Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, О мощности семейства предполных классов в P_E , *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 6, 864–869

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2658>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:49:05

О МОЩНОСТИ СЕМЕЙСТВА ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ В P_E

С. С. Марченко

Пусть E – бесконечное множество мощности m , P_E – множество всех функций, определенных на E . Доказано, что мощность семейства всех предполных в P_E классов равна 2^{2^m} . Если $C_{\mathbb{R}}$ – множество всех непрерывных функций действительных переменных, то мощность семейства всех предполных в $C_{\mathbb{R}}$ классов равна $2^{2^{\aleph_0}}$.

Библиография: 13 названий.

Пусть E – множество, содержащее не менее двух элементов, P_E – множество всех функций, определенных на E , т.е. множество всех функций $f(x_1, \dots, x_n)$ вида $f: E^n \rightarrow E$, $n = 1, 2, \dots$. Множество P_E рассматриваем как функциональную систему с операцией суперпозиции (см. [1]). Операция суперпозиции порождает на P_E оператор замыкания $[\cdot]$; если $Q \subseteq P_E$, то через $[Q]$ обозначаем множество всех функций, которые можно получить произвольными суперпозициями функций из Q . Множества вида $[Q]$ принято называть *замкнутыми классами*. Совокупность всех замкнутых классов из P_E обозначим через $\text{Cl}(P_E)$.

Множество $Q \subseteq P_E$ называется *полным* в P_E , если $[Q] = P_E$. Замкнутый класс Q называется *предполным* в P_E , если $Q \neq P_E$ и множество $Q \cup \{f\}$ полно в P_E для любой функции f из $P_E \setminus Q$.

При изучении функциональных систем P_E одной из основных проблем является проблема полноты: для произвольной системы функций, входящих в P_E , определить, является ли она полной в P_E . Функциональный подход в решении проблемы полноты состоит в том, чтобы построить так называемое критериальное семейство. Совокупность $\mathcal{T}$ замкнутых классов из $\text{Cl}(P_E)$ называется *критериальным семейством* для P_E , если произвольная система S функций из P_E полна в P_E тогда и только тогда, когда S целиком не входит ни в один из классов семейства $\mathcal{T}$.

Нетрудно видеть, что критериальным семейством для P_E всегда является семейство $\text{Cl}(P_E) \setminus \{P_E\}$. Легко также понять, что в любое критериальное семейство обязаны входить все предполные классы. Для рассматриваемого функционального подхода оптимальным представляется положение, когда критериальная система состоит только из предполных классов. В этом случае критерий полноты в P_E заключается в проверке выполнения наименьшего возможного числа свойств (*свойство* – это невхождение системы функций в предполный класс). Критерии такого вида имеются для конечных множеств E (см. [2]–[4]). При $|E| = 2$ критериальное семейство состоит из пяти предполных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00783.

классов [2], [3], при $|E| = 3$ – из восемнадцати [5], [6]. С ростом числа $|E|$ количество предполных в P_E классов растет примерно как двойная экспонента от $|E|$ [7].

Для бесконечных множеств E исследовался лишь случай счетного E . Гаврилов [8] доказал, что в этом случае мощность семейства всех предполных в P_E классов равна $2^{2^{\aleph_0}}$ (однако до сих пор не установлено, будет ли для счетного множества E критериальное семейство состоять только из предполных классов). В работе [9] предложен некоторый метод для доказательства утверждений следующего вида: если E – счетное множество, Q – замкнутый класс бесконечной мощности m , $Q \subseteq P_E$ и Q удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то мощность семейства предполных в Q классов равна 2^m .

В работах [10], [11] доказано, что мощность семейств предполных классов в некоторых классах функций, близких к непрерывным, равна $2^{2^{\aleph_0}}$.

В настоящей заметке установлен общий факт: для бесконечных множеств E мощности m мощность семейства всех предполных в P_E классов равна 2^{2^m} . На базе тех же идей доказано, что мощность семейства всех предполных классов в классе всех непрерывных функций действительных переменных равна $2^{2^{\aleph_0}}$.

Напомним, что *фильтром* над непустым множеством E называется любая непустая совокупность F подмножеств множества E , которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) если $A_1, A_2 \in F$, то $A_1 \cap A_2 \in F$;
- 2) если $A_1 \in F$ и $A_1 \subseteq A_2 \subseteq E$, то $A_2 \in F$;
- 3) $\emptyset \notin F$.

Фильтр F над E называется *ультрафильтром* над E , если F не содержится ни в каком другом фильтре над E . Известно (см., например, [12]), что каждый фильтр над E можно расширить до ультрафильтра над E . Кроме того, если F – ультрафильтр над E , то для любого подмножества $A \subseteq E$ ультрафильтру F принадлежит одно (и только одно) из множеств A , $E \setminus A$.

ЛЕММА 1. *Мощность семейства предполных в P_E классов не меньше мощности семейства ультрафильтров над E .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_E положим

$$\Delta(f) = \{x : f(x, \dots, x) = x\}.$$

Каждому ультрафильтру U над E поставим в соответствие множество функций

$$Q_U = \{f : \Delta(f) \in U\}.$$

Очевидно, что различным ультрафильтрам U_1, U_2 соответствуют различные множества Q_{U_1}, Q_{U_2} . Кроме того, поскольку ультрафильтру U принадлежат не все подмножества множества E , имеем $Q_U \neq P_E$. Покажем, что множество Q_U замкнуто относительно операции суперпозиции.

Пусть $f_0, f_1, \dots, f_m \in Q_U$ и $f = f_0(f_1, \dots, f_m)$ (распределение переменных в функциях $f_1, \dots, f_m$ здесь не имеет значения). Тогда

$$\Delta(f) \supseteq \Delta(f_0) \cap \Delta(f_1) \cap \dots \cap \Delta(f_m).$$

Так как $\Delta(f_0), \Delta(f_1), \dots, \Delta(f_m) \in U$, по свойствам 1) и 2) ультрафильтра получаем, что $\Delta(f) \in U$. Из условия $E \in U$ вытекает также, что множеству Q_U принадлежат селекторные функции $e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$. Таким образом, множество Q_U замкнуто относительно операции суперпозиции.

Докажем, что класс Q_U предполон в P_E . Возьмем произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_E и произвольную функцию g из $P_E \setminus Q_U$. Тогда $\Delta(g) \notin U$ и, следовательно, по свойству ультрафильтра будем иметь $(E \setminus \Delta(g)) \in U$. Пусть h – какая-либо функция из Q_U с условием $\Delta(h) = E \setminus \Delta(g)$. Положим

$$d(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ z & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(функция d в универсальной алгебре называется *дуальным дискриминатором* [13]).
Функция

$$f_1(y, z, x_1, \dots, x_n) = d(y, z, f(x_1, \dots, x_n))$$

принадлежит классу Q_U . Это следует из соотношений $E \in U$, $\Delta(d) = E$ и $\Delta(f_1) = E$.
Значит, функция

$$f_1(g(x_1, \dots, x_1), h(x_1, \dots, x_1), x_1, \dots, x_n)$$

входит в множество $[Q_U \cup \{f\}]$. Нетрудно видеть, что она совпадает с функцией $f(x_1, \dots, x_n)$, поскольку для любого x_1 из E

$$g(x_1, \dots, x_1) \neq h(x_1, \dots, x_1).$$

Лемма доказана.

Для любого множества $A \subseteq E$ через $\chi_A(x)$ обозначим характеристическую функцию множества A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Если $A \subseteq E$, то через $\overline{A}$ обозначаем множество $E \setminus A$.

ЛЕММА 2. *Существует инъективный оператор Φ такой, что для любых различных подмножеств $A_1, \dots, A_k$ множества E любой непустой набор множеств из числа*

$$\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_k), \overline{\Phi(A_1)}, \dots, \overline{\Phi(A_k)},$$

не содержащий пар вида $\Phi(A_i), \overline{\Phi(A_i)}$, имеет непустое пересечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \subseteq E$, χ_A – характеристическая функция множества A . Определим характеристическую функцию χ_B множества $B = \Phi(A)$.

Рассмотрим множество E' , которое состоит из всевозможных элементов вида

$$((e_0, \dots, e_{n-1}), (a_0, \dots, a_{2^n-1})), \quad (1)$$

где $n \geq 1$, $e_0, \dots, e_{n-1}$ – различные элементы из E , $a_0, \dots, a_{2^n-1} \in \{0, 1\}$, а наборы $(e_0, \dots, e_{n-1}), (a_0, \dots, a_{2^n-1})$ предполагаются упорядоченными. Пусть φ – взаимно однозначное отображение E на E' .

Возьмем произвольный элемент x из E . Пусть $\varphi(x)$ имеет вид (1). Положим $\chi_B(x) = a_i$, где

$$i = \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(e_j) \cdot 2^j.$$

Покажем, что данное определение влечет инъективность оператора Φ . Пусть A_1, A_2 – различные подмножества множества E и, например, $e_0 \in A_1, e_0 \notin A_2$. Возьмем такое x , что $\varphi(x) = (e_0, (0, 1))$. Если $B_1 = \Phi(A_1), B_2 = \Phi(A_2)$, то согласно приведенному выше определению получим $\chi_{B_1}(x) = 1$ и $\chi_{B_2}(x) = 0$.

Если $A \subseteq E$ и $\sigma \in \{0, 1\}$, то пусть

$$\Phi^\sigma(A) = \begin{cases} \overline{\Phi(A)}, & \text{если } \sigma = 0, \\ \Phi(A), & \text{если } \sigma = 1. \end{cases}$$

Докажем, что для любых подмножеств $A_1, \dots, A_k$ множества E и любых значений $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ из $\{0, 1\}$ множество

$$\Phi^{\sigma_1}(A_1) \cap \dots \cap \Phi^{\sigma_k}(A_k) \quad (2)$$

не пусто. С этой целью выберем в E такие элементы $e_0, \dots, e_{n-1}$, чтобы все множества

$$A_1 \cap \{e_0, \dots, e_{n-1}\}, \dots, A_k \cap \{e_0, \dots, e_{n-1}\} \quad (3)$$

оказались различными. Для любого $j, 1 \leq j \leq k$, положим

$$i_j = \sum_{l=0}^{n-1} \chi_{A_j}(e_l) \cdot 2^l.$$

Из несовпадения множеств (3) следует, что все числа $i_1, \dots, i_k$ различны и, очевидно, не превосходят величины $2^n - 1$. Пусть $(a_0, \dots, a_{2^n-1})$ – такой двоичный набор, что $a_{i_j} = \sigma_j$ при $1 \leq j \leq k$ и $a_i = 0$ при $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Если теперь x – такой элемент из E , что $\varphi(x)$ совпадает с (1) (для определенных выше величин $e_0, \dots, e_{n-1}$ и $a_0, \dots, a_{2^n-1}$), то согласно определению оператора Φ элемент x будет принадлежать множеству (2). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть E – бесконечное множество мощности m . Тогда мощность семейства всех предполных в P_E классов равна 2^{2^m} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через 2^E булеан множества E . Каждому подмножеству $D \subseteq 2^E$ поставим в соответствие фильтр F_D над E , который порождается множествами $\Phi(A)$ для $A \in D$ и $\overline{\Phi(A)}$ для $A \notin D$. Лемма 2 обеспечивает невхождение в фильтр F_D пустого множества и, следовательно, несовпадение F_D с булеаном 2^E . Для каждого фильтра F_D выберем ультрафильтр U_D над E , который содержит фильтр F_D . Для различных множеств D_1, D_2 фильтры F_{D_1}, F_{D_2} содержат взаимно дополнительные множества. Поэтому соответствующие ультрафильтры U_{D_1}, U_{D_2} будут различными. Значит, мощность семейства ультрафильтров над E не меньше 2^{2^m} . Согласно лемме 1 получаем, что мощность семейства всех предполных в P_E классов также не меньше 2^{2^m} . С другой стороны, она, разумеется, не превосходит 2^{2^m} . Теорема доказана.

Сделаем замечание к доказанной теореме. Ее сравнительно нетрудно обобщить на другие замкнутые классы $Q \subset P_E$. Для этого необходимо потребовать выполнения следующих условий. Во-первых, множество

$$\Delta(Q) = \{\Delta(f) : f \in Q\}$$

должно совпадать с булеаном 2^E . Во-вторых, класс Q должен выдерживать применение оператора Φ . Наконец, в класс Q должна входить функция d .

Пусть $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Через $C_{\mathbb{R}}$ обозначим множество всех непрерывных на $\mathbb{R}$ функций. Множество $C_{\mathbb{R}}$ рассматриваем как функциональную систему с операцией суперпозиции.

ЛЕММА 3. *Мощность семейства предполных в $C_{\mathbb{R}}$ классов не меньше мощности семейства ультрафильтров над $\mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из $C_{\mathbb{R}}$ положим

$$\Delta(f) = \{x : x \in \mathbb{Z}, f(x, \dots, x) = x\}.$$

Каждому ультрафильтру U над $\mathbb{Z}$ поставим в соответствие множество функций

$$Q_U = \{f : \Delta(f) \in U\}.$$

Очевидно, что различным ультрафильтрам U_1, U_2 над $\mathbb{Z}$ соответствуют различные множества Q_{U_1}, Q_{U_2} . Так же, как в лемме 1, убеждаемся, что множества Q_U замкнуты относительно операции суперпозиции.

Докажем, что класс Q_U предполон в $C_{\mathbb{R}}$. Возьмем произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ из C и произвольную функцию g из $C_{\mathbb{R}} \setminus Q_U$ (функцию g можно, очевидно, считать одноместной). Тогда $\Delta(g) \notin U$ и, следовательно, по свойству ультрафильтра будем иметь $(\mathbb{Z} \setminus \Delta(g)) \in U$. Пусть $h(x)$ – какая-либо функция из Q_U с условием $\Delta(h) = \mathbb{Z} \setminus \Delta(g)$. Определим в классе Q_U функцию $d_f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_n)$ требованиями: $\Delta(d_f) = \mathbb{Z}$ и

$$d_f(g(x_1), \dots, g(x_n), h(x_1), \dots, h(x_n), x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Убедимся, что эти требования выполнимы. Пусть $m \in \mathbb{Z}$. Если $m \notin \Delta(g)$, то пусть ε_m – такое положительное действительное число, что

$$|m - g(x)| \geq \frac{1}{2}|m - g(m)| \quad \text{при} \quad |m - x| \leq \varepsilon_m.$$

Аналогично, если $m \notin \Delta(h)$, то обозначим через ε_m такое положительное действительное число, что

$$|m - h(x)| \geq \frac{1}{2}|m - h(m)| \quad \text{при} \quad |m - x| \leq \varepsilon_m.$$

Можно считать, что для любого целого m выполняется неравенство $\varepsilon_m < 1/2$.

Функцию d_f можно определить в классе $C_{\mathbb{R}}$, например, следующим образом. Пусть $m \notin \Delta(g)$. Функцию d_f на множестве

$$\{m\}^n \times \mathbb{R}^n \times \{m\}^n \tag{4}$$

положим равной m . Далее, в точках множества

$$\left[m - \frac{1}{2}g(m), m + \frac{1}{2}g(m) \right]^n \times \mathbb{R}^n \times [m - \varepsilon_m, m + \varepsilon_m]^n \quad (5)$$

определим функцию d_f так, чтобы она непрерывно изменялась от значения m в “центре” (4) до значения $f(x_1, \dots, x_n)$ на границе множества (5) (к границе множества (5) относим все те точки $(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_n)$, для которых либо одно из значений $y_1, \dots, y_n$ совпадает с $m \pm g(m)/2$, либо одно из значений $x_1, \dots, x_n$ совпадает с $m \pm \varepsilon_m/2$).

Аналогично поступаем с теми значениями m из $\mathbb{Z}$, для которых $m \notin \Delta(h)$. Во всех остальных случаях полагаем

$$d_f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Мощность семейства всех предполных в $C_{\mathbb{R}}$ классов равна $2^{2^{\aleph_0}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти дословно совпадает с доказательством теоремы 1. Вместо леммы 1 используем лемму 3, а в лемме 2 в качестве множества E рассматриваем счетное множество $\mathbb{Z}$. В результате получаем, что мощность семейства всех предполных в $C_{\mathbb{R}}$ классов не меньше $2^{2^{\aleph_0}}$. С другой стороны, мощность класса $C_{\mathbb{R}}$ равна $2^{\aleph_0}$. Поэтому мощность семейства всех предполных в $C_{\mathbb{R}}$ классов не превосходит $2^{2^{\aleph_0}}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
- [2] Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. V. 43. P. 163–185.
- [3] Post E. L. Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. Ann. Math. Studies. V. 5. Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.
- [4] Кузнецов А. В. О проблемах тождества и функциональной полноты алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 145–146.
- [5] Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 6. С. 1152–1156.
- [6] Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Тр. МИАН. Т. 51, 1958. С. 5–142.
- [7] Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В. О предполных классах в k -значных логиках // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186. № 3. С. 509–512.
- [8] Гаврилов Г. П. О функциональной полноте в счетнозначной логике // Проблемы кибернетики. Вып. 15. Наука: М., 1965. С. 5–64.
- [9] Марченков С. С. О мощности множества предполных классов в некоторых классах функций счетнозначной логики // Проблемы кибернетики. Вып. 38. Наука: М., 1981. С. 109–116.
- [10] Марченков С. С. О классах Слупецкого для детерминированных функций // Дискретная матем. 1998. Т. 10. № 2. С. 128–136.
- [11] Марченков С. С. Функциональные аспекты проблемы полноты для некоторых классов автоматных функций // Дискретная матем. 2000. Т. 12. № 2. С. 103–117.
- [12] Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
- [13] Fried E., Pixley A. F. The dual discriminator function in universal algebra // Acta. Sci. Math. 1979. V. 41. № 1–2. P. 83–100.