Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, А. С. Слуцкий, Осреднение эллиптической системы при утончении ячеек периодичности в одном направлении, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 6, 878–891

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2660>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 15:30:48

УДК 517.946

ОСРЕДНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ УТОНЧЕНИИ ЯЧЕЕК ПЕРИОДИЧНОСТИ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ

С. А. Назаров, А. С. Слуцкий

Произведено осреднение эллиптической системы второго порядка с анизотропным фрактальным строением, характерным для многих реальных объектов: ячейки периодичности утончаются в одном направлении. Рассматривается задача в прямоугольнике, на двух сторонах которого заданы условия Дирихле, а на двух – условия периодичности. Установлена явная формула для осредненного оператора и получена асимптотическая оценка остатка. Точность аппроксимации зависит от показателя $\kappa \in (0, 1/2]$ гладкости правой части по медленным переменным (пространство Соболева–Слободанского) и оценивается величиной $O(h^\kappa)$ при $\kappa \in (0, 1/2)$ и $O(h^{1/2}(1 + |\log h|))$ при $\kappa = 1/2$.

Библиография: 12 названий.

1. Разветвляющаяся периодичность и задача осреднения. Пусть $q \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $q > 1$ и $S = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y \in (0, b_1), z \in (0, b_2)\}$ – прямоугольник со сторонами $b_1 > 0$ и $b_2 > 0$. Функцию Ψ назовем *периодической с q -ветвлением* в направлении z , если при $m = 0$ она удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \Psi(0, z) &= \Psi(b_1, z), & z \in (0, b_2), \\ q^{-m} \Psi(qy, 0) &= \Psi(y, b_2), & y \in (0, b_1). \end{aligned} \quad (1)$$

Разумеется, в правой части второго соотношения в (1) стоит b_1 -периодическое продолжение Ψ относительно переменной y (в соответствии с требованием первого соотношения в (1)). При $m = 0$ и $q = 1$ соотношения (1) означают обычную периодичность. Далее всегда считаем, что $q > 1$.

Рассмотрим еще один прямоугольник $\Omega = (0, a_1) \times (0, a_2)$ и введем малый параметр $h > 0$ так, чтобы $a_i = N_i b_i h$, причем N_i – большие натуральные числа; $i = 1, 2$. Прямыми $\Gamma_j = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = j h b_2\}$ рассечем Ω на полосы $\Pi_j(h)$, $j = 1, \dots, N_2$, имеющие ширину $h b_2$. Каждую из этих полосок разобьем на конгруэнтные прямоугольники $S_j^p(h) \simeq S_j(h)$ с размерами $h q^{-j} b_1 \times h b_2$; при этом $p = 1, \dots, q^j N_1$. Подчеркнем, что при увеличении номера ряда j основания прямоугольников уменьшаются (см. рис. 1).

Помимо “медленных” переменных x будем использовать “быстрые” переменные $\xi = (\xi_1, \xi_2) = h^{-1}x$ и растянутую поперечную координату

$$\eta^{(j)} = q^j \xi_1, \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00838.

Рис. 1. Случай $q = 2$, $N_1 = 2$, $h = 1$

учитывающую упомянутое утончение прямоугольника. Далее будет удобно обозначать ξ_2 также и через ζ , а под η понимать переменную, совпадающую с $\eta^{(j)}$ в $\Pi_j(h)$, $j = 1, \dots, N_2$.

При выполнении соотношений (1) с $m \in \mathbb{N}$ говорим, что у функции Ψ имеется q -ветвление с коэффициентом q^{-m} . Как нетрудно убедиться, при таком свойстве Ψ функция $\Psi^{[m]}$, заданная формулами

$$\overline{\Pi_j(h)} \ni x \mapsto \Psi^{[m]}(\eta, \zeta) = q^{-mj} \Psi(\eta, \zeta), \quad j = 1, \dots, N_2, \quad (3)$$

оказывается непрерывной в $\overline{\Omega}$. Кроме того, производная $\partial^m \Psi / \partial y_1^m$ становится периодической с q -ветвлением, поскольку каждое дифференцирование функции Ψ придает коэффициенту ветвления дополнительный множитель q .

Пусть $D(\nabla_x)$ – матрица размером $k \times n$, составленная из однородных дифференциальных операторов первого порядка с постоянными коэффициентами. Предположим, что $D(\nabla_x)$ удовлетворяет следующему условию алгебраической комплектности [1]: для всякой строки однородных степени $\rho \geq \rho_D$ полиномов $P = (P_1, \dots, P_n)$ найдется такая строка полиномов $Q = (Q_1, \dots, Q_k)$, что $P(t_1, t_2) = Q(t_1, t_2)D(t_1, t_2)$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\mathcal{L}(h, x, \nabla_x) u^h(x) := D(-\nabla_x)^\top A^{[0]}(x, \eta, \zeta) D(\nabla_x) u^h(x) = f^h(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

где $u^h = (u_1^h, \dots, u_n^h)^\top$, $f^h = (f_1^h, \dots, f_n^h)^\top$, $\top$ – знак транспонирования, A – матрица размером $k \times k$, ее элементами служат гладкие вещественные функции переменных $x \in \overline{\Omega}$, $y \in [0, b_1]$, $z \in [0, b_2]$, которые вместе со своими производными по переменным x и z являются a_1 -периодическими относительно x и периодическими относительно (y, z) с q -ветвлением в направлении z , а производные $\nabla_x^\alpha \partial_y^m \partial_z^p A(x, y, z)$ обладают q -ветвлением с коэффициентом q^{-m} . Если зависимость от η и ζ определена согласно (3), матрица $A^{[0]}(x, \eta, \zeta)$ гладкая в $\overline{\Omega}$.

Рис. 2 иллюстрирует частный случай разветвляющейся периодичности, а именно, на нем показано, как “размножается” возмущение (затемненные пятна) постоянной матрицы коэффициентов A согласно правилу (3) при $q = 3$. Далее в п. 4 (формула (38)) предполагается аналогичная структура правой части f^h : гладкая функция может быть возмущена, например, на тех же затемненных участках области Ω . Подчеркнем, что пятна

Рис. 2. Случай $q = 3$, $N_1 = 1$, $h = 1$

не являются подобными – их форма меняется в соответствии с размерами содержащих их ячеек S_j^p .

На сторонах прямоугольника Ω поставим условия Дирихле и условия периодичности

$$\begin{aligned} u^h(x_1, 0) = 0, \quad u^h(x_1, a_2) = 0, \quad x_1 \in (0, a_1), \\ u^h(0, x_2) = u^h(a_1, x_2), \quad \partial_{x_1} u^h(0, x_2) = \partial_{x_1} u^h(a_1, x_2), \quad x_2 \in (0, a_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Матрицу A считаем симметрической и положительно определенной при всех $(\eta, \zeta) \in \overline{S_j}$. В этом случае благодаря алгебраической комплектности оператор $\mathcal{L}$ оказывается *формально положительным* [1] и обладает *полиномиальным свойством* [2], [3].

Введем подпространство $\dot{H}_{\text{per}}^1(\Omega)$ функций из $H^1(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (5₁) и (5₂), и обозначим $H_{\text{per}}^{-1}(\Omega) = \dot{H}_{\text{per}}^1(\Omega)^*$ сопряженное пространство. Следующее утверждение известно (см. [1], [2]) и основывается на неравенстве Корна

$$\|u^h; H^1(\Omega)\| \leq c \|Du^h; L_2(\Omega)\|, \quad (6)$$

обеспеченном алгебраической комплектностью и условием Дирихле (5₁).

ЛЕММА 1. *При введенных выше предположениях задача (4), (5) является эллиптической, отображение $\mathcal{L}: \dot{H}_{\text{per}}^1(\Omega)^n \rightarrow H_{\text{per}}^{-1}(\Omega)^n$ – изоморфизмом, а для (общенного) решения задачи (4), (5) $u^h \in \dot{H}_{\text{per}}^1(\Omega)^n$ выполняется неравенство*

$$\|u^h; H^1(\Omega)\| \leq c \|f^h; H_{\text{per}}^{-1}(\Omega)\|,$$

в котором постоянная c не зависит от параметра $h \in (0, h_0]$.

Основная цель статьи – осреднение задачи (4), (5) и построение асимптотики ее решения при $h \rightarrow +0$. Зависимость матрицы коэффициентов A от малого параметра h характеризуется измельчением ячеек периодичности в одном направлении и соответствует геометрическим структурам, свойственным кровеносным, вегетативным или мелиорационным системам. Подобное строение могут иметь и упругие тела, изготовленные искусственно (специальные каркасные конструкции) или подвергшихся определенным воздействиям (так называемые трещины серебра – *craze*). Если бы ширина полоски $\Pi_j(h)$ составляла $hq^{-j}b_2$, и, следовательно, ячейки $S_j^p(h)$ имели размеры $hq^{-j}b_1 \times$

$hq^{-j}b_2$ и оказались подобными, то возникла бы система дифференциальных уравнений фрактального типа в тонком прямоугольнике со сторонами a_1 и $hb_2(1 - q^{-1})^{-1}$ (последний сомножитель – сумма геометрической прогрессии со знаменателем $1/q$), причем сопутствующая система уравнений на ячейке периодичности, приобретающей размеры $b_1 \times b_2(1 - q^{-1})^{-1}$, сохранила бы фрактальный тип (ср. с [4], [5] и др.).

В рассматриваемой ситуации измельчение производится лишь в одном направлении и высота hb_2 ячеек остается неизменной. Это обстоятельство, с одной стороны, вынуждает модифицировать стандартный в теории осреднения асимптотический анзац (см. [6]–[8] и др.), усложнив его за счет привлечения анзацев, обслуживающих тонкие области (см. [9], [10] и др.), но с другой стороны, позволяет получить *явные выражения* (28), (25) для матрицы $\mathbf{A}$ в осредненной задаче

$$\begin{aligned} D(-\nabla_x)^\top \mathbf{A}(x) D(\nabla_x) v(x) &= \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega, \\ v(x_1, 0) &= 0, \quad v(x_1, a_2) = 0, \quad x_1 \in (0, a_1), \\ v(0, x_2) &= v(a_1, x_2), \quad \partial_{x_1} v(0, x_2) = \partial_{x_1} v(a_1, x_2), \quad x_2 \in (0, a_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Эти формулы громоздки, но используют лишь интегрирование и алгебраические операции.

В части обоснования полученных асимптотических формул следует обратить внимание на несколько новых моментов. Во-первых, зависимость правой части $f = F^{[0]}$ от медленной переменной x соответствует классу Соболева–Слободешко H^κ с дробным показателем $\kappa \in (0, 1/2]$, а лемма 8 мажорирует асимптотический остаток величиной $O(h^\kappa)$. Во-вторых, в лемме 8 фигурируют L_∞ -нормы функций быстрых переменных и поэтому конструируются три члена асимптотики решения вспомогательной задачи на тонкой области $S_j(1)$, удовлетворяющие уравнениям поточечно с погрешностью $O(q^{-j})$. В-третьих, относительная толщина ячейки равна $O(q^{-j})$ и является малым параметром только при больших номерах j , а значит, главный член невязки, оставленной глобальным асимптотическим приближением в системе (4), составляет $O(h^{-1}q^{-j})$ и неограниченно возрастает при $h \rightarrow +0$ и фиксированном j . Оценить по норме пространства $H^1(\Omega)$ разность истинного решения u и решения v осредненной задачи (7), подправленного асимптотическим корректором, удается благодаря различным вариантам неравенства Харди и соотношению $q^{-j} = O(\exp(-h\delta x_2))$, в котором $\delta = b_2^{-1} \log q > 0$, а точка x берется из полоски $\Pi_j(h)$.

2. Предварительные (но безуспешные) преобразования. Сначала произведем *формальное осреднение* в каждой из полос $\Pi_j(h)$, для чего попытаемся воспользоваться обычным анзацем без учета q -ветвления:

$$v(x) + hV^j(x, \xi) D(\nabla_x) v(x) + \dots \quad (8)$$

Укажем правило дифференцирования сложной функции

$$D(\nabla_x) \Psi(x, \xi) = D_x \Psi(x, \xi) + h^{-1} D_\xi \Psi(x, \xi). \quad (9)$$

Здесь оператор $D_x := D(\nabla_x)$ дифференцирует по первому аргументу, а $D_\xi := D(\nabla_\xi)$ – по второму. Подставив анзац (8) в систему (4) и собрав члены порядка h^{-1} , приходим к уравнению

$$-D_\xi^\top A D_\xi V^j = D_\xi^\top A \quad \text{на } S_j(1), \quad (10)$$

которое дополним условиями периодичности с q -ветвлением

$$\begin{aligned} V^j(x, q\xi_1, 0) &= V^j(x, \xi_1, b_2), \quad \partial_{\xi_2} V^j(x, q\xi_1, 0) = \partial_{\xi_2} V^j(x, \xi_1, b_2), \quad \xi_1 \in (0, b_1 q^{-j}); \\ V^j(x, 0, \xi_2) &= V^j(x, b_1 q^{-j}, \xi_2), \quad \partial_{\xi_1} V^j(x, 0, \xi_2) = \partial_{\xi_1} V^j(x, b_1 q^{-j}, \xi_2), \quad \xi_2 \in (0, b_2). \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим $\mathcal{H}^1(S_j(1))$ подпространство в пространстве Соболева $H^1(S_j(1))$, состоящее из функций, которые удовлетворяют первым условиям из (11₁) и (11₂). Нетрудно убедиться в том, что при $\mathfrak{F} \in L_2(S_j(1))^m$ уравнение

$$-D_\xi^\top A D_\xi \mathfrak{X} = \mathfrak{F} \quad \text{на } S_j(1)$$

с условиями периодичности вида (11) имеет решение $\mathfrak{X} \in \mathcal{H}(S_j(1))^m$ в том и только том случае, если

$$\int_{S_j(1)} \mathfrak{F}(\xi) d\xi = 0. \quad (12)$$

Интегрируя по частям при учете периодичности с q -ветвлением матрицы A , убеждаемся в справедливости условия (12) для $\mathfrak{F} = D_\xi^\top A$. Таким образом, решение задачи (10), (11) существует.

Соберем коэффициенты при h^0 в уравнении (4), переписанном при учете формул (8), (9), и получим

$$-D_\xi^\top A D_\xi v_2^j = D_x^\top A D_x v + D_\xi^\top A D_x V^j D_x v + D_x^\top A D_\xi V^j D_x v + F \quad \text{на } S_j(1). \quad (13)$$

Условие (12) разрешимости уравнения (13) с условиями периодичности (11) имеет вид

$$\mathbf{L}^j(x, \nabla_x) v = \mathbf{F}^j(x), \quad (14)$$

где $\mathbf{L}^j(x, \nabla_x) = -D_x^\top \mathbf{A}^j(x) D_x$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^j(x) &= |S_j(1)|^{-1} \int_{S_j(1)} \{A(x, \xi) + A(x, \xi) D_\xi V^j(x, \xi)\} d\xi, \\ \mathbf{F}^j(x) &= |S_j(1)|^{-1} \int_{S_j(1)} F(x, \xi_1, q^j \xi_2) d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

3. Осреднение задачи. Поскольку данные $\mathbf{L}^j$ и $\mathbf{F}^j$ зависят от номера j полосы $\Pi_j(h) \ni x$, уравнение (14) не поддается осмыслению. Тем не менее, в дальнейшем мы убедимся, что предел $\mathbf{L}^j$ при $j \rightarrow +\infty$ как раз и является правильным осредненным оператором. Дело в том, что относительная толщина ячейки $S_j(1)$ составляет $O(q^{-j})$ и оказывается малой при большом j . Поэтому для самого корректора V^j разумно применить асимптотический анзац, приемлемый для решений краевых задач в тонких областях и обеспеченный полиномиальным свойством системы (13) (см. [11], [2]). Положим

$$V^j(\varepsilon, x, \xi) = w(x, \zeta) + q^{-j} W(x, \eta^{(j)}, \zeta) + q^{-2j} U(x, \eta^{(j)}, \zeta) + \dots, \quad (16)$$

где $\eta^{(j)}$ и ζ – быстрые переменные (см. (2)). Далее по возможности не указываем индекс j .

Матрица D_ξ , записанная при помощи переменных (η, ζ) , представляется как сумма

$$\begin{aligned} D_\xi &= D(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}) = q^j D_\eta + D_\zeta, \\ D_\eta &= D(\partial_\eta, 0) = D_1 \partial_\eta, \quad D_\zeta = D(0, \partial_\zeta) = D_2 \partial_\zeta, \quad D_i = D(\delta_{1,i}, \delta_{2,i}). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставим формулы (16) и (17) в систему (10) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях q^{-j} . Множитель при q^j имеет вид $D_\eta^\top A D_\eta W + D_\eta^\top A + D_\eta^\top A D_\zeta w$ и, следовательно, появляется такая система обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $(0, b_1) \ni y$ с параметрами $x \in \Omega$ и $z \in (0, b_2)$:

$$-D_y^\top A(x, y, z) D_y W(x, y, z) = D_y^\top A(x, y, z) + D_y^\top A(x, y, z) D_z w(x, z);$$

здесь $D_y = D_1 \partial_y$, $D_z = D_2 \partial_z$. Из соотношений (11) вытекает обычное условие периодичности по переменной y

$$W(x, 0, z) = W(x, b_1, z), \quad D_1^\top A(x, 0, z) D_y W(x, 0, z) = D_1^\top A(x, b_1, z) D_y W(x, b_1, z). \quad (18)$$

Поскольку $D_y^\top A D_y = \partial_y D_1^\top A D_y$, интегрируя по y при учете второго равенства в (18), находим, что

$$-D_1^\top A(x, y, z) D_1 \partial_y W(x, y, z) = D_1^\top A(x, y, z) + D_1^\top A(x, y, z) D_z w(x, z) - C(x, z), \quad (19)$$

где $C(x, z) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ при всех x и z .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Матрица $D_1^\top A D_1$ размером $n \times n$ симметрическая и положительно определенная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что упомянутая матрица симметрична. Кроме того, благодаря предположению о матрице A имеем $\mathcal{X}^\top D_1^\top A D_1 \mathcal{X} \geq c_A |\mathcal{X}|^2$ при любом столбце $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$; здесь $c_A > 0$. Осталось убедиться в том, что $D_1 \mathcal{X} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, если только $\mathcal{X} \neq 0$. Для любого столбца $\mathcal{X} \in (\mathbb{R}^n)^\top$ свойство алгебраической комплексности матрицы D доставляет такую полиномиальную строку Q , что

$$Q(t_1, t_2) D(t_1, t_2) = P(t_1) := \mathcal{X} t_1^{\rho_D}. \quad (20)$$

Положим $t_2 = 0$. Заметим, что в силу (20) $Q(t_1, 0) = \mathcal{Y} t_1^{\rho_D}$ при некоторой строке $\mathcal{Y} \in (\mathbb{R}^m)^\top$, и преобразуем (20) в формулу $\mathcal{Y} D_1 = \mathcal{X}^\top$. Следовательно, $\mathcal{Y} D_1 \mathcal{X} = |\mathcal{X}|^2$, т.е. при $\mathcal{X} \neq 0$ равенство $D_1 \mathcal{X} = 0$ в самом деле невозможно.

Теперь соотношение (19) переписывается следующим образом:

$$D_y W = -\{D_1 [D_1^\top A D_1]^{-1} D_1^\top A + D_1 [D_1^\top A D_1]^{-1} D_1^\top A D_z w\} + D_1 [D_1^\top A D_1]^{-1} C. \quad (21)$$

Так как матрица-функция W периодична относительно переменной y , выражение (21) обязано иметь нулевое среднее по $y \in (0, b_1)$, а значит, матрица $C(x, z)$ определяется так:

$$C = \langle [D_1^\top A D_1]^{-1} \rangle_1^{-1} (\langle [D_1^\top A D_1]^{-1} D_1^\top A \rangle_1 + \langle [D_1^\top A D_1]^{-1} D_1^\top A \rangle_1 D_z w).$$

Здесь и далее

$$\langle \Phi \rangle_i(x) = \frac{1}{b_i} \int_0^{b_i} \Phi(x, y) dy, \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Уничтожая коэффициент при q^0 в уравнении (10), преобразованном согласно (16), получаем для матрицы-функции U систему

$$-D_y^\top A D_y U = G := D_z^\top A + D_z^\top A D_y W + D_y^\top A D_z W + D_z^\top A D_z w, \quad (23)$$

дополненную условиями периодичности вида (18). Полученная задача разрешима при выполнении условия ортогональности $\langle G \rangle_1 = 0$ (см. (22)), которое благодаря формуле (21) становится уравнением для неизвестной w :

$$-D_z^\top A^1(x, z) D_z w(x, z) = D_z^\top A^1(x, z), \quad z \in (0, b_2). \quad (24)$$

При этом $(k \times k)$ -матрица $A^1 = \mathcal{A}(A; 1)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(A; i) &= \langle A \rangle_i - \langle A D_i [D_i^\top A D_i]^{-1} D_i^\top A \rangle_i \\ &\quad + \langle A D_i [D_i^\top A D_i]^{-1} \rangle_i \langle [D_i^\top A D_i]^{-1} \rangle_i^{-1} \langle [D_i^\top A D_i]^{-1} D_i^\top A \rangle_i. \end{aligned} \quad (25)$$

ЛЕММА 3. Матрица A^1 симметрическая и положительно определенная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметричность не вызывает сомнений. В силу (21)

$$D_y W = \mathcal{W} D_z w + \mathcal{W},$$

$$\mathcal{W} = -D_1 [D_1^\top A D_1]^{-1} D_1^\top A + D_1 [D_1^\top A D_1]^{-1} \langle [D_1^\top A D_1]^{-1} \rangle_1^{-1} \langle [D_1^\top A D_1]^{-1} D_1^\top A \rangle_1. \quad (26)$$

Прямыми алгебраическими преобразованиями получаем соотношение

$$A^1 = \langle A + \mathcal{W}^\top A + A \mathcal{W} + \mathcal{W}^\top A \mathcal{W} \rangle_1 = \langle (\mathbf{I} + \mathcal{W})^\top A (\mathbf{I} + \mathcal{W}) \rangle_1,$$

где $\mathbf{I}$ — единичная $(k \times k)$ -матрица. Таким образом, равенство $\mathcal{X}^\top A^1 \mathcal{X} = 0$ возможно лишь при условии $(\mathbf{I} + \mathcal{W}(x, y, z)) \mathcal{X} = 0$. Однако в силу вытекающего из (26) соотношения $\langle \mathcal{W} \rangle_1 = 0$ оно выполнено только в случае $\mathcal{X} = 0$.

Для функции w , не зависящей от переменной y , условие периодичности с q -ветвлением в направлении ζ означает обычную периодичность

$$w(x, 0) = w(x, b_2), \quad D_2^\top A^1(x, 0) D_z w(x, 0) = D_2^\top A^1(x, b_2) D_z w(x, b_2). \quad (27)$$

Решая задачу (24), (27) по прежней схеме, находим, что

$$\begin{aligned} D_z w &= -D_2 [D_2^\top A^1 D_2]^{-1} D_2^\top A^1 + D_2 [D_2^\top A^1 D_2]^{-1} \mathbf{C}, \\ \mathbf{C} &= \langle [D_2^\top A^1 D_2]^{-1} \rangle_2^{-1} \langle [D_2^\top A^1 D_2]^{-1} D_2^\top A^1 \rangle_2. \end{aligned}$$

Таким образом, построен (формально, но здесь обоснование и не требуется) главный член $\mathbf{V} = V^\infty$, асимптотики конгломерата V^j из (16), а значит, и главный член $\mathbf{A}$ матрицы (152). Поскольку $D_\xi(w + q^{-j}W) = D_z w + D_y W + q^{-j}D_z W$, имеем

$$\mathbf{A} = \mathcal{A}(A^1; 2). \quad (28)$$

Именно эта матрица фигурирует в осредненной задаче (7) с матричным оператором

$$\mathbf{L}(x, \nabla_x) = D(-\nabla_x)^\top \mathbf{A}(x) D(\nabla_x).$$

Формулы (28) и (25) дают явное выражение для матрицы $\mathbf{A}$, содержащее лишь интегрирование и алгебраические преобразования. Подчеркнем, что вычисление $\mathbf{A}$ производится повторением одной и той же операции: сначала в соответствии с (25) производится осреднение по переменной y , а потом — по переменной z .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Матрица $\mathbf{A}$ симметрическая и положительно определенная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно лишь заметить, что формула (28) получается из (25) при замене A, D_1, b_1, y на A^1, D_2, b_2, z соответственно.

Из эллиптичности оператора $\mathbf{L}$, обеспеченной предложением 4 и алгебраической полнотой матрицы D , в согласии с [12] вытекает очередное утверждение (см. [2], [3]).

ЛЕММА 5. Если $\mathbf{f} \in H_{\text{per}}^{\varkappa}(\Omega)^n$ и $\varkappa \in (0, 1/2]$, то существует единственное решение v задачи (7) из пространства Соболева–Слободецкого $H_{\text{per}}^{2+\varkappa}(\Omega)^n$ и верна оценка

$$\|v; H^{2+\varkappa}(\Omega)\| \leq c\|\mathbf{f}; H^{\varkappa}(\Omega)\|. \quad (29)$$

Докажем, что несмотря на наличие в правой части (16) множителей q^{-j} , члены асимптотики матрицы-функции V^j не претерпевают скачков на линиях $\Gamma_j(h)$.

ЛЕММА 6. Пусть функция Y является периодической по переменной y с нулевым средним и обладает q -ветвлением с коэффициентом q^{-m} , а функция B является периодической с q -ветвлением в направлении z . Тогда решение уравнения

$$\partial_y Z(y, z) = Y(y, z), \quad y \in (0, b_1), \quad z \in (0, b_2), \quad (30)$$

подчинено условию $\int_0^{b_1} Z(y, z) dy = 0$ при $z \in (0, b_2)$ и произведения BZ, BY обладают q -ветвлением с коэффициентом q^{-m-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (30) справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} Z(y, b_2) &= \int_0^y Y(t, b_2) dt = q^{-m} \int_0^y Y(qt, 0) dt \\ &= q^{-m-1} \int_0^{qy} Y(T, 0) dT = q^{-m-1} Z(qy, 0). \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, нужное свойство функции Z установлено. Утверждение о произведениях очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 7. Матрицы-функции W и U обладают q -ветвлением с коэффициентами q^{-1} и q^{-2} соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слагаемые в правой части (19) являются произведениями периодических с q -ветвлением функций, и лемма 6 устанавливает q -ветвление с коэффициентом q^{-1} у решения W . Многократным применением леммы 6 к слагаемым в равенстве (23) проверяем q -ветвление функции U с коэффициентом q^{-2} .

Таким образом, согласно определению (16) и следствию 7 матрица-функция V^j непрерывна в $\bar{\Omega}$.

4. Обоснование асимптотики. Определим срезающую функцию X^h по формуле

$$X^h(x_2) = 1 - \chi(h^{-1}x_2) - \chi(h^{-1}(a_2 - x_2)),$$

где $\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ – эталонная “срезка”, $\chi(t) = 1$ при $|t| < 1/3$ и $\chi(t) = 0$ при $|t| > 2/3$. Вспоминая анзацы (8) и (16), в качестве приближенного решения $\mathcal{U}^h$ задачи (4), (5) берем сумму

$$\mathcal{U}^h(x) = v(x) + hX^h(x)\psi^{[0]}(h, x)D(\nabla_x)v(x),$$

где $\mathcal{V}$ – матрица-функция, определенная в полоске $\Pi_j(h)$ по формуле

$$\mathcal{V}(x, \eta^{(j)}, \zeta) = w(x, \zeta) + q^{-j}W(x, \eta^{(j)}, \zeta) + q^{-2j}U(x, \eta^{(j)}, \zeta). \quad (32)$$

Для облегчения преобразований примем обозначения из п. 2, но напомним, что они истолковываются в соответствии с п. 3. Кроме того, пользуемся обозначениями $D(\nabla_x)$ для полной производной и D_x , D_ξ для частных производных (см. (9)), а срезающую функцию условно считаем зависящей от медленной переменной x_2 .

Разность $\mathcal{R}^h = u^h - \mathcal{U}^h$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}\mathcal{R}^h = \mathcal{L}u^h - \mathcal{L}\mathcal{U}^h = f - \mathcal{L}\mathcal{U}^h, \quad (33)$$

а также условиям Дирихле и периодичности (5). В силу лемм 1, 5 и определения срезки X^h справедливо включение $\mathcal{R}^h \in \dot{H}_{\text{per}}^1(\Omega)$. Умножим уравнение (33) скалярно на $\mathcal{R}^h$ и проинтегрируем по частям при учете условий (5). Ввиду неравенства Корна (6) имеем

$$-(\mathcal{L}\mathcal{U}^h - f^h, \mathcal{R}^h)_\Omega = (A^{[0]}D(\nabla_x)\mathcal{R}^h, D(\nabla_x)\mathcal{R}^h)_\Omega \geq c\|\mathcal{R}^h, H^1(\Omega)\|^2. \quad (34)$$

Здесь и далее $(\cdot, \cdot)_\Omega$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$.

Выполнив дифференцирование в левой части (34), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathcal{U}^h - f^h = & -h^{-1}\{D_\xi^\top A^{[0]}D_x v + D_\xi^\top A^{[0]}D_\xi \mathcal{V}^{[0]}D_x v\} \\ & - \{D_x^\top A^{[0]}D_x v + D_x^\top A^{[0]}D_\xi \mathcal{V}^{[0]}D_x v + f^h\} \\ & + \{D(\nabla_x)^\top A^{[0]}(1 - X^h)D_\xi \mathcal{V}^{[0]}D_x v - hD(\nabla_x)^\top A^{[0]}D_x X^h \mathcal{V}^{[0]}D_x\}. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, представим скалярное произведение слева в (34) как сумму выражений

$$\begin{aligned} h^{-1}I^{(-1)} &= h^{-1}(D_\xi^\top A^{[0]}D_x v + D_\xi^\top A^{[0]}D_\xi \mathcal{V}^{[0]}D_x v, \mathcal{R})_\Omega, \\ I^{(0)} &= (D_x^\top A^{[0]}D_x v + D_x^\top A^{[0]}D_\xi \mathcal{V}^{[0]}D_x v + f^h, \mathcal{R})_\Omega, \\ I_X^{(0)} &= (A^{[0]}(1 - X^h)D_\xi \mathcal{V}^{[0]}D_x v, D(\nabla_x)\mathcal{R})_\Omega, \\ h^1 I_X^{(1)} &= -h(A^{[0]}D_x X^h \mathcal{V}^{[0]}D_x v, D(\nabla_x)\mathcal{R})_\Omega. \end{aligned} \quad (35)$$

Оценим эти выражения поочередно, начиная с последнего. Имеем

$$\begin{aligned} h|I_X^{(1)}| + |I_X^{(0)}| &\leq c \sup_{x \in \Omega} \{|\mathcal{V}^{[0]}| + |D_x \mathcal{V}^{[0]}| + |D_\xi \mathcal{V}^{[0]}|\} (\|\nabla_x v; L_2(\omega^h)\| \\ &\quad + h\|\nabla_x^2 v; L_2(\Omega)\|) \|D(\nabla_x)\mathcal{R}; L_2(\Omega)\|, \end{aligned}$$

где $\omega^h = \Omega \cap \text{supp}(1 - X^h)$ – объединение двух полосок, имеющих ширину $2h/3$ и примыкающих к основаниям $(0, a_1) \times \{0\}$ и $(0, a_1) \times \{a_2\}$ прямоугольника Ω . Предположим, что выполнены условия леммы 5. В силу неравенства

$$\|\mathcal{Z}; L_2(\omega^h)\| \leq ch^{1/2}\|\mathcal{Z}; H^1(\Omega)\| \quad \forall \mathcal{Z} \in H^1(\Omega),$$

(см. [10, лемма 1.2.4]) и неравенства (29) справедлива оценка

$$\|\nabla_x v; L_2(\omega^h)\| + h\|\nabla_x^2 v; L_2(\Omega)\| \leq ch^{1/2}\|\mathbf{f}; H^\varkappa(\Omega)\|. \quad (36)$$

По определению (32) матрицы-функции $\mathcal{V}$ выполняется соотношение $\mathcal{V}^{[0]} = w^{[0]} + W^{[1]} + U^{[2]}$. Таким образом, благодаря следствию 7 матрица-функция $\mathcal{V}^{[0]}$, а значит, и $D_x \mathcal{V}^{[0]}$ непрерывны в $\overline{\Omega}$. Для проверки непрерывности производной $D_\xi \mathcal{V}^{[0]}$ в $\overline{\Omega}$ докажем, что скачок $D_\xi \mathcal{V}^{[0]}$ этой производной на линии Γ_j равен нулю. Для скачка $D_\xi W^{[1]}$ согласно (17) получаем

$$\begin{aligned} & D_\xi(q^{-j-1}W(x, \eta^{(j+1)}, (j+1)b_2 + 0) - q^{-j}W(x, \eta^{(j)}, jb_2 + b_2 - 0)) \\ &= D_1(\partial_\eta W(x, q\eta^{(j)}, +0) - \partial_\eta W(x, \eta^{(j)}, b_2 - 0)) \\ &+ D_2(q^{-j-1}\partial_\zeta W(x, q\eta^{(j)}, +0) - q^{-j}\partial_\zeta W(x, \eta^{(j)}, b_2 - 0)) = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется потому, что у W имеется q -ветвление с коэффициентом q^{-1} , а производная $\partial_\eta W$ является периодической с q -ветвлением матрицей-функцией. Аналогично проверяется, что матрицы-функции $D_\xi w^{[0]}$ и $D_\xi U^{[2]}$ непрерывны на Γ_j . Таким образом,

$$\sup_{x \in \Omega} \{|\mathcal{V}^{[0]}| + |D_x \mathcal{V}^{[0]}| + |D_\xi \mathcal{V}^{[0]}|\} \leq ch^0, \quad (37)$$

и, следовательно, при учете (36) и (37) окончательно устанавливаем, что

$$h|I_X^{(1)}| + |I_X^{(0)}| \leq ch^{1/2}\|\mathbf{f}; H^\varkappa(\Omega)\| \|D(\nabla_x)\mathcal{R}; L_2(\Omega)\|.$$

Подчеркнем, что поскольку при оценке величины $h|I_X^{(1)}| + |I_X^{(0)}|$ (а также далее при рассмотрении слагаемых $h|I^{(1)}|$ и $|I^{(0)}|$) используются интегральные нормы величин $\mathcal{R}^h$ и $D_x v$, для сомножителя $\mathcal{V}^{[0]}$ приходится применять поточечную оценку (37), обеспеченную указанным в следствии 7 свойством членов суммы (16).

Для обработки $I^{(0)}$ необходимо уточнить информацию о правой части $f^h = F^{[0]}$ системы (4): будем считать, что при некотором $\varkappa \in (0, 1/2]$ справедливо включение

$$F \in H^\varkappa(\Omega \rightarrow L_\infty(S))^n, \quad (38)$$

где $H^\varkappa(\Omega \rightarrow L_\infty(S))$ – пространство, полученное пополнением линейала $C_{\text{per}}^\infty(\Omega \times S)$ функций, периодических относительно переменной $x_1 \in (0, a_1]$, по норме

$$\begin{aligned} \|F; H^\varkappa(\Omega \rightarrow L_\infty(S))\| &= \left(\int_\Omega \sup_{y \in S} |F(x, y)|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \int_\Omega \int_\Omega \sup_{y \in S} |F(x, y) - F(\mathbf{x}, y)|^2 \frac{dx d\mathbf{x}}{|x - \mathbf{x}|^{2(1+\varkappa)}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Если вектор-функция F не зависит от y , то норма (39) совпадает с обычной нормой в пространстве Соболева–Слободенского $H^\varkappa(\Omega)$ и не превосходит нормы в пространстве $H^1(\Omega)$. Подчеркнем, что при $\varkappa < 1/2$ функция F не сохраняет периодичность по x_1 .

Понадобится также следующее утверждение, которое проверяется по схеме, аналогичной доказательству леммы 6.4.6 [10].

ЛЕММА 8. Пусть $R \in \dot{H}_{\text{per}}^1(\Omega)$, $\mathcal{T} \in H^\varkappa(\Omega \rightarrow L_\infty(S))$ и

$$\overline{\mathcal{T}}(x) = (\text{mes}_2 S)^{-1} \int_S \mathcal{T}(x, \eta, \zeta) d\eta d\zeta.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\left| \int_\Omega (\mathcal{T}^{[0]}(x, \eta^{(j)}, \zeta) - \overline{\mathcal{T}}(x)) R(x) dx \right| \leq ch^\varkappa \|\mathcal{T}; H^\varkappa(\Omega \rightarrow L_\infty(S))\| \|R; H^1(\Omega)\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой ячейки $S_j^p(h)$ положим

$$R_j^p = (\text{mes}_2 S_j^p(h))^{-1} \int_{S_j^p(h)} R(x) dx.$$

По неравенствам Пуанкаре и Коши–Буняковского имеем

$$\|R - R_j^p; L_2(S_j^p(h))\|^2 \leq ch^2 \|\nabla R; L_2(S_j^p(h))\|^2, \quad |R_j^p|^2 \leq ch^{-2} q^{-j} \|R; L_2(S_j^p(h))\|^2. \quad (40)$$

Разбивая область на ячейки, получаем

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (\mathcal{T}^{[0]}(x, \eta^{(j)}, \zeta) - \overline{\mathcal{T}}(x)) R(x) dx \\ & \leq \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{p=1}^{N_1} q^j \left\{ \int_{S_j^p(h)} |\mathcal{T}(x, h^{-1} q^j x_1, h^{-1} x_2) - \overline{\mathcal{T}}(x)| |R(x) - R_j^p| dx \right. \\ & \quad \left. + |R_j^p| \left| \int_{S_j^p(h)} (\mathcal{T}(x, h^{-1} q^j x_1, h^{-1} x_2) - \overline{\mathcal{T}}(x)) dx \right| \right\} =: \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{p=1}^{N_1} q^j (I_j^p + J_j^p). \end{aligned}$$

Согласно (40) при любом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} I_j^p & \leq ch(\|\mathcal{T}; L_2(S_j^p(h))\| + \|\overline{\mathcal{T}}; L_2(S_j^p(h))\|) \|\nabla R; L_2(S_j^p(h))\| \\ & \leq ch(\varepsilon \|\mathcal{T}; L_2(S_j^p(h) \rightarrow L_\infty(S))\|^2 + \varepsilon^{-1} \|\nabla R; L_2(S_j^p(h))\|). \end{aligned} \quad (41)$$

Наконец, в силу (40) имеем

$$\begin{aligned} J_j^p & \leq ch^{-1} q^{-j/2} \|R; L_2(S_j^p(h))\| \int_{S_j^p(h)} |\mathcal{T}(x, h^{-1} q^j x_1, h^{-1} x_2) - \overline{\mathcal{T}}(x)| dx \\ & = ch^{-1} q^{-j/2} \|R; L_2(S_j^p(h))\| (\text{mes}_2 S_j^p(h))^{-1} \int_{S_j^p(h)} \int_{S_j^p(h)} |\mathcal{T}(x, h^{-1} q^j x_1, h^{-1} x_2) \\ & \quad - \overline{\mathcal{T}}(x) - \mathcal{T}(y, h^{-1} q^j x_1, h^{-1} x_2) + \overline{\mathcal{T}}(y)| dx dy \\ & \leq ch^{-1} q^{-j/2} \|R; L_2(S_j^p(h))\| h^{1+\varkappa} \left(\int_{S_j^p(h)} \int_{S_j^p(h)} |\sup\{\mathcal{T}^{[0]}(x, \eta) - \overline{\mathcal{T}}(x) \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{T}^{[0]}(y, \eta) + \overline{\mathcal{T}}(y); \eta \in S\}|^2 |x - y|^{-2-2\varkappa} dx dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Пояснение: в подынтегральное выражение добавили слагаемое с нулевым средним, а затем оценили по максимуму модуля. Подчеркнем, что $|x - y| \leq (h^2 a_2^2 + h^2 q^{-2j} a_1^2)^{1/2} \leq ch$ при $x, y \in S_j^p(h)$, и поэтому введение множителя $|x - y|^{-2-2\kappa}$ позволило написать $h^{1+\kappa}$ перед скобкой. И так,

$$J_j^p \leq ch^\kappa q^{-j/2} (\varepsilon \| \mathcal{T} : H^\kappa(\Omega \rightarrow L_\infty(S)) \| + \varepsilon^{-1} \| R; L_2(S_j^p(h)) \|^2). \quad (42)$$

Осталось просуммировать неравенства (41) и (42) по всем ячейкам и воспользоваться простым алгебраическим фактом: если $c_k^2 \leq \varepsilon a_k^2 + \varepsilon^{-1} b_k^2$ при любом $\varepsilon > 0$, то

$$\sum_{k=1}^K c_k^2 \leq 2 \left(\sum_{k=1}^K a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^K b_k^2 \right)^{1/2}.$$

При $a_1 = \dots = a_K = 0$ неравенство очевидно, поскольку $c_1 = \dots = c_K = 0$ ввиду произвольности ε ; в противном случае выберем $\varepsilon = \left(\sum a_k^2 \right)^{-1/2} \left(\sum b_k^2 \right)^{1/2}$.

Учитывая уравнение (7₁), представим слагаемое $I^{(0)}$ из (35) как сумму двух интегралов

$$\begin{aligned} I^{(0)} &= \int_{\Omega} \{ F^{[0]} - \overline{F} + D_x(\mathfrak{A}^{[0]} - \overline{\mathfrak{A}}) D_x v \} \mathcal{R}^h dx \\ &+ \int_{\Omega} (D_x(\mathfrak{W}^{[1]} + \mathfrak{U}^{[2]}) D_x v) \mathcal{R}^h dx =: I_1^{(0)} + I_2^{(0)}, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\mathfrak{A} = A + A(D_\zeta w + D_\eta W), \quad \mathfrak{W} = A(D_\zeta W + D_\eta U), \quad \mathfrak{U} = AD_\zeta U. \quad (44)$$

Поскольку средние по ячейке от разностей, помещенных в фигурные скобки в (43), равны нулю, для оценки интеграла $I_1^{(0)}$ применяем лемму 8. В результате при учете неравенства (29) для v обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} |I_1^{(0)}| &\leq ch^\kappa \| F; H^\kappa(\Omega \rightarrow L_\infty(S)) \| \| \mathcal{R}^h; H^1(\Omega) \| \| v; H^{\kappa+2}(\Omega) \| \\ &\leq ch^\kappa \| F; H^\kappa(\Omega \rightarrow L_\infty(S)) \| \| \mathcal{R}^h; H^1(\Omega) \|. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл $I_2^{(0)}$. Поскольку

$$(j-1)hb_2 < x_2 \leq jhb_2 \quad \text{при } x \in \Pi_j(h), \quad (45)$$

и, следовательно, $q^{-j}x_2 \leq ch$, находим, что в силу формул (3) и (44) для выражений $\mathfrak{W}^{[1]}$ и $\mathfrak{U}^{[2]}$ справедливы неравенства

$$s_p := \sup_{x \in \Omega} |x_2 D_x(\mathfrak{W}^{[1]} + \mathfrak{U}^{[2]})| \leq c_p h, \quad p = 0, 1.$$

Теперь при помощи неравенства Харди

$$\| x_2^{-1} \mathcal{Z}; L_2(\Omega) \| \leq c \| \nabla_x \mathcal{Z}; L_2(\Omega) \| \quad \forall \mathcal{Z} \in \mathring{H}_{\text{per}}^1(\Omega) \quad (46)$$

выводим такую оценку для $I_2^{(0)}$:

$$\begin{aligned} |I_2^{(0)}| &\leq c \sum_{p=0}^1 s_p \|v; H^{2-p}(\Omega)\| \cdot \|x_2^{-1} \mathcal{R}^h; L_2(\Omega)\| \\ &\leq ch^1 \|F; H^\kappa(\Omega \rightarrow L_\infty(S))\| \cdot \|\mathcal{R}^h; H^1(\Omega)\|. \end{aligned}$$

Осталось обработать выражение $h^{-1}I^{(-1)}$. Для этого наряду с (46) понадобится еще одно неравенство

$$\|D(\partial_x)v; C(\overline{\Omega})\| \leq c \|v; H^{\kappa+2}(\Omega)\|, \quad (47)$$

вытекающее из теоремы вложения $H^{\kappa+2} \subset C^1$.

По построению сумма $\mathcal{V}$ удовлетворяет уравнению (10) в полосе $\Pi_j(h)$ с точностью $O(q^{-j})$, т.е. выполняется неравенство

$$\sup_{x \in \Pi_j(h)} |D_\xi^\top A D_\xi \mathcal{V}^j + D_\xi^\top A| \leq cq^{-j}. \quad (48)$$

Малость левой части (48) обеспечена лишь при больших j ; однако для оценки величины $h^{-1}|I^{(-1)}|$ достаточно применить соотношение (48). Учитывая (46) и (47), при любом $\varepsilon > 0$ выводим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} h^{-2}|I^{(-1)}| &\leq c \left(\varepsilon^{-1} \|x_2^{-1} \mathcal{R}^h; L_2(\Omega)\|^2 + c\varepsilon h^{-2} \sum_{j=1}^{N_2-1} \int_{jh}^{(j+1)h} x_2^2 dx \right)^{1/2} \|D(\partial_x)v; C(\overline{\Omega})\| \\ &\leq ch^{1/2} \|F; H^\kappa(\Omega \rightarrow L_\infty(S))\| \cdot \|\mathcal{R}^h; H^1(\Omega)\|. \end{aligned}$$

В последнем преобразовании были использованы оценки (29) и (43). Собирая полученные оценки величин (35) в левой части (34), приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 9. Если матрица D , матрица-функция A и вектор-функция f^h удовлетворяют указанным выше предположениям, то выполняется оценка

$$\|u^h - \mathcal{U}^h; L_2(\Omega)\| + \|\nabla_x \{u^h - \mathcal{U}^h\}; L_2(\Omega)\| \leq ch^\kappa \|F; H^\kappa(\Omega \rightarrow L_\infty(S))\|,$$

с постоянной c , не зависящей от функции F и параметра $h \in (0, h_0]$.

Удалим из глобального приближения “лишние” слагаемые, введенные для технических целей, и получим окончательные асимптотические формулы для решения $u^h \in \dot{H}_{\text{рег}}^1(\Omega)^n$ задачи (4) и его градиента.

ТЕОРЕМА 10. При прежних условиях справедливо неравенство

$$\|u^h - v; L_2(\Omega)\| + \|\nabla_x u^h - \nabla_x v - \mathbf{w}^{[0]} D(\nabla_x)v; L_2(\Omega)\| \leq ch^\kappa \|F; H^\kappa(\Omega \rightarrow L_\infty(S))\|,$$

в котором $\mathbf{w} = \{(\partial_\eta, 0)W + (0, \partial_\zeta)w\}$, а постоянная c не зависит от функции F и параметра $h \in (0, h_0]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nečas J. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Paris: Masson, 1967.
- [2] Назаров С. А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // УМН. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
- [3] Назаров С. А. Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы // Проблемы матем. анализа. Вып. 16. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. С. 167–192.
- [4] Kozlov S. M. Harmonization and homogenization on fractals // Comm. Math. Phys. 1993. V. 153. P. 339–357.
- [5] Жиков В. В. Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Матем. сб. 1996. Т. 186. № 8. С. 3–40.
- [6] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. А. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
- [7] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
- [8] Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
- [9] Mazja W. G., Nazarov S. A., Plamenewski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. V. 2. Berlin: Akademie-Verlag, 1991.
- [10] Назаров С. А. Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Т. 1. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.
- [11] Назаров С. А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 5. С. 1–92.
- [12] Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions. 2 // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. № 1. P. 35–92.

Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург
 E-mail: serna@snark.ipme.ru, andr@AS2607.spb.edu

Поступило
 09.02.2004