Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Об одной общей теореме теории множеств, приводящей к распределению Гиббса, Бозе–Эйнштейна, Парето и закону Ципфа–Мандельброта для фондового рынка, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 6, 870–877

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2659>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:41:38

УДК 519

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, ПРОВОДЯЩЕЙ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ГИББСА, БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА, ПАРЕТО И ЗАКОНУ ЦИПФА–МАНДЕЛЬБРОТА ДЛЯ ФОНДОВОГО РЫНКА

В. П. Маслов

Вводится понятие плотности конечного множества. Доказывается общая теорема теории множеств, уточняющая распределения Гиббса, Бозе–Эйнштейна, Парето и закон Ципфа.

Библиография: 7 названий

Пусть $\mathcal{M}^{(n)}$ – некоторая последовательность конечных множеств, стремящаяся при $n \rightarrow \infty$ к бесконечному множеству. Пусть $\mathcal{N}(\mathcal{M}^{(n)})$ – число элементов множества $\mathcal{M}^{(n)}$.

Множество $\mathcal{M}^{(n)}$ назовем $\rho(\cdot)$ -измеримым, если существует такая гладкая выпуклая функция $\rho(\cdot)$, называемая *функцией плотности*, для которой предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(\mathcal{N}(\mathcal{M}^{(n)}))}{\rho(n)}$$

конечен. Этот предел называем $\rho(\cdot)$ -плотностью последовательности множеств $\mathcal{M}^{(n)}$.

Приведем примеры.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим собственные значения k -мерного осциллятора с потенциалом $U(x) = \sum_{i=1}^k (\omega_i x_i^2)$, $x \in \mathbb{R}^k$, где ω_i несоизмеримы:

$$-\Delta \Psi_i + U(x) \Psi_i = \lambda_i \Psi_i, \quad \Psi_i(x) \in L_2(\mathbb{R}^k).$$

Пусть $N_\lambda(\lambda_i)$ – число его собственных значений, не превосходящих заданного положительного числа λ . Если $\lambda \rightarrow \infty$, то предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln N_\lambda(\lambda_i)}{\ln \lambda} = k$$

совпадает с размерностью осциллятора.

ПРИМЕР 2. Пусть F – компакт, $N_F(\varepsilon)$ – минимальное число множеств с диаметром, не превосходящим ε , необходимое для того, чтобы они покрывали F . Тогда $N_F(\varepsilon)$ является $\ln(\cdot)$ -измеримой и ее плотность совпадает с метрическим порядком компакта F (см. [1]).

Рассмотрим множество $\{\mathcal{M}_1\}$ неотрицательных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и множество $\{\mathcal{M}_2\}$ целых чисел $1, 2, \dots, N$; $N = N(n)$. Пусть множество $\{\mathcal{M}_2\}$ $\ln(\cdot)$ -соизмеримо, а s – его плотность:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N}{\ln n} = s.$$

Кроме того, пусть $\bar{\lambda}(n)$ – арифметическое среднее набора λ_i :

$$\bar{\lambda}(n) = \frac{1}{n} \sum_1^n \lambda_i.$$

Пусть задано некоторое число $E(n)$. Рассмотрим случаи:

- 1) $\varepsilon \leq E(n) \leq \bar{\lambda}(n)N$, $\varepsilon > 0$;
- 2) $E(n) \geq \bar{\lambda}(n)N$.

Рассмотрим множество отображений $\{\mathcal{M}_2\}$ на $\{\mathcal{M}_1\}$. Отображения назовем *эквивалентными*, если их образы одинаковы. Далее будем рассматривать лишь неэквивалентные отображения и будем их обозначать через $\{\mathcal{M}_3\}$.

Предположим, что сумма элементов $\{\mathcal{M}_2\}$ равна $N = \sum_{i=1}^n N_i$ и билинейная форма пары множеств $\{\mathcal{M}_1\}$ и $\{\mathcal{M}_2\}$ удовлетворяет условию

$$\left| \sum_{i=1}^n N_i \lambda_i \right| \leq E(n)$$

в случае 1) и

$$\left| \sum_{i=1}^n N_i \lambda_i \right| \geq E(n)$$

в случае 2).

Заметим, что множество $\{\mathcal{M}_3\}$ является $\ln \ln(\cdot)$ -измеримым.

Не уменьшая общности, предположим, что действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ упорядочены, т.е. $0 \leq \lambda_i \leq \lambda_{i+1}$, и разобьем промежутки $1, 2, \dots, n$ на k промежутков (с точностью до 1), где k не зависит от n :

$$1, 2, \dots, n_1, \quad n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_2, \quad n_2 + 1, n_2 + 2, \dots, n_3, \quad \dots, \\ n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \dots, n_k, \quad \sum_{l=1}^k n_l = n;$$

здесь $l = 1, \dots, k$ – номер промежутка.

Обозначим через $\bar{\lambda}_l$, $l = 1, 2, \dots, k$, нелинейное среднее от λ_i по каждому промежутку:

$$\bar{\lambda}_l = \Phi_{\alpha\beta} \left(\sum_{n_{l-1}}^{n_l} \psi_{\alpha\beta}(\lambda_i) \right),$$

где $\psi_{\alpha\beta}(x)$ – двухпараметрическое семейство функций, а $\Phi_{\alpha\beta}$ обратное к нему: $\Phi_{\alpha\beta}(\psi_{\alpha\beta}(x)) = 1$, именно,

$$\begin{aligned} 1) \quad \psi_{\alpha\beta} &= \alpha e^{-\beta x} && \text{при } s > 1; \\ 2) \quad \psi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\alpha e^{\beta x} - 1} && \text{при } s = 1; \\ 3) \quad \psi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\beta x + \ln \alpha} && \text{при } 0 < s < 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Параметры α и β связаны с $N(n)$ и $E(n)$ условиями

$$\sum_{i=1}^n \psi_{\alpha\beta}(\lambda_i) = N(n), \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_{\alpha\beta}(\lambda_i) = E(n). \quad (2)$$

Рассмотрим подмножество $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_3$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{l=1}^k \left(\sum_{n_{l-1}}^{n_l} N_i - \psi_{\alpha\beta}(\bar{\lambda}_l) \right) \leq \Delta \right\}, \quad (3)$$

где

$$\Delta = \begin{cases} \sqrt{N} \ln^{1/2+\varepsilon} N & \text{при } N \ll n, \\ \sqrt{n} \ln^{1/2+\varepsilon} n & \text{при } N \sim n, \\ \frac{N}{\sqrt{n}} \ln^{1/2+\varepsilon} n & \text{при } N \gg n \end{cases} \quad (4)$$

назовем *разрешающей способностью*.

ТЕОРЕМА. *Справедливо неравенство*

$$\frac{\mathcal{N}(\mathcal{M}_3 \setminus \mathcal{A})}{\mathcal{N}(\mathcal{M}_3)} \leq \frac{C}{n^k} + \frac{C}{N^k},$$

где k любое, C – константа, не зависящая от n и N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{\mathcal{M}_3 \setminus \mathcal{A}\} &= \sum_{\{N_i\}} \left(\Theta \left\{ N(n)E(n) - \sum_{i=1}^n N_i \lambda_i \right\} \delta_{\sum_{i=1}^n N_i, N(n)} \right. \\ &\quad \left. \times \Theta \left\{ \left| \sum_{l=1}^k \left(\sum_{n_{l-1}}^{n_l} N_i - \psi_{\alpha\beta}(\bar{\lambda}_l) \right) \right| - \Delta \right\} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Сумма берется по всем целым N_i , а $\Theta(x)$ – функция Хевисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

δ_{k_1, k_2} – символ Кронекера

$$\delta_{k_1, k_2} = \begin{cases} 1 & \text{при } k_1 = k_2, \\ 0 & \text{при } k_1 \neq k_2. \end{cases}$$

Воспользуемся интегральными представлениями

$$\delta_{N, N'} = \frac{e^{-\nu N}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-iN\varphi} e^{\nu N'} e^{iN'\varphi}, \quad (6)$$

$$\Theta(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x-i} e^{\beta y(1+ix)}. \quad (7)$$

Имеем

$$\int_0^{\infty} dE \Theta\left(E - \sum_{i=1}^n N_i \lambda_i\right) e^{-\beta E} = \int_{\sum_{i=1}^n N_i \lambda_i}^{\infty} dE e^{-\beta E} = \frac{e^{-\beta \sum_{i=1}^n N_i \lambda_i}}{\beta}. \quad (8)$$

Обозначим

$$Z(\beta, N) = \sum_{\{N_i\}} e^{-\beta \sum_{i=1}^n N_i \lambda_i}, \quad \zeta(\nu, \beta) = \prod_{l=1}^k \zeta_l(\nu, \beta),$$

$$\zeta_l(\nu, \beta) = \prod_{i=n_{l-1}}^{n_l} \xi_i(\nu, \beta), \quad \xi_i(\nu, \beta) = \frac{1}{1 - e^{\nu - \beta \lambda_i}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

а

$$\Gamma(E, N) = \mathcal{N}\{\mathcal{M}_3\}.$$

В силу того, что $\mathcal{N}\{\mathcal{M}_3\}(E) < \mathcal{N}\{\mathcal{M}_3\}(E + \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$, выполнено

$$Z(\beta, N) \geq \beta \int_E^{\infty} dE' \Gamma(E', N) e^{-\beta E'} = \Gamma(E, N) e^{-\beta E}. \quad (9)$$

Следовательно,

$$\mathcal{N}\{\mathcal{M}_3\} \leq Z(\beta, N) e^{\beta E}. \quad (10)$$

Но в силу (6)

$$Z(\beta, N) = \frac{e^{-\nu N}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{-iN\alpha} \zeta(\beta, \nu + i\alpha), \quad (11)$$

откуда

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}\{\mathcal{M}_3 \setminus \mathcal{A}\} \\ & \leq \left| \frac{e^{-\nu N + \beta E}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\exp(-iN\varphi) \sum_{\{N_j\}} \left(\exp \left\{ (-\beta \sum_{j=1}^n N_j \lambda_j) + (i\varphi + \nu) N_j \right\} \right) d\varphi \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \Theta \left\{ \left| \sum_{l=1}^k \left(\sum_{j=n_{l-1}}^{n_l} N_j - \psi_{\alpha\beta}(\bar{\lambda}_l) \right) \right| - \Delta \right\} \right] \right|, \end{aligned} \quad (12)$$

где β и $\nu = -\ln \alpha$ – такие действительные параметры, для которых ряд сходится.

Оценивая правую часть, пронеся модуль под интеграл и затем под знак суммы и интегрируя по φ , получим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{\mathcal{M}_3^n \setminus \mathcal{A}\} & \leq e^{-\nu N} \exp \beta E(n) \sum_{\{N_i\}} \exp \left\{ -\beta \sum_{i=1}^n N_i \lambda_i + \nu N_i \right\} \\ & \quad \times \Theta \left\{ \left| \sum_{l=1}^k \left(\sum_{i=n_{l-1}}^{n_l} N_i - \psi_{\alpha\beta}(\bar{\lambda}_l) \right) \right| - \Delta \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из неравенства для гиперболического косинуса $\operatorname{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$,

$$\prod_{l=1}^k \operatorname{ch}(x_l) \geq 2^{-k} e^{\delta} \quad \text{для всех } x_l, \quad \sum_{l=1}^k |x_l| \geq \delta \geq 0, \quad (14)$$

следует, что для всех положительных c и Δ выполняется неравенство (ср. с [2], [3])

$$\Theta \left\{ \left| \sum_{l=1}^k \left(\sum_{i=n_{l-1}}^{n_l} N_i - \psi_{\alpha\beta}(\bar{\lambda}_l) \right) \right| - \Delta \right\} \leq 2^k e^{-c\Delta} \prod_{l=1}^k \operatorname{ch} \left(c \sum_{i=n_{l-1}}^{n_l} N_i - c\psi_{\alpha\beta}(\bar{\lambda}_l) \right). \quad (15)$$

Получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{\mathcal{M}_3 \setminus \mathcal{A}\} & \leq 2^k e^{-c\Delta} \exp(\beta E(n) - \nu N) \\ & \quad \times \sum_{\{N_i\}} \exp \left\{ -\beta \sum_{i=1}^n N_i \lambda_i + \nu N_i \right\} \prod_{l=1}^k \operatorname{ch} \left(\sum_{i=n_{l-1}}^{n_l} c N_i - c\psi_{\alpha\beta}(\bar{\lambda}_l) \right) \\ & = e^{\beta E(n)} e^{-\nu N} e^{-c\Delta} \\ & \quad \times \prod_{l=1}^k \left(\zeta_l(\nu + c, \beta) \exp(-c\psi_{\alpha\beta}(\bar{\lambda}_l)) + \zeta_l(\nu - c, \beta) \exp(c\psi_{\alpha\beta}(\bar{\lambda}_l)) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Применим к $\zeta_l(\nu + c, \beta)$ формулу Тейлора. Именно, найдется $\gamma < 1$ такое, что

$$\ln(\zeta_l(\nu + c, \beta)) = \ln \zeta_l(\nu, \beta) + c(\ln \zeta_l)'_{\nu}(\nu, \beta) + \frac{c^2}{2} (\ln \zeta_l)''_{\nu}(\nu + \gamma c, \beta).$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \zeta_l \equiv \psi_{\alpha, \beta}(\bar{\lambda}_l).$$

Положим $c = \Delta/D(\nu, \beta)$, где $D(\nu, \beta) = (\ln \zeta)''_{\nu}(\nu, \beta)$. Правая часть соотношения (16) будет равна

$$2^k e^{\beta E(n)} e^{-\nu N} \prod_{l=1}^k \zeta_l(\nu, \beta) \exp \left\{ -\frac{\Delta^2}{D(\nu, \beta)} + \frac{\Delta^2 D(\nu + \gamma \Delta/D(\nu, \beta), \beta)}{2(D(\nu, \beta))^2} \right\}.$$

Накладывая на Δ ограничение вида

$$D\left(\nu + \frac{\Delta}{D(\nu, \beta)}, \beta\right) \leq (2 - \varepsilon) D(\nu, \beta),$$

где $\varepsilon > 0$, и имея в виду, что $D(\nu, \beta)$ монотонно возрастает по ν , получим окончательно

$$\mathcal{N}(\mathcal{M}_3 \setminus \mathcal{A}) \leq 2^k e^{\beta E(n)} e^{-\nu N} \zeta(\nu, \beta) e^{-\varepsilon \Delta^2/D(\nu, \beta)}.$$

Теперь оценим $\zeta(\nu, \beta)$.

Оценка снизу для $Z(\beta, N)$ получена в [2, формула (95)]:

$$\zeta(\nu', \beta) \leq \sqrt{27 D(\nu', \beta)} Z(\beta, N) e^{\nu' N}, \quad (17)$$

где $\nu' = \nu'(\beta, N)$ определяется из условия

$$\sum_{i=1}^n \xi_i(\nu, \beta) = N. \quad (18)$$

Пусть $\beta = \beta'$ определяется условием

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i(\nu, \beta) = E(n). \quad (19)$$

Поскольку $Z(\beta, N)$ определяется интегралом (11), его асимптотика по методу перевала (Лапласа, стационарной фазы) дает единственную точку перевала при $\alpha = 0$.

Корень квадратный из вторых производных по α появится в знаменателе. В результате получим

$$\zeta(\nu', \beta') \leq C e^{N \nu'} e^{-\beta' E(\mu)} D(\nu', \beta') \mathcal{N}\{\mathcal{M}_3\},$$

где C – константа. Поэтому окончательно получаем¹

$$\frac{\mathcal{N}\{\mathcal{M}_3 \setminus \mathcal{A}\}}{\mathcal{N}\{\mathcal{M}_3\}} \leq 2^k C D(\nu', \beta') e^{-\varepsilon \Delta^2/D(\nu', \beta')}. \quad (20)$$

Далее, нетрудно оценить $D(\nu, \beta)$ как функцию от N, n : $D \sim N$ при $N < n$, а при $n \gg N$ оценка для D дает соотношение $D \sim N^2/n$. Отсюда получаем оценку для $\mathcal{N}(\mathcal{M}_3 \setminus \mathcal{A})/\mathcal{N}\{\mathcal{M}_3\}$, приведенную в теореме.

¹ Оценку снизу для $\mathcal{N}\{\mathcal{M}_3\}$ без применения метода перевала получена Г. В. Ковалем и автором в [4].

ПРИМЕР 3. Распределение Бозе–Эйнштейна в случае, когда $s > 0$ достаточно мало (а значит, $\sum_{l=1}^k N_l = N$ не очень велико), имеет вид

$$\frac{N_l}{N_{l+1}} \sim \frac{\sum_{i=n_{l-1}}^{n_l} e^{-\lambda_i \beta}}{\sum_{i=n_{l-1}}^{n_l} e^{-\lambda_i \beta}}, \quad (21)$$

где $\beta = 1/(kT)$, T – температура, k – константа Больцмана.

В случае бозе-газа при $s < 1$ имеет место распределение типа гиббсовского, т.е. количество частиц на l -м интервале относится к количеству частиц на $(l+1)$ -м интервале согласно формуле (21).

ПРИМЕР 4. В случае $s > 1$ мы получаем уточнение закона Ципфа–Мандельброта [5]:

$$\frac{N_l}{n} \sim \left\{ \sum_{i=n_{l-1}}^{n_l} \frac{1}{\lambda_i + \nu} \right\}. \quad (22)$$

Однако если s близко к 1, то лучше пользоваться случаем 2) в (1), который равномерно переходит в случай 3) и случай 1).

Отметим, что если все λ_i на l -м интервале совпадают и равны $\lambda^{(l)}$, то $N_l/n_l \sim 1/\lambda^{(l)}$, а так как $n_l \sim N_l^{1/s}$, то мы получим в этом случае формулу Ципфа–Мандельброта.

ПРИМЕР 5 (соотношение между объемом продаж и ценами на фондовом рынке). Рассмотрим теперь соотношение между ценами и числом проданных (купленных) акций отдельной компании на фондовом рынке.

Поскольку число проданных акций n_i этой компании за i -й день равно числу купленных, а λ_i – цена акций к концу дня, положим, осредняя по n_l дням, нелинейную среднюю цену вида

$$\bar{\lambda}^l = \Phi \left(\sum_{i=n_l}^{n_{l+1}} \varphi(\lambda_i) \right),$$

где $\varphi(x) = 1/(x + \nu)$, $\nu = \text{const}$, $\Phi(x)$ – обратная функция к $\varphi(x)$. Тогда в силу теоремы 1

$$n_l \simeq A \varphi(\bar{\lambda}_i^l), \quad (23)$$

где A – некоторая константа.

Таким образом, на фондовом рынке выполняется уточненный закон Ципфа–Мандельброта, если все варианты сделок равновероятны (см. [6], [7]).

Заметим в заключение, что хотя теорема сформулирована на языке теории множеств, из-за того, что мы ввели понятие эквивалентных отображений, она скорее относится к теории чисел. При тех же условиях множество отображений множества $\mathcal{M}_1^{(n)}$ на множество $\mathcal{M}_2^{(n)}$ без условия эквивалентности отображений, т.е. при рассмотрении всех отображений, подобная же теорема будет относиться к уточнению только распределения Гиббса. Она вместе с тем связана с теорией информации и обобщением энтропии Шеннона. Здесь оценка содержит свою специфику, и эта работа будет опубликована совместно с Г. В. Ковалем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гуревич В., Вольмэн Г. Теория размерностей. М., 1948.
- [2] Маслов В. П. Нелинейное среднее в экономике // Матем. заметки. 2005. Т. 78. № 3. С. 377–395.
- [3] Маслов В. П. Закон больших уклонений в теории чисел. Вычислимая функция от многих аргументов и декодирование // Докл. РАН. 2005. Т. 404. № 6. С. 731–736.
- [4] Коваль Г. В., Маслов В. П. Об оценках для большой статистической суммы (в печати).
- [5] Mandelbrot B. Structure formelle des textes et communication. Word. V. 10. № 1. New York, 1954.
- [6] Маслов В. П. Принцип возрастания сложности формирования портфеля на фондовой бирже // Докл. РАН. 2005. Т. 404. № 4. С. 446–450.
- [7] Маслов В. П. Уточнение закона Ципфа для частотных словарей и фондовой биржи // Докл. РАН. 2005. Т. 405. № 5.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило
21.10.2005