B_k$. Рассмотрим шар B_x с центром в точке x , имеющий радиус $c|\lambda_1(x)|$. Покажем, что существует шар B_k такой, что $B_x \cap B_k \neq \emptyset$. Если семейство шаров содержит конечное число шаров, то существование такого шара следует из определения этого семейства. В противном случае, если такой шар не существует, то для любого номера k имеет место неравенство

$$|\lambda_1(x^k)| \geq \frac{1}{2} |\lambda_1(x)| > 0. \quad (4.6)$$

Но если семейство содержит бесконечное число шаров, то $\lambda_1(x^k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому неравенство (4.6) не может выполняться для всех номеров k . Это противоречие доказывает существование шара B_k с вышеуказанным свойством. Пусть k – минимальное число с таким свойством. Таким образом, мы имеем номер k такой, что

$$\bigcup_{l=1}^{k-1} B_l \cap B_x = \emptyset, \quad B_x \cap B_k \neq \emptyset.$$

Легко показать справедливость неравенства $|\lambda_1(x)| \leq 2|\lambda_1(x^k)|$. Следовательно,

$$B(x^k, c|\lambda_1(x^k)|) \cap B(x, 2c|\lambda_1(x^k)|) \neq \emptyset.$$

В результате получим $x \in B'_k := B(x, 3c|\lambda_1(x^k)|)$.

Наконец, покажем справедливость свойства конечности покрытия. Существует натуральное число N , не зависящее от $\eta \in V$, такое, что ни одна точка множества $U_0(\eta)$ не содержится в более, чем N шаров B'_k . Следуя [3], предположим, что $B'_1, B'_2, \dots, B'_N$ содержат $\bar{x}$. Тогда согласно лемме 4.1 их радиусы сравнимы с $|\lambda_1(\bar{x})|$; при этом объединение этих шаров содержится в шаре $\tilde{B}$ с центром в точке $\bar{x}$, имеющем радиус, сравнимый с $|\lambda_1(\bar{x})|$. Заметим, что шары $B_1, B_2, \dots, B_N$ взаимно не пересекаются, их радиусы также сравнимы с $|\lambda_1(\bar{x})|$ и все они содержатся в $\tilde{B}$. Сравнивая объемы $\bigcup_{k=1}^N B_k$ и $\tilde{B}$, получим верхнюю оценку для числа N . Фактически используя лемму 4.1, элементарными рассуждениями можно показать справедливость неравенства $N \leq 6^n(c_2/c_1)^n$. Более того, постоянные c_1, c_2 , определенные согласно лемме 4.1, не зависят от η . Таким образом, утверждение 2) доказано.

Утверждение 3) леммы 4.2 легко доказывается. На самом деле, сумма $\sum_k |\lambda_1(x^k)|^n$ оценивается через $\sigma(U)/\omega_n + \text{const}$, где $\sigma(U)$ – мера множества U и ω_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Теперь рассмотрим некоторый вариант леммы Морса с параметрами [11]. Пусть $f(x, \lambda, \eta)$ – семейство гладких функций в некоторой окрестности начала координат, имеющее вид

$$f(x, \lambda, \eta) = x_1^2 + \sum_{j=2}^n \lambda_j x_j^2 + \sum_{|\alpha|=3} x^\alpha H_\alpha(x, \lambda, \eta),$$

где $|\lambda_j| \leq 1$, $j = 2, \dots, n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\{H_\alpha\}$ – некоторое семейство гладких функций.

Рассмотрим новое семейство функций, определенное равенством

$$\Phi(x, \lambda, \eta, s) = f(x, \lambda, \eta) + sx.$$

Теперь сформулируем и докажем некоторое вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 4.3. *Существуют положительные числа C, c, ε , зависящие только от $\|H_\alpha\|_2$ и λ , такие, что справедливы следующие утверждения:*

- 1) *если $|s_1| < \varepsilon$, то существует отображение*

$$H: \{|x_1| < Cc\} \times \{|x'| < c\} \mapsto U_1 \times \{|x'| < c\}$$

вида $H = (H_1, \dots, H_n)$, $H_1 = H_1(x, s_1)$, $H_l = x_l$, $l = 2, \dots, n$, удовлетворяющее условиям $H(x, 0) \equiv x$ и

$$H^* \Phi(x, \eta, \lambda, s) = x_1^2 + \Phi_1(x', \eta, \lambda, s_1) + (s', x'),$$

где $\Phi_1 \in t^2$, t – максимальный идеал локального кольца $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ в нуле и U_1 – окрестность начала координат в $\mathbb{R}$;

- 2) *если $|s_1| \geq \varepsilon$ и $x \in B(0, c)$, то справедливо неравенство*

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right| \geq \frac{1}{2} |s_1|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Следуя [20], рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 2x_1 + \sum_{|\alpha|=2} x^\alpha \tilde{H}_\alpha(x, \lambda, \eta) + s_1 = 0.$$

Легко видеть, что существуют положительные числа C_1, C'_1, ε такие, что при $|s_1| < \varepsilon$ и $|x'| < C'_1$ последнее уравнение имеет решение $x_1(X, \lambda, \eta) \in (-C_1, C_1)$ вида

$$x_1(X, \lambda, \eta) = -\frac{s_1}{2} + \sum_{|\alpha|=2} X^\alpha H_\alpha(X, \lambda, \eta),$$

где $X = (s_1, x_2, \dots, x_n)$.

Заметим, что C^k -нормы функции H_α оценивается через C^{k+2} -нормы функции Φ . Теперь используем замену переменных

$$y_1 = x_1 - x_1(X, \lambda, \eta), \quad y' = x'.$$

Тогда фазовая функция $\Phi(x, \lambda, \eta, s_1)$ приводится к виду

$$\Phi_0(y, \lambda, \eta, s_1) = y_1^2 \Phi_2(y, \lambda, \eta, s_1) + \sum_{j=2}^n \lambda_j y_j^2 + \Phi_1(y', \lambda, \eta, s_1) + (s', y'),$$

где Φ_1, Φ_2 – гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\Phi_2(0, 0, 0, 0) = 1, \Phi_1 \in m^2$ и $s' = (s_2, \dots, s_n), y' = (y_2, \dots, y_n)$.

Постоянные C_1, C'_1, ε могут быть выбраны одинаковыми в множестве функций $\{H_\alpha\}_{|\alpha|=3}$ и λ , удовлетворяющих условиям

$$\|H_\alpha\|_2 \leq M, \quad |\alpha| = 3, \quad |\lambda| \leq 1.$$

Наконец, применяя замену переменных

$$z_1 = y_1(\Phi_2(y, \lambda, \eta, s_1))^{1/2}, \quad z' = y'$$

и обозначая через H композицию с этой заменой, получим

$$H^* \Phi(z, \eta, \lambda, s) = z_1^2 + \Phi_1(z', \eta, \lambda, s_1) + (s', z').$$

2) Пусть теперь $|s_1| \geq \varepsilon$. Очевидно, существует положительное число C_2 , зависящее от C^3 -нормы функции f , такое, что справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \leq C_2 c \quad \text{при всех } x \in B(0, c).$$

Следовательно, если $c = \varepsilon/(2C_2)$, то выполняется неравенство $|\partial \Phi / \partial x_1| \geq |s_1|/2$ для любой точки $x \in B(0, c)$.

Наконец, выбирая $c = \min\{\varepsilon/(2C_2), 2C_1, C'_1\}$ и $C = 2C_1/c > 0$, придем к доказательству леммы 4.3.

Пусть $f(x, \eta)$ – вещественно-аналитическая функция в начале координат $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Введем идеал I кольца ростков аналитических функций в начало координат, порожденный элементами матрицы $D_x^2 f(x, \eta)$. Корень этого идеала обозначается через $K(I)$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 4.4. Пусть $\varphi \in I$ – фиксированный элемент идеала и $q > 0$ – фиксированное положительное число. Существуют окрестность нуля $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и положительное число c такие, что для любой точки $(x, \eta) \in U \times V \setminus K(I)$ функция

$$\left| \frac{\varphi(x + \|D_x^2 f(x, \eta)\|y, \eta)}{\|D_x^2 f(x, \eta)\|} \right|^q$$

имеет ограниченную вариацию по переменной $y_l \in [-c, c]$ и ее полная вариация по множеству $\{y_l : |y_l| \leq c\}$ равномерно ограничена относительно $y' \in \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : |y_k| \leq c, k \neq l\}$, $(x, \eta) \in U \times V \setminus K(I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $I \neq 0$; иначе утверждение леммы 4.4 тривиально. Далее, ради упрощения рассуждений предположим, что функция $\varphi(x, \eta)$ имеет вид

$$\varphi(x, \eta) = g(x, \eta) \partial_{ij}^2 f(x, \eta).$$

В общем случае рассуждения те же самые, но мы имеем дело с более громоздкими формулами.

Рассмотрим функцию $\varphi(z, \eta)$ в множестве $\{z : |x - z| < c \|D_x^2 f(x, \eta)\|\}$, где $(x, \eta) \in U \times V \setminus K(I)$ и c – достаточно малое положительное число, оно будет выбрано позже.

Теперь мы определим новую функцию от переменных (y, η, x) по следующей формуле:

$$\psi(y, \eta, x) = g(x + \|D_x^2 f(x, \eta)\|y, \eta) \frac{\partial_{ij}^2 f(x + \|D_x^2 f(x, \eta)\|y, \eta)}{\|D_x^2 f(x, \eta)\|},$$

где $|y| \leq c$. Тогда функция

$$\frac{\partial_{ij}^2 f(x + \|D_x^2 f(x, \eta)\|y, \eta)}{\|D_x^2 f(x, \eta)\|}$$

может быть представлена следующим соотношением:

$$\frac{\partial_{ij}^2 f(x, \eta)}{\|D_x^2 f(x, \eta)\|} + \sum_{k=1}^n y_k a_k (\|D_x^2 f(x, \eta)\|y, x, \eta),$$

здесь $a_k, k = 1, \dots, n$, – вещественно-аналитические функции.

Теперь, введем новые переменные

$$\beta = \|D_x^2 f(x, \eta)\|, \quad \gamma = \frac{\partial_{ij}^2 f(x, \eta)}{\|D_x^2 f(x, \eta)\|}.$$

Легко видеть, что ψ может быть рассмотрена как аналитическая функция от переменных $(x, y, \eta, \beta, \gamma)$. Более того, новые переменные β, γ принадлежат некоторому компактному множеству.

Наконец, фиксируя $l \in \{1, \dots, n\}$ и применяя лемму 3.3 к новой функции $|\psi(x, y, \eta, \beta, \gamma)|^q$ относительно y_l в множестве $\{y_l : |y_l| \leq c\}$ (число c выбирается согласно лемме 3.3), мы придем к заключению леммы 4.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Отметим, что существует положительное число c , удовлетворяющее утверждениям лемм 4.1–4.4.

5. Об оценках демпфированных осцилляторных интегралов. В этом пункте мы докажем теорему 2.1. Через U_0 обозначим множество $\{X \in S : \Lambda_2(X) \neq 0\}$. Далее, предположим, что постоянная c удовлетворяет условиям лемм 4.2–4.4. Пусть $\{B_k\}$ – семейство шаров, построенное согласно лемме 4.2. Причем $U_0 \subset \cup B'_k$, где B'_k – концентричный с B_k шар, имеющий радиус $3r(B_k)$. Кроме того, мы введем еще одно семейство концентричных с B_k шаров B''_k с радиусом $4r(B_k)$. Рассмотрим разбиение единицы $\{\psi_k\}$, соответствующее покрытию $\{B''_k\}$. Таким образом, $\psi_k \in C_0^\infty(B''_k)$. С помощью этого разбиения единицы осцилляторный интеграл $I(t, s)$ представляется в виде суммы интегралов

$$I_k(t, s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{itF(x, s)} (\Lambda(x))^q \psi(x) \psi_k(x) dx.$$

Теперь рассмотрим оценку одного из этих интегралов $I_k(t, s)$. Следуя [3], для каждого шара $B := B'_k$ выберем систему координат в $\mathbb{R}^{n+1}$ так, чтобы центр шара X^k совпадал с началом координат и касательная плоскость к поверхности S в точке $X^k := ((x^k, f(x^k)))$ определялась уравнением $x_{n+1} = 0$. Иными словами, S задается в виде графика функции $x_{n+1} = f(x)$ со свойством $\nabla f(0) = 0$. Более того, функция f посредством вращения записывается в виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2 + \sum_{|\alpha|=3} x^\alpha H_\alpha(x),$$

где H_α – гладкие функции.

Заметим, что $\Lambda_1(X)$ и $\Lambda_2(X)$ – инвариантные функции относительно евклидова движения. В частности, мы можем вычислить $\Lambda_1(X)$ и $\Lambda_2(X)$ в новой системе координат. В результате для них получим следующие соотношения:

$$\Lambda_1(\lambda_1 x) = \lambda_1^2 h_1(x, \lambda), \quad \Lambda_2(\lambda_1 x) = \lambda_1^4 h_2(x, \lambda),$$

где h_1, h_2 – вещественно-аналитические функции от (x, λ) .

В интеграле $I_k(t, s)$ сделаем замену переменных $x \mapsto \lambda_1 x$ и с учетом вышеприведенных тождеств имеем

$$I_k(t, s) = |\lambda_1|^{n+q} \int_{\{|x| < c\}} e^{it\lambda_1^3 F_1(x, \sigma)} (h(x, \sigma))^q \Phi_k(x, \lambda) dx,$$

где

$$F_1(x, \sigma) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_1} x_j^2 + \sum_{|\alpha|=3} x^\alpha H_\alpha(x, \lambda) + (\sigma, x), \quad \sigma = \frac{s}{\lambda_1^2},$$

$$\Phi_k(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) \psi_k(x, \lambda), \quad h(x, \lambda) = h_1(x, \lambda)^{q_1/2} h_2(x, \lambda)^{q_2/4}.$$

Заметим, что функция

$$f_1(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_1} x_j^2 + \sum_{|\alpha|=3} x^\alpha H_\alpha(x, \lambda)$$

удовлетворяет условиям леммы 4.3, причем $\|H_\alpha\|_k$ оценивается через $\|f\|_{k+3}$.

Пусть ε – достаточно малое положительное число. Тогда уравнение $\partial_1 F_1(x, \sigma) = 0$ имеет единственное аналитическое решение $x_1(x', \sigma_1)$. Через I' обозначается идеал, порожденный элементами матрицы $D_{x'}^2 F(x_1(x', \sigma_1), x', \sigma)$. Легко видеть, что функция $h_2(x_1(x', \sigma_1), x', \sigma)$ принадлежит идеалу I' .

Теперь для параметра σ_1 рассмотрим два случая.

Случай 1: $|\sigma_1| \geq \varepsilon$, где числа ε и c выбираются согласно лемме 4.3. В этом случае, используя лемму Ван дер Корпута [21], [22], получим

$$|I_k(t, s)| \leq \frac{C|\lambda_1|^{n+q}}{(1 + |t\lambda_1^3|)}.$$

Следовательно, для $\delta = \min\{1/2, (2q - 3)/6\}$ имеем оценку

$$|I_k(t, s)| \leq \frac{C|\lambda_1|^n}{|t|^{1/2+\delta}}.$$

Случай 2: $|\sigma_1| < \varepsilon$. Тогда, используя лемму 4.3, интеграл $I_k(t, s)$ приводим к виду

$$\begin{aligned} I_k(t, s) &= |\lambda_1|^{n+q} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{it\lambda_1^3 F((x_1(x', \sigma_1), x', \sigma))} dx' \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda_1^3 (x_1 - x_1(x', \sigma_1))^2 \Phi(x, \sigma_1)} (h(x, \lambda))^q a(x, \lambda, \sigma) dx_1. \end{aligned}$$

Теперь мы используем следующее элементарное соотношение:

$$\begin{aligned} h_1(x, \lambda_1)^{q'_1} h_2(x, \lambda_1)^{q'_2} &= (h_1(x, \lambda_1)^{q'_1} - h_1(x_1(x', \sigma_1), x', \lambda_1)^{q'_1}) h_2(x, \lambda_1)^{q'_2} \\ &\quad + h_1(x_1(x', \sigma_1), x', \lambda_1)^{q'_1} (h_2(x, \lambda_1)^{q'_2} - h_2(x_1(x', \sigma_1), x', \lambda_1)^{q'_2}) \\ &\quad + h_1(x_1(x', \sigma_1), x', \lambda_1)^{q'_1} h_2(x_1(x', \sigma_1), x', \lambda_1)^{q'_2}, \end{aligned}$$

где $q'_1 = qq_1/2$ и $q'_2 = qq_2/4$. Применяя лемму 3.4 к следующей разности, получим

$$(h(x, \lambda_1))^q - (h(x_1(x', \sigma_1), x', \lambda_1))^q = |x_1 - x_1(x', \sigma_1)|^{q_0} b(x, \sigma_1),$$

где $q_0 = \min\{q'_1, q'_2\}$. Заметим, что $b(x, \sigma_1)$ имеет ограниченную вариацию и ее полная вариация по x_1 равномерно ограничена относительно остальных переменных. Следовательно, мы можем представить наш интеграл в виде суммы двух интегралов

$$I_k(t, s) = I_{1k}(t, s) + I_{2k}(t, s) = I_{1k} + I_{2k},$$

где

$$\begin{aligned} I_{2k} &= |\lambda_1|^{n+q} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{it\lambda_1^3 F((x_1(x', \sigma_1), x', \sigma))} dx' \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda_1^3 (x_1 - x_1(x', \sigma_1))^2 \Phi(x, \sigma_1)} |x_1 - x_1(x', \sigma_1)|^{q_0} a_1 dx_1, \\ a_1 &:= a_1(x, \lambda, \sigma_1) = b(x, \sigma_1) a(x, \lambda), \\ I_{1k} &= |\lambda_1|^{n+q} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{it\lambda_1^3 F((x_1(x', \sigma_1), x', \sigma))} (h(x_1(x', \sigma_1), x', \lambda_1))^q dx' \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda_1^3 (x_1 - x_1(x', \sigma_1))^2 \Phi(x, \sigma_1)} a(x, \lambda, \sigma) dx_1. \end{aligned}$$

Мы можем использовать оценку типа Эрдейи [4].

ЛЕММА 5.1. Если функция a имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$ и $0 < q < 1$ – фиксированное вещественное число, то существует постоянная C такая, что справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} |x|^q a(x) e^{itx^2} dx \right| \leq \frac{C \|a\|_V}{|t|^{(1+q)/2}},$$

где $\|a\|_V = |a(-\infty)| + V_{\mathbb{R}}[a]$ – вариационная норма.

Согласно лемме 5.1 получим

$$|I_{1k}(t, s)| \leq c \frac{|\lambda_1|^n \|a\|_{L^1_3}}{|t|^{1/2+\delta}}.$$

Далее, мы рассмотрим внутренний интеграл

$$J_k := \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda_1^3(x_1 - x_1(x', \sigma_1))^2 \Phi(x, \sigma_1)} a(x, \lambda, \sigma) dx_1.$$

Заметим, что амплитуда последнего интеграла – гладкая функция. Следовательно, мы можем использовать обычный метод стационарной фазы и получим [23]:

$$J_k = c |t\lambda_1^3|^{-1/2} a(x_1(x', \sigma_1), x', \sigma_1) + R(t, \lambda_1, x', \sigma_1).$$

Для остаточного члена мы имеем следующую равномерную оценку [24]:

$$|R(t, \lambda_1, x', \sigma_1)| \leq c \frac{|\lambda_1|^n \|a\|_{L^1_3}}{|t\lambda_1^3|^{3/2}}.$$

Последнее неравенство дает искомую оценку для остаточного члена.

Наконец, рассмотрим вклад главного члена асимптотического разложения. Для этого прежде мы рассмотрим демпфированный интеграл в более общей форме. Пусть $f(x, \eta)$ – вещественно-аналитическая функция в начале координат $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Введем идеал I кольца ростков аналитических функций в начале координат, порожденный элементами матрицы $D_x^2 f(x, \eta)$.

Через $F(x, \eta, s)$ обозначим фазовую функцию, определенную по формуле

$$F(x, \eta, s) = f(x, \eta) + sx.$$

Теперь рассмотрим следующий демпфированный осцилляторный интеграл:

$$T(t, \eta, s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{itF(x, \eta, s)} a(x, \eta, s) |\varphi(x, \eta)|^q dx,$$

где $\varphi \in I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть $\varphi \in I$ – фиксированный элемент идеала и q – фиксированное положительное число. Существуют окрестность нуля $U \times V \times W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ и положительное число $\varepsilon > 0$ такие, что для любой амплитудной функции $a \in C_0^\infty(U \times V \times W)$ справедлива следующая оценка:

$$|T(t, \eta, s)| \leq c \frac{\|a(\cdot, \eta, s)\|_{L^1_3}}{|t|^\varepsilon}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Следует отметить, что если $df(x, 0) \neq 0$, то согласно обобщенной лемме Ван дер Корпута для кратных интегралов искомое неравенство выполняется без всякого множителя гашения $|\varphi|^q$ [21], [22].

Как показывают примеры в случае $df(x, 0) \equiv 0$, аналогичная оценка без множителя гашения не верна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.2. Пусть $f(0, 0) = 0$ и $D_x^2 f(0, 0) = 0$. Если $K(I) = U \times V$ (или $I = 0$), то доказывать нечего, так как в этом случае $\varphi = 0$. Далее, предположим, что $K(I)$ – некоторое собственное аналитическое множество. Пусть $\eta \in V$ – фиксированная точка. Рассмотрим множество $U_0(\eta) = \{x : D_x^2 f(x, \eta) \neq 0\}$. Если это множество пусто, то $T(t, \eta, s) = 0$ для любого (t, s) . Предположим, что $U_0(\eta) \neq \emptyset$. В этом случае мы можем использовать лемму 4.2 и получить покрытие множества $U_0(\eta)$ с помощью шаров $\{B_k\}$ (фактически $B_k := B'_k$ в этой лемме). Пусть $\{\psi_k\}$ – разбиение единицы, соответствующее этому покрытию. С помощью этого разбиения единицы наш интеграл $T(t, \eta, s)$ представляется в виде суммы интегралов:

$$T(t, \eta, s) = \sum_l T_l(t, \eta, s).$$

Рассмотрим оценку одного из членов суммы

$$T_l(t, \eta, s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{itF(x, \eta, s)} a(x, \eta, s) \psi_l(x) |\varphi(x, \eta)|^q dx.$$

Заметим, что $\max_\nu |\lambda_\nu(x, \eta)| \asymp \|D_x^2 f(x, \eta)\|$, где $\{\lambda_\nu(x, \eta)\}_{\nu=1}^n$ рассматриваются как главные кривизны гиперповерхности, определяемой графиком функции $f(\cdot, \eta)$. Используем замену переменных $x(y) = x^l + \|D_x^2 f(x, \eta)\|y$ и получим

$$\begin{aligned} T_l(t, \eta, s) &= \|D_x^2 f(x, \eta)\|^n e^{itF(x^l, \eta, s)} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^n} e^{itF_1(x(y), \eta, s)} a(x(y), \eta, s) \psi_l(x(y)) |\varphi(x(y), \eta)|^q dy. \end{aligned}$$

Мы можем представить нашу фазовую функцию в следующем виде:

$$F_1(x(y), \eta, s) = \|D_x^2 f(x, \eta)\|^3 \left(\left(\frac{D_x^2 f(x, \eta)y}{\|D_x^2 f(x, \eta)\|}, y \right) + O(|y|^3) + (\sigma, y) \right),$$

где $\sigma = D_x^2 f(x, \eta)y / \|D_x^2 f(x, \eta)\|^2$. Более того, асимптотика $O(|y|^3)$ равномерна относительно параметра η . Введем новую фазовую функцию

$$f_2(y, \eta) = \frac{F_1(x(y), \eta, 0)}{\|D_x^2 f(x, \eta)\|^3}.$$

Очевидно, справедливо следующее неравенство:

$$\|D_y^2 f_2(y, \eta)\| \geq 1$$

для любого $y \in \{|y| < c\}$. Согласно лемме 4.4 максимальное значение и полная вариация функции $|\varphi(x(y), \eta)|^q$ по множеству $\{|y| \leq c\}$ оценивается через $C \|D_x^2 f(x, \eta)\|^q$.

Следовательно, из оценки типа Ван дер Корпута [21], [22], [25] в случае $k = 2$ при $\delta \leq 1/2$ имеем

$$|T_l(t, \eta, s)| \leq \frac{C \|D_x^2 f(x^l, \eta)\|^{n+q} \|a\|_{L_{\frac{1}{3}}} }{|t| \|D_x^2 f(x^l, \eta)\|^\delta}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка

$$|T_l(t, \eta, s)| \leq \frac{C \|D_x^2 f(x^l, \eta)\|^n \|a\|_{L_{\frac{1}{3}}} }{|t|^\varepsilon},$$

где $\varepsilon = \min\{1/2, q/2\}$.

Заметим, что ряд

$$\sum_l \|D_x^2 f(x^l, \eta)\|^n$$

сходится согласно лемме 4.2.

Итак, суммируя полученные оценки по всем индексам l , мы получим доказательство предложения 5.2.

Теперь рассмотрим оценку для интеграла $\tilde{I}_k(t, s)$, где $\tilde{I}_k(t, s)$ – вклад главной части асимптотики интеграла $I_{1k}(t, s)$:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_k(t, s) = c \frac{|\lambda_1|^{n+q}}{|t\lambda_1^3|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{itF_1(x', \eta, \sigma)} (h_1(x_1(x', \sigma_1), x', \lambda_1))^{q'_1} \\ \times (h_2(x_1(x', \sigma_1), x', \lambda_1))^{q'_2} a_2 dx', \end{aligned}$$

где

$$a_2 := a_2(x', \lambda, \sigma_1) = a_1(x_1(x', \sigma_1), x', \lambda, \sigma_1).$$

Как было отмечено выше, $h_2(x_1(x', \sigma_1), x', \lambda_1) \in I$, где I – идеал, порожденный элементами матрицы $D_x^2 F_1(x', \eta, \sigma)$, и $q'_2 > 0$. Здесь мы существенно используем тот факт, что $q_2 > 0$. Теперь мы используем предложение 5.2. В силу этого предложения для достаточно малого положительного числа $\delta > 0$ выполняется оценка

$$|\tilde{I}_k(t, s)| \leq \frac{C |\lambda_1(x^k)|^{n+q-3/2-\delta} \|a\|_{L_{\frac{1}{3}}} }{|t|^{1/2+\delta}}.$$

Заметим, что мы можем использовать лемму Ван дер Корпута, так как согласно лемме 3.2 функция $(h_1(x_1(x', \sigma_1), x', \lambda_1))^{q'_1}$ имеет ограниченную вариацию относительно x_k , $k = 2, \dots, n$. Теперь берем $\varepsilon = q - (3/2 + \delta)$, предполагая выполнение неравенства $0 < \delta < q - 3/2$. Суммируя полученные неравенства по всем индексам k и учитывая сходимость ряда $\sum_k |\lambda_1(x^k)|^n$, получим оценку

$$|I(t, s)| \leq \frac{C \|a\|_{L_{\frac{1}{3}}} }{|t|^{1/2+\varepsilon}}.$$

Последняя оценка доказывает теорему 2.1.

В заключение автор выражает свою глубокую благодарность профессору В.П. Паламову за ценные советы и полезные обсуждения полученных результатов, а также рецензенту за ценные замечания.

Работа была завершена во время визита автора в Международный центр теоретической физики им. Абдус Салама (г. Триест, Италия). Автор благодарит профессора А.О. Куку за полезные обсуждения результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Stein E. M. Maximal functions: spherical means // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1976. V. 73. P. 2174–2175.
- [2] Bourgain J. Averages in the plane convex curves and maximal operators // J. Anal. Math. 1986. V. 47. P. 69–85.
- [3] Sogge C. D., Stein E. M. Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$ // Invent. Math. 1985. V. 82. P. 543–556.
- [4] Stein E. M. Harmonic Analysis: Real-Valued Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
- [5] Greenleaf A. Principal curvature and harmonic analysis // Indiana Math. J. 1982. V. 30. P. 519–537.
- [6] Sogge C. D. Averaging operators with one non-vanishing principal curvature // Fourier Analysis and Partial Differential Equations. Stud. Adv. Math. 1995. V. 22. P. 317–323.
- [7] Cowling M., Mauceri G. Inequalities for maximal functions II // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 296. P. 341–365.
- [8] Cowling M., Mauceri G. Oscillatory integrals and Fourier transforms of surface carried measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 304. № 1. P. 53–68.
- [9] Iosevich A. Maximal operators associated to families of flat curves in the plane // Duke Math. J. 1995. V. 76. P. 631–644.
- [10] Iosevich A., Sawyer E. Maximal operators over convex hypersurfaces // Adv. in Math. 1997. V. 132. № 1. P. 46–119.
- [11] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Ч. 1. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
- [12] Варченко А. Н. Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов // Функцион. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 3. С. 13–38.
- [13] Карпушкин В. Н. // Теорема о равномерной оценке осциллирующих интегралов с фазой, зависящей от двух переменных. Труды семин. им. И. Г. Петровского. 1984. Т. 10. С. 150–169.
- [14] Cowling M., Disney S., Mauceri G., Müller D. Damping oscillatory integrals // Invent. Math. 1990. V. 101. P. 237–260.
- [15] Ikromov I. A. Damped oscillatory integrals and boundedness problem for maximal operators // Preprint IC/2003/43. Italy: ICTP Trieste, 2003.
- [16] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
- [17] Hartman P., Nirenberg L. On spherical image maps whose Jacobians do not change sign // Amer. J. Math. 1959. V. 81. P. 901–920.
- [18] Malgrange B. Ideals of Differentiale Functions. Oxford: Oxford Univ. Press, 1966.
- [19] Hironaka H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II // Ann. of Math. 1964. V. 79. № 2. P. 109–326.
- [20] Duistermaat J. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities // Comm. Pure Appl. Math. 1974. V. 27. № 2. P. 207–281.
- [21] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Тригонометрические интегралы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 5. С. 971–1003.
- [22] Carbery A., Christ M., Wright J. Multidimensional van der Corput lemma and sublevel set estimates // J. Amer. Math. Soc. 1999. V. 12. № 4. P. 981–1015.
- [23] Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
- [24] Попов Д. А. Оценки с константами для некоторых классов осциллирующих интегралов // УМН. 1997. Т. 52. № 1. С. 77–148.
- [25] Van der Corput J. G. Zahlentheoretische Abschätzungen // Math. Ann. 1921. V. 84. P. 53–79.