Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бережной, Подпространство пространства Гельдера, состоящее из самых негладких функций, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 329–339

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:17:11

УДК 513.88

ПОДПРОСТРАНСТВО ПРОСТРАНСТВА ГЁЛЬДЕРА, СОСТОЯЩЕЕ ИЗ САМЫХ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Е. И. Бережной

В первой части работы дается полный ответ на старый вопрос из геометрической теории банаховых пространств, а именно, строится бесконечномерное замкнутое подпространство пространства Гёльдера такое, что у каждой отличной от тождественного нуля функции в каждой точке гладкость не лучше, чем у самой негладкой функции пространства Гёльдера. Во второй части работы, используя конструкции первой части, показано, что множество функций из пространства Гёльдера, гладкость которых на множестве положительной меры лучше, чем у самой негладкой функции, есть множество первой категории в этом пространстве.

Библиография: 10 названий.

В геометрической теории банаховых пространств гладких функций значительный интерес представляет следующая задача (на нее снова обращалось внимание в [1]).

ЗАДАЧА А. Пусть задано некоторое банахово пространство гладких функций X . Существует ли бесконечномерное замкнутое подпространство $Y \subset X$ такое, что у каждой отличной от тождественного нуля функции $y \in Y$ гладкость не лучше, чем у самой негладкой функции из X .

Этим вопросом занимались многие математики [1]–[5]. В первой части настоящей работы дается полное решение задачи А для пространств функций, удовлетворяющих условию Гёльдера. А именно, строится бесконечномерное замкнутое подпространство пространства Гёльдера такое, что у каждой отличной от тождественного нуля функции в каждой точке гладкость не лучше, чем у самой негладкой функции пространства Гёльдера.

Во второй части работы, используя конструкции первой части, показано, что множество функций из пространства Гёльдера, гладкость которых на множестве положительной меры лучше, чем у самой негладкой функции, есть множество первой категории. Из предшествующих работ по этой тематике отметим [6], в которой показано, что множество функций $x \in C[0, 1]$ таких, что $\mu\{t: x(t) = y(t)\} = 0$ ($\mu(D)$ – мера Лебега множества D) для всех функций из фиксированного пространства Гёльдера, имеет вторую категорию в $C[0, 1]$. В [7] приведен пример функции из H_α ($0 < \alpha < 1$) такой, что $\mu\{t: x(t) = y(t)\} = 0$ для каждой функции из H_β с $1 \geq \beta > \alpha$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00428.

Пусть $\omega: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ есть модуль непрерывности первого порядка, т.е. монотонно возрастающая, непрерывная, полуаддитивная и равная нулю в нуле функция. Для модуля непрерывности $\omega(t)$ через $\omega^*(t)$ обозначим наименьшую вогнутую мажоранту функции $\omega(t)$. Хорошо известно, что для всех $t \in [0, 1]$ выполняется следующее неравенство С. Б. Стечкина: $\omega(t) \leq \omega^*(t) \leq 2\omega(t)$. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что ω является вогнутой функцией. Через $H(\omega)$ обозначим банахово пространство функций на $[0, 1]$, норма в котором определяется равенством

$$\|x|H(\omega)\| = \max \left\{ |x(0)|, \sup_{0 \leq t < s \leq 1} \frac{|x(t) - x(s)|}{\omega(t-s)} \right\},$$

а через $H^0(\omega)$ обозначим подмножество $H(\omega)$, состоящее из функций x , для каждой из которых найдется своя точка $t_x \in (0, 1)$, в которой справедливо хотя бы одно из соотношений

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{|x(t_x + h) - x(t_x)|}{\omega(h)} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|x(t_x + h) - x(t_x)|}{\omega(|h|)} = 0.$$

Если $\omega(h) = h^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), то соответствующее пространство обозначается через H_α .

Основным результатом первой части настоящей статьи является

ТЕОРЕМА 1. Пусть модуль непрерывности ω удовлетворяет соотношению

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h)}{h} = \infty. \quad (1)$$

Тогда существует замкнутое бесконечномерное подпространство $B \subset H(\omega)$ такое, что каждая отличная от тождественного нуля функция $x \in B$ не принадлежит $H^0(\omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что условие (1) и любое из условий

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h)}{h} = \infty, \quad \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h)}{h} = \infty \quad (1')$$

эквивалентны. В самом деле, из вогнутости функции $\omega(t)$ следует, что отношение $\omega(t)/t$ не возрастает. Поэтому (1) и любое из (1') эквивалентны.

Для доказательства теоремы нам потребуются некоторые вспомогательные построения.

Для модуля непрерывности $\omega(h)$, удовлетворяющего (1), можно определить так называемую *заполняющую последовательность*. Эта последовательность строится так.

Положим $h_0 = 1$ и пусть точки $h_1, \dots, h_n$ определены. Определим теперь точку h_{n+1} равенством

$$h_{n+1} = \sup \left\{ t: \frac{\omega(t)}{t} \geq 100 \frac{\omega(h_n)}{h_n} \text{ \& } \omega(t) \leq \frac{1}{100} \omega(h_n) \right\}. \quad (2)$$

Прямо из (2) следует, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\omega(h_j)}{h_j} &\leq \frac{100}{99} \frac{\omega(h_{k-1})}{h_{k-1}} \leq \frac{1}{99} \frac{\omega(h_k)}{h_k}, \quad h_{k+1} \leq \frac{h_k}{100}, \\ \sum_{j=k+1}^{\infty} \omega(h_j) &\leq \frac{100}{99} \omega(h_{k+1}) \leq \frac{1}{99} \omega(h_k). \end{aligned} \quad (3)$$

Заполняющие последовательности в последнее время находят все большее применение в различных областях анализа (см., например, [8]–[10]).

Непосредственно из (3) следует основное свойство заполняющих последовательностей.

ЛЕММА 1. *Положим*

$$\overline{\omega}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega(h_j) \min \left\{ \frac{t}{h_j}, 1 \right\}.$$

Тогда для $t \in (h_{n+1}, h_n]$ справедливы соотношения

$$t \frac{\omega(h_n)}{h_n} + \omega(h_{n+1}) \leq \overline{\omega}(t) \leq \frac{100}{99} \left(t \frac{\omega(h_n)}{h_n} + \omega(h_{n+1}) \right), \quad (4)$$

$$\frac{1}{100} \omega(t) \leq \overline{\omega}(t) \leq \frac{200}{99} \omega(t). \quad (5)$$

Положим

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \omega(h_j) \frac{t}{h_j}, & \text{при } t \in [0, h_j], \\ \omega(h_j) \left(2 - \frac{t}{h_j}\right), & \text{при } t \in (h_j, 2h_j], \end{cases} \quad (6)$$

и продолжим φ_j на всю ось периодически с помощью равенства $\varphi_j(t + 2h_j) = \varphi_j(t)$.

Легко проверить, что при всех $t \in \mathbb{R}$, $h > 0$ справедливо неравенство

$$|\varphi_j(t + h) - \varphi_j(t)| \leq \omega(h_j) \min \left\{ \frac{h}{h_j}, 1 \right\}. \quad (7)$$

Если же при некотором целом k выполнены неравенства $kh_j \leq t < t + h \leq (k + 1)h_j$, то справедливо равенство

$$|\varphi_j(t + h) - \varphi_j(t)| = \omega(h_j) \frac{h}{h_j}. \quad (8)$$

Занумеруем простые числа натурального ряда, начиная с 2, в последовательность $\{p_i\}_1^{\infty}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\psi_k(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{(p_k)^j}(t). \quad (9)$$

Из (3) и (6) следует, что ряд в правой части (9) абсолютно сходится в пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$. Кроме того, из (7), (8) и леммы 1 получим неравенство

$$\begin{aligned} |\psi_k(t + h) - \psi_k(t)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_{(p_k)^j}(t + h) - \varphi_{(p_k)^j}(t)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \omega(h_{(p_k)^j}) \min \left\{ \frac{h}{h_{(p_k)^j}}, 1 \right\} \leq \overline{\omega}(h) \leq \frac{200}{99} \omega(h). \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны, из (3) и (8) для $\bar{h} = h_{(p_k)^j}$ получим

$$\begin{aligned} |\psi_k(\bar{h}) - \psi_k(0)| &= |\psi_k(\bar{h})| \geq |\varphi_{(p_k)^j}(\bar{h})| - \sum_{i \neq j} |\varphi_{(p_k)^i}(\bar{h})| \\ &\geq \omega(\bar{h}) - \left(\sum_{i < (p_k)^j} |\varphi_i(\bar{h})| + \sum_{i > (p_k)^j} |\varphi_i(\bar{h})| \right) \\ &\geq \omega(\bar{h}) - \left(\frac{1}{99} \omega(\bar{h}) + \frac{1}{99} \omega(\bar{h}) \right) = \frac{97}{99} \omega(\bar{h}). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, из (10) и (11) следуют важные соотношения:

$$\frac{97}{99} \leq \|\psi_k|H(\omega)\| < \frac{200}{99}. \quad (12)$$

ЛЕММА 2. Пусть задана последовательность $\{b_i\}_1^\infty \in l^\infty$. Положим

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \psi_i(t).$$

Тогда $x \in H(\omega)$ и справедливы неравенства

$$\frac{95}{99} \sup_i |b_i| \leq \|x|H(\omega)\| \leq \frac{200}{99} \sup_i |b_i|. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3) следует, что ряд, определяющий функцию $x(t)$, равномерно сходится в $C[0, 1]$. Используя (3), (5) и (7) докажем правое неравенство в (13). Имеем

$$\begin{aligned} |x(t+h) - x(t)| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} b_i (\psi_i(t+h) - \psi_i(t)) \right| \leq \sup_i |b_i| \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k(t+h) - \psi_k(t)| \\ &\leq \sup_i |b_i| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_{(p_k)^j}(t+h) - \varphi_{(p_k)^j}(t)| \\ &\leq \sup_i |b_i| \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(t+h) - \varphi_j(t)| \leq \sup_i |b_i| \sum_{j=1}^{\infty} \omega(h_j) \min \left\{ \frac{h}{h_j}, 1 \right\} \\ &= \bar{\omega}(h) \sup_i |b_i| \leq \frac{200}{99} \omega(h) \sup_i |b_i|. \end{aligned}$$

Докажем левое неравенство в (13). Положим $\bar{h} = h_{(p_k)^j}$, $m = (p_k)^j$. Тогда из (11) получим

$$\begin{aligned} |x(\bar{h}) - x(0)| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} b_i \psi_i(\bar{h}) \right| \geq |b_k| |\psi_k(\bar{h})| - \sum_{i \neq k} b_i |\psi_i(\bar{h})| \\ &\geq \frac{97}{99} |b_k| \omega(\bar{h}) - \sup_{i \neq k} b_i \sum_{i \neq k} |\psi_i(\bar{h})| \\ &\geq \frac{97}{99} |b_k| \omega(\bar{h}) - \sup_{i \neq k} b_i \left(\sum_{i < m} |\psi_i(\bar{h})| + \sum_{i > m} |\psi_i(\bar{h})| \right) \\ &\geq \frac{97}{99} |b_k| \omega(\bar{h}) - \sup_{i \neq k} b_i \left(\frac{1}{99} \omega(\bar{h}) + \frac{1}{99} \omega(\bar{h}) \right) = \frac{1}{99} \omega(\bar{h}) (97 |b_k| - 2 \sup_{i \neq k} b_i). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим $B = \overline{\text{span}\{\psi_i/\|\psi_i\|H(\omega)\}}_{i=1}^{\infty}$. Тогда из (12) и леммы 2 следует, что пространство B является замкнутым подпространством пространства $H(\omega)$ изоморфным пространству l^{∞} , причем базис $\{\psi_i/\|\psi_i\|H(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ эквивалентен единичному базису пространства l^{∞} .

Пусть задана функция $x(t) = \sum_{i=j}^{\infty} a_i \psi_i(t)$, для которой $a_j \neq 0$ и

$$\sup_i |a_i| = 1. \quad (14)$$

Покажем, что в каждой точке $t_0 \in (0, 1)$ выполнено соотношение

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{|x(t_0 + h) - x(t_0)|}{\omega(h)} > 0. \quad (15)$$

Зафиксируем $i_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|a_{i_0}| \geq 7/8$, и рассмотрим функцию ψ_{i_0} . Выберем $k \in \mathbb{N}$, обозначим $j_0 = (p_{i_0})^k$ и выберем точку t_1 так, чтобы $h_{j_0}/8 \geq t_0 - t_1 > h_{j_0}/16$. Если при некотором l выполнены неравенства

$$lh_{j_0} \leq t_0 < t_1 \leq (l+1)h_{j_0}, \quad (16)$$

то согласно (6), (8) и (14) справедлива оценка

$$\begin{aligned} |x(t_0) - x(t_1)| &\geq |a_{i_0}| |\psi_{i_0}(t_0) - \psi_{i_0}(t_1)| - \sum_{i \neq i_0} |a_i| |\psi_i(t_0) - \psi_i(t_1)| \\ &\geq \frac{7}{8} |\varphi_{j_0}(t_0) - \varphi_{j_0}(t_1)| - \sum_{j \neq j_0} |\varphi_j(t_0) - \varphi_j(t_1)| \\ &\geq \frac{7}{8} |\varphi_{j_0}(t_0) - \varphi_{j_0}(t_1)| - |t_0 - t_1| \sum_{j < j_0} \frac{\omega(h_j)}{h_j} - \sum_{j > j_0} \omega(h_j) \\ &\geq \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{99}\right) |t_0 - t_1| \frac{\omega(h_{j_0})}{h_{j_0}} - \frac{1}{99} \omega(h_{j_0}) \\ &\geq \left(\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{99}\right) \frac{1}{16} - \frac{1}{99}\right) \omega(h_{j_0}) \geq \frac{1}{32} \omega(h_{j_0}), \end{aligned}$$

и поэтому справедливо неравенство

$$\frac{|x(t_0) - x(t_1)|}{\omega(|t_0 - t_1|)} \geq \frac{1}{32}. \quad (17)$$

Если соотношения (16) нарушаются, то положим $t_1 = t_0 + h_{j_0}$. Из геометрических соображений легко видеть, что в этом случае для ключевого слагаемого $|\varphi_{j_0}(t_0) - \varphi_{j_0}(t_1)|$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\varphi_{j_0}(t_0) - \varphi_{j_0}(t_1)| &\geq |\varphi_{j_0}(t_1) - \varphi_{j_0}((l+1)h_{j_0})| - |\varphi_{j_0}(t_0) - \varphi_{j_0}((l+1)h_{j_0})| \\ &\geq \frac{\omega(h_{j_0})}{h_{j_0}} (t_1 - (l+1)h_{j_0}) - \frac{\omega(h_{j_0})}{h_{j_0}} ((l+1)h_{j_0} - t_0) \\ &\geq \frac{15}{16} \omega(h_{j_0}) - \frac{1}{16} \omega(h_{j_0}) = \frac{7}{8} \omega(h_{j_0}) = \frac{7}{8} \omega(|t_1 - t_0|), \end{aligned}$$

и поэтому справедливо неравенство

$$\frac{|x(t_0) - x(t_1)|}{\omega(|t_0 - t_1|)} \geq \left(\frac{7}{8}\right)^2 - \frac{2}{99} > \frac{5}{8}. \quad (18)$$

Из (17) и (18) следует, что выполнено (15).

Выполнение соотношения

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{|x(t_0 + h) - x(t_0)|}{\omega(|h|)} \neq 0$$

объясняется аналогично.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположим теперь, что для модуля непрерывности $\omega_0(h)$ условие (1) не выполнено. Это означает, что $\omega_0(h)$ эквивалентно h . Покажем, что в этом случае нет аналога теоремы 1. Действительно, любая функция из H_1 абсолютно непрерывна, и поэтому дифференцируема почти всюду. Пусть теперь $x, y \in H_1$. Если найдется t_1 , для которой $y'(t_1) = 0$, то $y \in H_1^0$; в противном случае выберем точку $t_0 \in (0, 1)$, в которой существуют производные у обеих функций, и рассмотрим линейную комбинацию $z(t) = x(t) - (x'(t_0)/y'(t_0))y(t)$. Тогда $z \in H_1^0$. Таким образом, в случае нарушения условия (1) аналога теоремы 1 не может быть.

Сейчас мы продемонстрируем, как построенные выше функции могут быть применены в задаче об исправимости функций из $H(\omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что функция $x \in H(\omega)$ *исправима*, если существует измеримое множество M положительной меры такое, что для всех $t \in M$ выполнено соотношение

$$\lim_{s \rightarrow t; s, t \in M} \frac{|x(t) - x(s)|}{\omega(|t - s|)} = 0.$$

Отметим, что если продолжить функцию x с множества M , о котором говорится в определении 1, на замыкание M по непрерывности, а потом продолжить на $[0, 1] \setminus M$ по линейности, то у продолженной функции гладкость будет выше, чем у самой негладкой функции из $H(\omega)$.

Следующая теорема демонстрирует “равномерное” отсутствие свойства исправимости у функций из пространства B , построенного выше.

ТЕОРЕМА 2. Пусть B подпространство $H(\omega)$, построенное в теореме 1. Тогда каждая отличная от тождественного нуля функция $x \in B$ не является исправимой. Более того, существует константа $c_0 > 0$ такая, что для каждой функции $x \in B$ с $\|x\|_{H(\omega)} = 1$ и произвольного множества M положительной меры найдется последовательность пар точек $t_{0,n}, t_{1,n} \in M$, $|t_{0,n} - t_{1,n}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, для которой

$$|x(t_{0,n}) - x(t_{1,n})| \geq c_0 \omega(|t_{0,n} - t_{1,n}|).$$

Можно положить $c_0 = 1/32$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Только вместо точек t_0, t_1 в доказательстве основной теоремы нужно использовать пару точек, существование которых гарантируется следующей элементарной леммой о точках плотности.

ЛЕММА 3. Пусть t_0 есть точка плотности измеримого множества D . Тогда существует такое положительное число $\delta(t_0)$, что при каждом $\delta: 0 < \delta < \delta(t_0)$ существуют две точки $t'_1 \in D$, $t''_1 \in D$ такие, что выполняются неравенства

$$\frac{\delta}{8} \geq t_0 - t'_1 \geq \frac{\delta}{16}, \quad \frac{\delta}{8} \geq t''_1 - t_0 \geq \frac{\delta}{16}.$$

Следующие определения связаны с аппроксимативной гладкостью функции $x \in H(\omega)$ относительно модуля непрерывности ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть функция $x \in H(\omega)$. Будем говорить, что точка $t \in (0, 1)$ принадлежит множеству M_x , если на некотором множестве M , для которого точка t является точкой плотности, выполняется соотношение

$$\lim_{s \rightarrow t; s \in M} \frac{|x(t) - x(s)|}{\omega(|t - s|)} = 0.$$

Если $\mu(M_x) > 0$, то будем говорить, что x принадлежит классу $H_{ap}^0(\omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что точка $t \in (0, 1)$ принадлежит множеству $M_{x,n}$, если для любого подмножества M , имеющего точку t точкой плотности, выполняется соотношение

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow t; s \in M} \frac{|x(t) - x(s)|}{\omega(|t - s|)} \geq \frac{1}{n}.$$

Для функции $x \in H(\omega)$ свойства множеств M_x и $M_{x,n}$ собраны в следующей лемме.

ЛЕММА 4. Пусть $x \in H(\omega)$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$M_{x,n+1} \subseteq M_{x,n}, \quad (19)$$

$$M_x \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{x,n} \right) = \emptyset, \quad (20)$$

$$\mu(M_x) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{x,n} \right) = 1. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение свойств (19) и (20) очевидно. Докажем (21).

Пусть t является точкой плотности множества $(0, 1) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{x,n} \right)$. Покажем, что $t \in M_x$. Так как t является точкой плотности множества $(0, 1) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{x,n} \right)$, найдется последовательность множеств M_n , для каждого из которых точка t является точкой плотности и для каждого из которых выполнено неравенство

$$\sup_{s \in M_n} \frac{|x(t) - x(s)|}{\omega(|t - s|)} \leq \frac{1}{n}. \quad (22)$$

Выберем сначала последовательность $\{\epsilon_i\}$ так, чтобы выполнялись условия

$$0 < \epsilon_{i+1} < \epsilon_i, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=k}^{\infty} (1 - \epsilon_i) = 1. \quad (23)$$

Далее построим последовательность $\{\delta_i\}$. Сначала выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы при всех $0 < \delta < \delta_1$ выполнялось неравенство

$$\mu(M_1 \cap (t - \delta, t + \delta)) > 2(1 - 2^{-1})\delta.$$

Положим $I_1 = (t - \delta_1, t + \delta_1)$, и пусть элементы $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ и интервалы $I_2 = (t - \delta_2, t + \delta_2), \dots, I_n = (t - \delta_n, t + \delta_n)$ уже построены. Выберем теперь $\delta_{n+1} \in (0, \delta_n)$ так, чтобы при всех $0 < \delta < \delta_{n+1}$ выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} \mu(M_{n+1} \cap (t - \delta, t + \delta)) &> 2(1 - 2^{-n-1})\delta, \\ \mu(M_{n+1} \cap I_{n+1}) &> (1 - \epsilon_n)\mu(M_n \cap I_{n+1}). \end{aligned} \quad (24)$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ положим $C_n = (t - \delta_n, t - \delta_{n+1}) \cup (t + \delta_{n+1}, t + \delta_n)$ и определим множество M равенством

$$M = t \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n \cap C_n) \right).$$

Покажем сначала, что t есть точка плотности множества M .

Пусть $\delta \in [\delta_{n+1}, \delta_n)$. Оценим меру множества $M \cap (t - \delta, t + \delta)$. Из представления $(t - \delta, t + \delta) = (t - \delta, t - \delta_{n+1}) \cup (t + \delta_{n+1}, t + \delta) \cup (\bigcup_{k=n+1}^{\infty} C_k)$ получим

$$\begin{aligned} \mu(M \cap (t - \delta, t + \delta)) &= \mu(M_n \cap \{(t - \delta, t - \delta_{n+1}) \cup (t + \delta_{n+1}, t + \delta)\}) \\ &\quad + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(M_k \cap C_k). \end{aligned} \quad (25)$$

Используя (24), получим неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m \mu(M_k \cap C_k) + \mu(M_m \cap I_{m+1}) &= \sum_{k=n+1}^{m-1} \mu(M_k \cap C_k) + \mu(M_m \cap I_m) \\ &= \sum_{k=n+1}^{m-2} \mu(M_k \cap C_k) + \mu(M_{m-1} \cap C_{m-1}) + \mu(M_m \cap I_m) \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{m-2} \mu(M_k \cap C_k) + \mu(M_{m-1} \cap C_{m-1}) + (1 - \epsilon_{m-1})\mu(M_{m-1} \cap I_m) \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{m-2} \mu(M_k \cap C_k) + (1 - \epsilon_{m-1})\mu(M_{m-1} \cap I_{m-1}) \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{m-3} \mu(M_k \cap C_k) + (1 - \epsilon_{m-2})(1 - \epsilon_{m-1})\mu(M_{m-2} \cap I_{m-2}) \\ &\geq \mu(M_{n+1} \cap C_{n+1}) + \mu(M_{n+2} \cap I_{n+2}) \prod_{k=n+2}^{m-1} (1 - \epsilon_k) \\ &\geq \mu(M_{n+1} \cap I_{n+1}) \prod_{k=n+1}^{m-1} (1 - \epsilon_k). \end{aligned} \quad (26)$$

Поэтому из (24)–(26) следует, что верно и такое неравенство:

$$\begin{aligned}
 \mu(M \cap (t - \delta, t + \delta)) &\geq \mu(M_n \cap \{(t - \delta, t - \delta_{n+1}) \cup (t + \delta_{n+1}, t + \delta)\}) \\
 &\quad + \mu(M_{n+1} \cap I_{n+1}) \prod_{k=n+1}^{\infty} (1 - \epsilon_k) \\
 &\geq \mu(M_n \cap \{(t - \delta, t - \delta_{n+1}) \cup (t + \delta_{n+1}, t + \delta)\}) \\
 &\quad + \mu(M_n \cap I_{n+1}) \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \epsilon_k) \\
 &\geq \mu(M_n \cap (t - \delta, t + \delta)) \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \epsilon_k) \\
 &\geq 2\delta(1 - 2^{-n}) \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \epsilon_k).
 \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и (23) непосредственно следует, что t является точкой плотности множества M .

Равенство

$$\lim_{s \rightarrow t; s \in M} \frac{|x(s) - x(t)|}{\omega(|s - t|)} = 0$$

следует из (22):

$$\lim_{s \rightarrow t; s \in M} \frac{|x(s) - x(t)|}{\omega(|s - t|)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in (M_n \cap C_n)} \frac{|x(s) - x(t)|}{\omega(|s - t|)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Таким образом $t \in M_x$. Лемма доказана.

Покажем теперь, что множество функций $H_{ap}^0(\omega)$ является множеством первой категории в $H(\omega)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть ω – некоторый модуль непрерывности. Тогда множество функций $H_{ap}^0(\omega)$ является множеством первой категории в $H(\omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что модуль непрерывности удовлетворяет условию (1).

Определим для $n = 2, 3, \dots$ множества $U_n(\omega) \subset H(\omega)$ с помощью равенств

$$U_n(\omega) = \left\{ x \in H(\omega) : \frac{1}{n} < \mu(M_x) \leq \frac{1}{n-1} \right\}.$$

Покажем, что каждое множество $U_n(\omega)$ является нигде не плотным в $H(\omega)$. Для этого достаточно показать, что любой шар с центром в точке $x_0 \in U_n(\omega)$ содержит шар из $H(\omega)$ без точек множества $U_n(\omega)$.

Итак, пусть задан шар $B(x_0, R) \subset U_n(\omega)$. Для каждого $m = 2, 3, \dots$ образуем множества $M_{x_0, m}$. Согласно лемме 4 выберем теперь m_0 так, чтобы выполнялось неравенство

$$m(M_{x_0} \cup M_{x_0, m_0}) \geq 1 - \frac{1}{n^2}. \quad (27)$$

Положим $\bar{\psi} = \psi_1 / \|\psi_1\| H(\omega)$ (функции ψ_k определены равенством (9)). Тогда $\bar{\psi} \in B$ и поэтому для нее справедлива вторая половина теоремы 2 с некоторой константой $c_0 > 0$. Выберем теперь $\epsilon > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\epsilon(1 + \frac{c_0}{2}) < R, \quad 0 < \frac{1}{m_0} - \epsilon(1 + c_0). \quad (28)$$

Образует функцию $x_1 = x_0 + \epsilon\bar{\psi}$ и рассмотрим шар $B(x_1, \epsilon c_0/2)$. Из первого условия в (28) следует, что $B(x_1, \epsilon c_0/2) \subseteq B(x_0, R)$. Покажем, что каждая функция $z \in B(x_1, \epsilon c_0/2)$ не принадлежит множеству $U_n(\omega)$.

Предположим противное. Тогда из (27) следует, что $\mu(\{M_{x_0} \cup M_{x_0, m_0}\} \cap M_z) > 0$. Так как $M_{x_0} \cap M_{x_0, m_0} = \emptyset$, возможны два случая.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\mu(M_{x_0} \cap M_z) > 0$. Применим теорему 2 для множества $M_{x_0} \cap M_z$. Согласно теореме 2 найдется последовательность пар точек $t_{0,k}, t_{1,k}$ из $M_{x_0} \cap M_z$ такая, что $|t_{0,k} - t_{1,k}| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|z(t_{0,k}) - z(t_{1,k})|}{\omega(|t_{0,k} - t_{1,k}|)} &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_1(t_{0,k}) - x_1(t_{1,k})| - \epsilon \frac{c_0}{2} \omega(|t_{0,k} - t_{1,k}|)}{\omega(|t_{0,k} - t_{1,k}|)} \\ &\geq \epsilon \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\bar{\psi}(t_{0,k}) - \bar{\psi}(t_{1,k})|}{\omega(|t_{0,k} - t_{1,k}|)} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_0(t_{0,k}) - x_0(t_{1,k})|}{\omega(|t_{0,k} - t_{1,k}|)} - \epsilon \frac{c_0}{2} \\ &\geq \epsilon c_0 - \epsilon \frac{c_0}{2} = \epsilon \frac{c_0}{2} > 0, \end{aligned}$$

что противоречит тому, что $t_{0,k}, t_{1,k} \in M_z$.

Пусть теперь $\mu(M_{x_0, m_0} \cap M_z) > 0$. Тогда для любой точки плотности $t \in M_{x_0, m_0} \cap M_z$ прямо из определения следует неравенство

$$\begin{aligned} |z(t) - z(s)| &\geq |x_1(t) - x_1(s)| - \frac{\epsilon c_0}{2} \omega(|t - s|) \\ &\geq |x_0(t) - x_0(s)| - \epsilon |\bar{\psi}(t) - \bar{\psi}(s)| - \frac{\epsilon c_0}{2} \omega(|t - s|) \\ &\geq \frac{1}{m_0} \omega(|t - s|) - \epsilon \omega(|t - s|) - \frac{\epsilon c_0}{2} \omega(|t - s|) \\ &\geq \left(\frac{1}{m_0} - \epsilon - \frac{\epsilon c_0}{2} \right) \omega(|t - s|). \end{aligned}$$

Последнее неравенство согласно (28) противоречит тому, что $t, s \in M_z$. Таким образом, при условии, что модуль непрерывности удовлетворяет условию (1), теорема доказана.

Предположим теперь, что для модуля непрерывности $\omega_0(h)$ условие (1) не выполнено. Как уже указывалось выше, это означает, что $\omega_0(h)$ эквивалентно h . В этом случае все доказательство сохраняется при замене функции $\bar{\psi}(t)$ на конечноточечную ломаную без участков постоянства.

Теорема полностью доказана.

Ясно, что если функция $x \in H(\omega)$ исправима, то $\mu(M_x) > 0$. Поэтому верно следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Множество исправимых функций в $H(\omega)$ является множеством первой категории в $H(\omega)$.*

Пусть $1 \geq \beta > \alpha > 0$. Поскольку каждая функция из H_α , для которой найдется функция y из H_β с $\mu\{t: x(t) = y(t)\} > 0$, исправима в H_α , то справедлив и следующий факт.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $1 \geq \beta > \alpha > 0$. Множество функций из H_α , для каждой из которых найдется своя функция y из H_β , удовлетворяющая условию $\mu\{t: x(t) = y(t)\} > 0$, является множеством первой категории в H_α .*

Конечно, следствие 2 содержит и результат К. Гофмана [6], и результат И. М. Михеева [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fonf V. P., Gurariy V. I., Kadets M. I. An infinite-dimensional subspace $C[0, 1]$ consisting of nowhere differentiable functions // *Comp. Rend. Acad. Bulg. Sci.* 1999. V. 52. № 11–12. P. 13–16.
- [2] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [3] Петрушев П. П., Троянски С. Л. О теореме Банаха–Мазура об универсальности $C[0, 1]$ // *Comp. Rend. Acad. Bulg. Sci.* 1984. Т. 37. № 3. С. 283–285.
- [4] Гурарий В. И. Линейное пространство состоящее из всюду недифференцируемых функций // *Comp. Rend. Acad. Bulg. Sci.* 1991. Т. 44. № 5. С. 13–15.
- [5] Rodriguez-Piazza I. Every separable Banach space is isometric to a space of continuous nowhere differentiable functions // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1995. V. 123. № 12. P. 3650–3654.
- [6] Goffman C. Approximation of non-parametric surfaces of finite area // *J. Math. Mech.* 1963. V. 12. P. 737–745.
- [7] Михеев И. М. Одно свойство функций, представимых лакунарными рядами Фурье // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. -мех.* 1972. № 5. С. 67–71.
- [8] Бережной Е. И. Оценки равномерного модуля непрерывности функций из симметричных пространств // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1996. Т. 60. № 2. С. 3–20.
- [9] Ульянов П. Л. О работах Н. Н. Лузина по метрической теории функций // *УМН.* 1985. Т. 40. № 3. С. 15–70.
- [10] Brudnyi Yu., Krugljak N. Interpolation Functors and Interpolation Spaces. V. 1. North Holland, 1991.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: ber@uniyar.ac.ru

Поступило
25.01.2002
Исправленный вариант
08.07.2002