Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Парусников, Обобщение теоремы Пинкерле для k -членных рекуррентных соотношений, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 6, 892–906

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2661>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:50:34

УДК 511.36+514.172.45

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПИНКЕРЛЕ ДЛЯ k -ЧЛЕННЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

В. И. Парусников

В 1894 г. Пинкерле доказал теорему, связывающую существование минимального решения трехчленных рекуррентных соотношений со сходимостью определенной цепной дроби. В настоящей работе рассматриваются решения бесконечной системы k -членных рекуррентных соотношений

$$q_n = \sum_{j=1}^{k-1} p_{k-j,n} q_{n-j}, \quad p_{1,n} \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

с коэффициентами из некоторого поля F . Изучается связь таких соотношений и многомерных $((k-2)$ -мерных) цепных дробей. Устанавливается многомерный аналог теоремы Пинкерле.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. При вычислении таких решений бесконечной системы $(m+2)$ -членных $(m \in \mathbb{N})$ рекуррентных соотношений

$$q_n = \sum_{j=1}^{m+1} p_{m+2-j,n} q_{n-j}, \quad p_{1,n} \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

которые малы относительно других решений, исследователи сталкиваются с тем обстоятельством, что малая абсолютная погрешность в начальных условиях (т.е. добавка другого решения) при вычислениях по рекуррентной формуле сохраняется, но приводит к росту относительной ошибки. Для $m = 1$ это имеет место, например, для функций Бесселя первого рода [1]. В 1894 г. Пинкерле доказал (см. [2], а также [3]) следующее утверждение.

ТЕОРЕМА (Пинкерле). А) *Цепная дробь*

$$c_0 + \frac{d_1}{c_1 + \frac{d_2}{\ddots}} \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 03-01-00027, № 02-01-01067 и № 05-01-00050, программы "Современные проблемы теоретической математики" ОМНРАН.

сходится в $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ тогда и только тогда, когда у системы трехчленных рекуррентных соотношений

$$y_{n+1} = c_n y_n + d_n y_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

есть минимальное решение $\{h_n\}$, $h_n \in \mathbb{R}$.

Б) В случае сходимости цепной дроби минимальное решение может быть представлено как

$$-\frac{h_n}{h_{n-1}} = \frac{d_n}{c_n + \frac{d_{n+1}}{c_{n+1} + \frac{d_{n+2}}{\ddots}}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

(Решение $\{h_n\}$ системы (3) минимальное, если для непропорциональных ему решений $\{g_n\}$ имеет место $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n/g_n = 0$.)

В настоящей работе для некоторого класса полей F изложена теория многомерных цепных дробей. Изучаются $(m+2)$ -членные рекуррентные соотношения с коэффициентами из F и их связь с m -мерными цепными дробями. Для многомерных цепных дробей доказывается теорема, обобщающая на многомерный случай теорему Пинкерле. Представленные здесь материалы частично приведены в препринте [4].

2. Основные определения. Пусть имеется некоторое поле K , снабженное топологией, относительно которой непрерывны операции сложения и умножения. Далее, пусть K непрерывно вложено в полное топологическое пространство F , в котором оно плотно. При этом F – также поле. Примерами таких полей K будут поля алгебраических чисел (поле $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$), поле R_p p -адических чисел, поле рациональных функций $\tilde{F}(X)$ над другим полем $\tilde{F}$, поле $\tilde{F}((X))$ формальных степенных рядов

$$f = \sum_{r=n}^{\infty} c_r X^r, \quad c_r \in \tilde{F}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

над $\tilde{F}$.

Через F^m , $m \in \mathbb{N}$, обозначим m -мерное векторное пространство над полем F , $F^{m'} \stackrel{\text{def}}{=} F^m \setminus (0, \dots, 0)$, а через $F\mathbb{P}^m$, $m \in \mathbb{Z}^+$, обозначим m -мерное проективное пространство, т.е. множество классов эквивалентности $F^{m+1'}$ по отношению пропорциональности ' $\sim$ ':

$$(\mathbf{f}_1 \sim \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in F^{m+1'}) \iff (\exists f_{12}, f_{21} \in F', f_{12}\mathbf{f}_1 = f_{21}\mathbf{f}_2).$$

Однородные координаты проективных векторов будем нумеровать от 1 до $m+1$, между ними будем ставить двоеточие: $(f_1 : \dots : f_{m+1})$. Векторы и проективные векторы (элементы F^m и $F\mathbb{P}^m$) будем писать жирным шрифтом, их компоненты располагать в виде вектор-строк, но в матричных операциях считать вектор-столбцами. Проективный вектор с единственной ненулевой k -й компонентой обозначим через $\mathbf{e}_k$, а вектор $(0, \dots, 0) \in F^m$ – через $\mathbf{0}$. Элемент i -й строки и j -го столбца $(k \times k)$ -матрицы M обозначим $(M)_{i,j}$, а i -ю компоненту вектора $\mathbf{f}$ – через $(\mathbf{f})_i$. Подобное обозначение для однородных координат проективных векторов $\mathbf{f} \in F\mathbb{P}^m$ будет использоваться в условиях

типа $(\mathbf{f})_j = 0$ или $(\mathbf{f})_j \neq 0$. Единичную матрицу обозначим через E , символ Кронеккера – через $\delta_{i,j}$, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Отождествим множество

$$F\mathbb{P}_{m+1}^m \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{f} \in F\mathbb{P}^m \mid (\mathbf{f})_{m+1} \neq 0\} \subset F\mathbb{P}^m$$

с пространством F^m при помощи вложения $\sigma: F^m \rightarrow F\mathbb{P}_{m+1}^m$:

$$\begin{aligned} \sigma(f_1, \dots, f_m) &\stackrel{\text{def}}{=} (f_1 : \dots : f_m : 1), \\ \sigma^{-1}(f_1 : \dots : f_{m+1}) &= \left(\frac{f_1}{f_{m+1}}, \dots, \frac{f_m}{f_{m+1}} \right); \quad \sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{e}_{m+1}. \end{aligned}$$

В $F\mathbb{P}^m$ действует группа дробнолинейных преобразований $\text{Aut } F\mathbb{P}^m$. Ее элементами служат классы эквивалентности (с точностью до умножения на скаляры из F'), представители которых суть невырожденные матрицы D размера $m+1$ с элементами $d_{i,j}$:

$$D(f_1 : \dots : f_{m+1}) = \left(\sum_{j=0}^m d_{0,j} f_j : \dots : \sum_{j=0}^m d_{m,j} f_j \right).$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{1,m} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m,1} & \dots & d_{m,m} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & d_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & d_m \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

отвечают следующим преобразованиям пространства F^m : линейному преобразованию с матрицей $d_{i,j}$, умножению на скаляр $d \neq 0$ и параллельному переносу на вектор $(d_1, \dots, d_m) \in F^m$. Матрицу – представитель класса $\{cD \mid c \in F'\}$ – будем выбирать наиболее простой по виду.

3. Операция обращения вектора и цепные дроби. Определим поворот $\mathcal{J}$ пространства $F\mathbb{P}^m$ формулой

$$\mathcal{J}(f_1 : \dots : f_{m+1}) = (f_{m+1} : f_1 : \dots : f_m); \quad (6)$$

$(m+1)$ -я степень преобразования $\mathcal{J}$ – это тождественное преобразование, поэтому $\mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J}^m$ и $\mathcal{J}^{-1}(f_1 : \dots : f_{m+1}) = (f_2 : \dots : f_{m+1} : f_1)$. Преобразования $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^{-1}$ имеют соответственно матрицы

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

С помощью этих преобразований на “почти всем” пространстве F^m можно ввести две взаимно обратные операции *обращения векторов* из F^m . Для прослеживания параллели с теорией одномерных цепных дробей одну операцию будем записывать с помощью одной горизонтальной черты, а другую – с помощью двух черточек. Итак,

$$\frac{1}{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^{-1} \mathcal{J} \sigma \mathbf{f}, \quad \frac{1}{\bar{\mathbf{g}}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^{-1} \mathcal{J}^{-1} \sigma \mathbf{g}, \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in F^m, \quad (\mathbf{f})_m \neq 0, \quad (\mathbf{g})_1 \neq 0. \quad (8)$$

В координатах эти формулы выглядят так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(f_1, \dots, f_m)} &= \left(\frac{1}{f_m}, \frac{f_1}{f_m}, \dots, \frac{f_{m-1}}{f_m} \right), \quad \mathbf{f} \in F^m, \quad (\mathbf{f})_m \neq 0, \\ \frac{1}{(g_1, \dots, g_m)} &= \left(\frac{g_2}{g_1}, \dots, \frac{g_m}{g_1}, \frac{1}{g_1} \right), \quad \mathbf{g} \in F^m, \quad (\mathbf{g})_1 \neq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\mathbf{f}}\right)} = \mathbf{f}, \quad \frac{1}{\left(\frac{1}{\mathbf{g}}\right)} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in F^m, \quad (\mathbf{f})_m \neq 0, \quad (\mathbf{g})_1 \neq 0.$$

Разложение в цепную дробь состоит из ряда однотипных шагов, в свою очередь, состоящих из трех этапов: выделения “целой части”, выделения из остатка множителя (“числителя”) и обращения остатка. Простейший вариант приведенного ниже алгоритма впервые к числовым векторам применил Якоби [5], а в частных случаях этот алгоритм рассматривал Эйлер [6]: все числители равнялись 1 и целая часть вектора бралась покомпонентно. Шаг с номером $n \in \mathbb{Z}^+$ – это получение из вектора $\mathbf{f}_n$ ($\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}$) вектора $\mathbf{f}_{n+1}$ такого, что

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{b}_n + \frac{a_n}{\mathbf{f}_{n+1}} \quad \text{или} \quad \mathbf{f}_{n+1} = \frac{1}{(\mathbf{f}_n - \mathbf{b}_n)a_n^{-1}}. \quad (10)$$

(Как обычно, здесь сначала выполняется обращение вектора, затем умножение на скаляр, и в последнюю очередь сложение.) Отметим, что

$$\frac{1}{(\mathbf{f}_n - \mathbf{b}_n)a_n^{-1}} \neq \frac{a_n}{\mathbf{f}_n - \mathbf{b}_n}$$

при $m > 1, a \neq 1$.

На первом этапе алгоритма отыскивается n -й знаменатель $\mathbf{b}_n$ цепной дроби – выделяется “целая часть” $[\mathbf{f}_n]$ вектора. При этом уже для $m = 1$ и $F = \mathbb{R}$ “целой частью” может быть и взятие ближайшего целого, и ближайшего четного, и другие более сложные операции. Напрашивающееся в многомерном случае покомпонентное взятие “целой части” ($\mathbf{b}_n = ([(\mathbf{f})_1], \dots, [(\mathbf{f})_m])$) тоже не единственный способ определения этой операции. “Целой частью” $[\cdot]$ там может служить любое относительно “хорошее” в топологическом смысле отображение пространства F^m в некоторый модуль M над некоторым содержащимся в K кольцом R . Требуется, чтобы это отображение было неподвижно в точках модуля M , т.е. было проектором. Удобно также требовать инвариантность этого отображения относительно сдвигов на элементы модуля M : $[\mathbf{x} + \mathbf{y}] = [\mathbf{x}]$ для $\mathbf{x} \in F^m, \mathbf{y} \in M$.

Разность $\mathbf{g}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_n - \mathbf{b}_n$ называется n -ым остатком цепной дроби. На втором этапе из остатка выделяют ненулевой множитель $a_n \in K'$ – числитель цепной дроби. Вместе числители a_n и знаменатели $\mathbf{b}_n$ суть элементы цепной дроби.

Третий этап – обращение полученного на предшествующем этапе вектора

$$\mathbf{h}_n = (h_{1,n}, \dots, h_{m,n}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{f}_n - \mathbf{b}_n}{a_n}.$$

Если $g_{1,n} = a_n h_{1,n} \neq 0$, то вектор $\mathbf{f}_{n+1}$ находится по формуле (9):

$$\mathbf{h}_n = \frac{1}{\mathbf{f}_{n+1}}, \quad \text{или} \quad \mathbf{f}_{n+1} = \frac{1}{\mathbf{h}_n} = \left(\frac{h_{2,n}}{h_{1,n}}, \dots, \frac{h_{m,n}}{h_{1,n}}, \frac{1}{h_{1,n}} \right).$$

Если же $g_{1,n} = 0$, то обычно говорят об обрыве алгоритма, однако мы назовем *обрывом алгоритма (цепной дроби)* только случай $\mathbf{g}_n = \mathbf{e}_{m+1}$, отличая его от случая $\mathbf{g}_n \neq 0$, $g_{1,n} = 0$, т.е. *надрыва цепной дроби*. Ниже мы покажем, как здесь можно продолжить разложение в цепную дробь меньшей размерности. Для $d \in \{0, 1, \dots, m\}$ определим пространство

$$F^{m,d} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in F^m : x_1 = \dots = x_d = 0\}.$$

Число d такое, что $\mathbf{g}_n \in F^{m,d} \setminus F^{m,d+1}$, т.е. $\mathbf{g}_{1,n} = \dots = \mathbf{g}_{d,n} = 0$, $\mathbf{g}_{d+1,n} \neq 0$, назовем *дефектом цепной дроби*. Когда дефект цепной дроби стал равным $d > 0$, легко предъявить d линейно независимых соотношений

$$\sum_{j=1}^{m+1} c_{i,j}(\mathbf{f}_0)_j, \quad i = 1, \dots, d,$$

связывающих компоненты исходного вектора $\sigma \mathbf{f}_0$ и 1. Линейная зависимость компонент обнаруживается и в случае, когда обращается в нуль не первая, а другая (k -я) компонента остатка. Но этот случай выделять не надо: не позже, чем через $k-1$ шаг разложения, первая компонента остатка все же обратится в нуль. Для величин d удобно использовать сдвинутую нумерацию: образовавшийся на n -ом шаге дефект будет $d = d(n+1)$.

Некоторые алгоритмы могут выявлять линейную зависимость компонент разлагаемых по ним векторов, т.е. при разложении в цепную дробь таких векторов неизбежно происходит надрыв цепной дроби. Алгоритм в одних полях F может обладать этим свойством, а в других нет. Например, алгоритм Якоби для $F = \mathbb{R}$ не обладает таким свойством при $m \geq 3$ [7] и обладает при $m = 2$ [8]. Еще пример: в поле $\mathbb{C}((z))$ формальных степенных рядов с полюсом в бесконечности

$$\mathbb{C}(z) = \left\{ f : f = \sum_{k=n}^{\infty} f_k z^{-k}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad f_k \in \mathbb{C} \right\},$$

правильные цепные дроби (с числителями 1) алгоритма Якоби при всех m обладают этим свойством [9], а C -дроби алгоритма Якоби – нет [10].

Если на шаге n произошел надрыв (но не обрыв) цепной дроби, дальше можно продолжить разложение в цепную дробь меньшей размерности. Изоморфное пространству F^{m-d} подпространство $F^{m,d}$ отождествим с частью проективного пространства

$$F\mathbb{P}^{m,d} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{f} \in F\mathbb{P}^m \mid (\mathbf{f})_1 = \dots = (\mathbf{f})_d = 0\},$$

в котором сохраним индуцированную нумерацию координат: $F^{m,d} = \{(f_{d+1}, \dots, f_m) \mid f_j \in F\}$. Определенный формулой

$$\mathcal{J}_d(f_1 : \dots : f_{m+1}) = (f_1 : \dots : f_d : f_{m+1} : f_{d+1} : \dots : f_{m-1} : f_m)$$

поворот $\mathcal{J}_d$ этой части проективного пространства имеет блочную матрицу $\mathcal{J}_d$, в левом верхнем углу которой стоит d -мерная единичная матрица, а в правом нижнем – по виду такая же, как $\mathcal{J}$, матрица, только размера не $m+1$, а $m+1-d$. Видно, что $\mathcal{J}_d^{-1} = \mathcal{J}_d^{m-d}$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0$ и $\det \mathcal{J}_d = (-1)^{m-d} \neq 0$.

Описанный процесс (алгоритм) изображают в виде *бесконечной m -мерной цепной дроби*

$$\mathbf{b}_0 + \frac{a_0}{\ddots + \frac{a_{n-1}}{\mathbf{b}_n + \frac{a_n}{\ddots}}}, \quad a_n \in F', \quad \mathbf{b}_n \in F^m. \quad (11)$$

Назовем n -й *подходящей дробью* $\mathbf{u}_n$ цепной дроби (11)

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{b}_0 + \frac{a_0}{\ddots \cdot \mathbf{b}_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{\mathbf{b}_n}}, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (12)$$

Чтобы найти $\mathbf{u}_n$, надо “свернуть” агрегат (12) снизу вверх. (Отметим, что при сворачивании мы можем встретиться с ситуацией, когда вектор, полученный на промежуточном этапе обратить нельзя, так как его последняя компонента обратилась в нуль. Как преодолеть это, мы покажем ниже.) После того, как дано это определение, мы видим, что можно отвлечься от алгоритма разложения, специфики числителей a_k и знаменателей $\mathbf{b}_k$ цепной дроби и изучать подходящие дроби как самостоятельные объекты с точки зрения их сходимости в том или ином смысле.

Согласно (5) матрицы дробно-линейных преобразований $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n$, отвечающих умножению вектора на скаляр $a_n \in F'$ и сложению с вектором $\mathbf{b}_n$, равны

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & b_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & b_{m,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем $(m+1)$ -мерные векторы $\mathbf{p}_n = (p_{1,n}, \dots, p_{m+1,n})$ следующим образом:

$$\mathbf{p}_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (a_n^{-1}, b_{1,n}a_n^{-1}, \dots, b_{m,n}a_n^{-1}), & d(n) = 0, \\ (0, \dots, 0, a_n^{-1}, b_{d(n)+1,n}a_n^{-1}, \dots, b_{m,n}a_n^{-1}), & d(n) > 0, \end{cases}$$

и матрицы

$$P_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J}_{d(n)} \mathcal{B}_n \mathcal{A}_n, \quad Q_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} E, \quad Q_n \stackrel{\text{def}}{=} P_0 \cdots P_n = Q_{n-1} P_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (13)$$

Матрица P_n для случаев, когда до n -го шага надрыва цепной дроби не произошло ($d = 0$) и когда цепная дробь имеет дефект $d = d(n) > 0$, соответственно равна

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & p_{1,n} \\ 1 & \dots & 0 & p_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & p_{m+1,n} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} E_d & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & p_{d+1,n} \\ \dots & 1 & \dots & 0 & p_{d+2,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 1 & p_{m+1,n} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

(Здесь E_d – единичная матрица размера d , справа и снизу от нее стоят нули.)

Формулы для разлагаемого вектора и подходящих дробей (см. (10), (12)) переписываются как

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0 &= \sigma^{-1} \mathcal{B}_0 \mathcal{A}_0 \mathcal{J}_{d(1)} \cdots \mathcal{B}_n \mathcal{A}_n \mathcal{J}_{d(n+1)} \sigma \mathbf{f}_{n+1} = \sigma^{-1} \mathcal{J}^{-1} Q_n \mathcal{J}_{d(n+1)} \sigma \mathbf{f}_{n+1}, \\ \mathbf{u}_n &= \sigma^{-1} \mathcal{B}_0 \mathcal{A}_0 \mathcal{J}_{d(1)} \cdots \mathcal{B}_{n-1} \mathcal{A}_{n-1} \mathcal{J}_{d(n)} \mathcal{B}_n \sigma \mathbf{0} = \sigma^{-1} \mathcal{J}^{-1} Q_n \mathbf{e}_{m+1}. \end{aligned} \quad (15)$$

(Мы учли, что $\sigma \mathbf{0} = \mathbf{e}_{m+1}$ и что $\mathcal{A}_n \mathbf{e}_{m+1} = \mathbf{e}_{m+1}$ для любой $\mathcal{A}_n$.)

Рекуррентная формула (13) указывает способ вычисления матриц Q_n . Из вида (14) матриц P_n получаем, что m из $m+1$ столбцов матрицы Q_{n-1} есть в матрице Q_n : левые $d(n)$ столбцов матриц Q_n и Q_{n-1} совпадают, а столбцы Q_n с индексами с $(d+1)$ -го по m -й суть столбцы матрицы Q_{n-1} , с индексами на единицу большими. Правый столбец Q_n – с индексом $m+1$ – есть линейная комбинация всех, кроме d левых, столбцов матрицы Q_{n-1} :

$$(Q_n)_{i,m+1} = \sum_{j=d(n)+1}^{m+1} p_{j,n} (Q_{n-1})_{i,j}.$$

Введем для “новых” элементов матриц Q_n обозначение $q_{i,n}$. Тогда

$$\begin{aligned} q_{i,n} &= \delta_{i,n+m+2}, \quad n = -m-1, \dots, -2, -1, \quad i = 1, \dots, m+1, \\ q_{i,n} &= (Q_n)_{i,m+1}, \quad q_{i,n} = \sum_{j=d(n)+1}^{m+1} p_{j,n} q_{i,n-m-2+j}, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad i = 1, \dots, m+1. \end{aligned} \quad (16)$$

Элементы $q_{i,n}$ объединим в одну бесконечную $(m+1)$ -строчную матрицу Q , столбцы которой будем нумеровать от $-m-1$ до $+\infty$:

$$(Q)_{i,n} = q_{i,n}, \quad i = 0, \dots, m, \quad n = -m-1, -m, \dots, 0, 1, \dots \quad (17)$$

Формулы (15), (12) и (13) дают следующие выражения для компонент подходящих дробей:

$$\mathbf{u}_n = \left(\frac{q_{2,n}}{q_{1,n}}, \dots, \frac{q_{m+1,n}}{q_{1,n}} \right).$$

Препятствием для существования $\mathbf{u}_n$ служит равенство нулю знаменателя $q_{1,n}$. Если же задать $\bar{\mathbf{u}}_n \in F\mathbb{P}^m$ формулой $\bar{\mathbf{u}}_n = \mathcal{J}^{-1} Q_n \mathbf{e}_{m+1}$ и не делать переход к $\mathbf{u}_n = \sigma^{-1} \bar{\mathbf{u}}_n$, то величины $\bar{\mathbf{u}}_n$ будут определены всегда. Их компоненты суть m числителей и знаменатель $q_{1,n}$ подходящих дробей. Матрица $\mathcal{J}^{-1} Q_n$ невырождена, поэтому $\bar{\mathbf{u}}_n = (q_{2,n}, \dots, q_{m+1,n}, q_{1,n}) \neq \mathbf{0}$.

Если цепная дробь не имеет надрыва, т.е. при $d(n) = 0$, члены последовательностей $\mathbf{q}_i \stackrel{\text{def}}{=} \{q_{i,n}\}_{n=-m-1}^{\infty}$ удовлетворяют системе $(m+2)$ -членных рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\{\mathbf{p}_n\}_{n=0}^{\infty}) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ q_{i,n} = \sum_{j=1}^{m+1} p_{m+2-j,n} q_{i,n-j}, \right. \\ \mathbf{p}_n &= (p_{1,n}, \dots, p_{m+1,n}) \in F_1^{m+1} \quad (p_{1,n} \neq 0) \left. \right\}_{n=0}^{\infty} \end{aligned} \quad (18)$$

с начальными условиями (16).

Сформулируем доказанное в виде следующих вариантов известных свойств [8, § 1–4].

ТЕОРЕМА 1. Числители $q_{i,n}$, $i = 2, \dots, m+1$, и знаменатели $q_{1,n}$ для n -х подходящих дробей

$$\mathbf{u}_n = \left(\frac{q_{2,n}}{q_{1,n}}, \dots, \frac{q_{m+1,n}}{q_{1,n}} \right) \quad (19)$$

удовлетворяют рекуррентным соотношениям (18) с начальными условиями (16).

ТЕОРЕМА 2. Имеется взаимно однозначное соответствие между

- (i) не имеющими надрыва m -мерными цепными дробями (11);
- (ii) последовательностями $\{\mathbf{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ векторов $\mathbf{p}_n \in F^{m+1}$, $(\mathbf{p}_n)_1 \neq 0$;
- (iii) системами $(m+2)$ -членных рекуррентных соотношений (18).

Заметим, что вся изложенная выше теория верна, хотя и совершенно тривиальна, для $m = 0$. У 0-мерной цепной дроби есть только числители $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n \neq 0$, а знаменателей нет. У подходящих дробей к ней, наоборот, есть только знаменатели

$$q_{1,n} = \prod_{k=0}^n a_k^{-1},$$

связанные двучленными рекуррентными соотношениями $q_{1,n} = a_n^{-1} q_{1,n-1}$.

4. Рекуррентные соотношения и подпространства пространства F^{∞} . Нам уже встречались бесконечные последовательности (17) с элементами из F . Обозначим через F^{∞} векторное пространство таких последовательностей

$$F^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{s} = \{s_n\}_{n=-m-1}^{\infty} : s_n \in F\}.$$

Нулем $\mathbf{0}$ в F^{∞} будет последовательность, состоящая из одних нулей: $(\mathbf{0})_n = 0$. Умножение последовательности на элементы F берется покомпонентно. Определим проекции κ_r , $r = -1, 0, 1, \dots$, пространства F^{∞} на пространство F^{m+1} : $\kappa_r(\mathbf{s}) \stackrel{\text{def}}{=} (s_{r-m}, \dots, s_r)$. Элементы линейных пространств F^{∞} будем записывать как вектор-строки.

Зафиксируем систему (18) рекуррентных соотношений $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\{\mathbf{p}_n\}_{n=0}^{\infty})$. Множество последовательностей $\mathbf{s}$ из F^{∞} с произвольными начальными элементами $s_{-m-1}, \dots, s_{-1}$, удовлетворяющих уравнениям (18), образует линейное пространство, которое мы обозначим через $\mathcal{S}(\mathcal{R})$. Поскольку вся последовательность при этом определяется заданием ее начальных членов, пространство $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ изоморфно $(m+1)$ -мерному пространству F^{m+1} . Естественным базисом в нем будет определенная нами ранее система решений $\mathbf{q}_i$, $i = 1, \dots, m+1$, начальные члены которых равны $(\mathbf{q}_i)_j = \delta_{i,j+m+2}$, $j = -1, \dots, -m-1$ (см. (16)). Решение $\mathbf{s}$ с произвольными начальными условиями $\kappa_{-1}(\mathbf{s}) = (s_{-m-1}^*, \dots, s_{-1}^*) \in F^{m+1}$ будет линейной комбинацией базисных:

$$\mathbf{s} = \sum_{j=1}^{m+1} s_{j-m-2}^* \mathbf{q}_j.$$

Отвечающие системам рекуррентных соотношений, т.е. отвечающие m -мерным цепным дробям, $(m+1)$ -мерные пространства выделяются среди всех $(m+1)$ -мерных подпространств пространства F^{∞} тем, что для базисов в них все матрицы некоторого типа невырождены.

конечного числа звеньев цепной дроби не делают сходящуюся цепную дробь расходящейся и наоборот. Назовем цепную дробь (11) *сходящейся*, если сходится последовательность проективных векторов $\{\bar{u}_n\}_{n=0}^\infty$. Для представителей классов эквивалентности, отвечающих последовательности проективных векторов, можно также рассматривать определители вида (20). Последовательность проективных векторов, связанных с некоторой цепной дробью, от произвольной последовательности проективных векторов отличает неравенство нулю всех таких определителей (это свойство не зависит от выбора представителя).

Если поле F локально компактно, то проективное пространство $F\mathbb{P}^m$ – компакт, и в нем всякая бесконечная последовательность имеет предельную точку. Любое замкнутое множество будет множеством предельных точек некоторой последовательности. Множество предельных точек последовательности подходящих дробей цепной дроби (соответственно произвольных проективных векторов) назовем *множеством значений цепной дроби* (соответственно *последовательности*). Это замкнутое множество. Сходимость цепной дроби (последовательности) означает, что множество ее значений – одна точка.

Если в поле F нет изолированных точек (достаточно, чтобы 0 не был изолированной точкой), то для любой счетной последовательности точек пространства $F\mathbb{P}^m$ можно указать сколь угодно близкую к ней последовательность, для которой составленные из ее координат определители матриц $\Delta_{n,0}$ отличны от нуля. Вторую последовательность, как мы видели, можно рассматривать как последовательность знаменателей и числителей подходящих дробей некоторой цепной дроби. Поэтому любое множество предельных точек второй, а вместе с ней и первой последовательности будет множеством значений некоторой цепной дроби. Справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Если поле F – сепарабельное метрическое пространство без изолированных точек, то сепарабельным будет и $F\mathbb{P}^m$, и любое его замкнутое подмножество служит множеством значений некоторой цепной дроби.*

6. Обобщение теоремы Пинкерле. Изучим детальнее структуру конечномерных подпространств пространства F^∞ . Зафиксируем такое пространство $\mathcal{S}$ размерности $m+1$. Его подпространство $\mathcal{S}_1$ назовем *относительно минимальным*, если для каждой последовательности $\{h_n\}$ из $\mathcal{S}_1$ и любой последовательности $\{g_n\}$ из дополнения $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1$ существует и равен нулю предел отношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{g_n} = 0.$$

Из двух относительно минимальных пространств $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ одно содержится в другом (при $\{h_n\} \in \mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_2$, $\{g_n\} \in \mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1$, получаем противоречие: $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (h_n/g_n) \times (g_n/h_n) = 0$), т.е. относительно минимальные пространства вложены друг в друга. Всякое подпространство конечномерного пространства конечномерно. k -мерное относительно минимальное подпространство пространства $\mathcal{S}$ обозначим $\mathcal{S}^{(k)}$. Его элементы назовем *k -минимальными последовательностями*, а при $k=1$ – просто *минимальными последовательностями*. Последовательности – решения системы рекуррентных уравнений $\mathcal{R}$ – назовем *минимальными (k -минимальными) решениями* системы $\mathcal{R}$. Базис в меньшем относительно минимальном пространстве может быть дополнен до базиса в пространстве большей размерности. Мы будем этим пользоваться.

Когда и какие минимальные пространства существуют, можно увидеть, изучая *предельно периодические цепные дроби* в $F = \mathbb{C}$. По определению их рекуррентные соотношения (18) имеют пределы по подпоследовательностям индексов, кратным $T \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{j, nT+k} = \tilde{p}_{j,k} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, m+1, \quad k = 1, \dots, T, \quad \tilde{p}_{1,k} \neq 0.$$

Произведению T предельных матриц $\tilde{P}_k$ вида (13) отвечает *характеристическое уравнение* $\det(\tilde{P}_1 \cdots \tilde{P}_T - \lambda E) = 0$. Это уравнение степени $m+1$ по λ с ненулевым свободным членом $\pm \tilde{p}_{1,1} \cdots \tilde{p}_{1,T}$. При $T = 1$ (или $m = 1$) картина такова. Занумеруем корни характеристического уравнения в порядке убывания модулей: $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_{m+1}| > 0$. Если модули всех λ различны, то по теореме Пуанкаре (см. [11, гл. 5, § 5]) существует решение $\mathbf{t}_l$ системы рекуррентных уравнений, для которого предел отношения $(\mathbf{t}_l)_{n+1}/(\mathbf{t}_l)_n$ равен λ_l , и определены все пространства $\mathcal{S}^{(l)} = \langle \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_l \rangle$. В [12], [13] показано, что при меньшем ограничении $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{m+1}| > 0$ существует пространство $\mathcal{S}^{(m)}$ (цепная дробь сходится). Там же установлено, что при $T > 1$, $m > 1$ картина может быть иной. Решение, асимптотика которого в смысле корня степени n равна λ_1 на какой-то из T подпоследовательностей индексов $s_k = \{nT + k\}_{n=0}^\infty$, на других подпоследовательностях индексов может иметь асимптотику, определяющуюся другим корнем λ_l , $l > 1$, или даже равняться нулю. В общем случае причины, почему нет пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n/g_n$, могут быть различны: это и полная иррегулярность поведения компонент векторов, и похожая асимптотика $((\mathbf{t}_l)_n = \lambda_l^n, l = 1, \dots, m+1$, где λ_l – различные числа, модули которых равны), и даже их периодичность $((\mathbf{t}_l)_n = \delta_{l,1+n \pmod{m+1}})$.

Изучим связь сходимости и существования относительно минимальных подпространств. Относительно минимальные пространства определяются своими базисами. Переходя от относительно минимального пространства некоторой размерности $k+1$ к пространству размерности k , мы будем менять только k элементов базиса $\mathcal{S}^{(k+1)} \subset \mathcal{S}$, оставляя неизменными $m+1-k$ остальных элементов базиса пространства $\mathcal{S}$. Начнем с некоторого базиса $q_1^{(m+1)}, \dots, q_{m+1}^{(m+1)}$ пространства $\mathcal{S}$:

$$q_{j,n}^{(m+1)} \stackrel{\text{def}}{=} q_{j,n}, \quad j = 1, \dots, m+1, \quad n = -m-1, -m, \dots$$

Сформируем из компонент этих последовательностей проективные векторы $\bar{\mathbf{u}}_n = (\mathbf{q}_{1,n} : \dots : \mathbf{q}_{m+1,n})$.

Сходимость последовательности $\{\bar{\mathbf{u}}_n\}$ в $F\mathbb{P}^m$ означает сходимость в одной из карт $F\mathbb{P}_{i_m}^m$, т.е. существование m пределов $r_j^{(m)} \in F$:

$$r_j^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{j,n}^{(m+1)}}{q_{i_m,n}^{(m+1)}}, \quad j \neq i_m.$$

Определим новый базис в $\mathcal{S}$, вычтя из элементов исходного базиса *проекцию* $\{r_j^{(m)} \times q_{i_m,n}^{(m+1)}\}$ на них последовательности $\{q_{i_m,n}^{(m+1)}\}$. (Эта операция – действительно *проекция*, т.е. повторное ее применение не меняет результата.) Итак, включим в новый базис последовательность $\{q_{i_m,n}\}_{n=1}^\infty$, а вместо последовательностей $\{q_{j,n}\}_{n=1}^\infty, j \neq i_m$, возьмем m линейно выражающихся через них последовательностей $\mathbf{q}_j^{(m)}$:

$$q_{j,n}^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} q_{j,n}^{(m+1)}, & j = i_m, \\ q_{j,n}^{(m+1)} - r_j^{(m)} q_{i_m,n}^{(m+1)}, & j \neq i_m. \end{cases}$$

Последовательности $\mathbf{q}^{(m)}$ выражаются через последовательности $\mathbf{q}^{(m+1)}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^{(m)} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{m+1}^{(m)} \end{pmatrix} = R^{(m)} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^{(m+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{m+1}^{(m+1)} \end{pmatrix}, \quad R^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \dots & -r_1^{(m)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -r_{m+1}^{(m)} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Натянутое на последовательности $\mathbf{q}_j^{(m)}$ m -мерное пространство $\mathcal{S}$ будет относительно минимальным пространством. Действительно, равны нулю пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{j,n}^{(m)}}{q_{i_m,n}^{(m)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{j,n} - r_j^{(m)} q_{i_m,n}}{q_{i_m,n}} = 0.$$

Осталось заметить, что для того, чтобы установить относительную минимальность пространства $\mathcal{S}^{(k)}$, достаточно установить равенство нулю пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n/g_n$, где числителями берутся k элементов его базиса, а знаменателями – остальные $m+1-k$ элементов базиса пространства $\mathcal{S}$.

Обратно, пусть теперь для $(m+1)$ -мерного подпространства пространства F^∞ существует m -мерное относительно минимальное пространство $\mathcal{S}^{(m)}$, последовательности $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m, \mathbf{g}_i = \{g_{i,n}\}_{n=-m-1}^\infty$, составляют его базис, а $\mathbf{g}_{m+1}$ – какой-то элемент, не содержащийся в $\mathcal{S}^{(m)}$. Составим из компонент векторов $\mathbf{g}_i$ проективные векторы $\mathbf{v}_n = (g_{1,n} : \dots : g_{m+1,n})$. Так как все отношения $g_{j,n}/g_{m+1,n}$ при $n \rightarrow \infty$ стремятся к 0, то проективные векторы $\mathbf{v}_n$ сходятся к проективному вектору $\mathbf{e}_{m+1} = (0 : \dots : 0 : 1)$. Для любого другого базиса $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{m+1}$,

$$h_{i,n} = \sum_{j=1}^{m+1} c_{i,j} g_{j,n}, \quad \det(c_{i,j}) \neq 0,$$

и для тех k , для которых $c_{k,m+1} \neq 0$, также существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{i,n}}{h_{k,n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{m+1} c_{i,j} g_{j,n}}{\sum_{j=1}^{m+1} c_{k,j} g_{j,n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{m+1} c_{i,j} g_{j,n}/g_{m+1,n}}{\sum_{j=1}^{m+1} c_{k,j} g_{j,n}/g_{m+1,n}} = \frac{c_{i,m+1}}{c_{k,m+1}}.$$

Таким образом, проективные векторы сходятся в карте $F\mathbb{P}_k^m$.

ТЕОРЕМА 5. *Последовательность m -мерных проективных векторов сходится тогда и только тогда, когда у отвечающего ей конечномерного подпространства пространства F^∞ существует m -мерное относительно минимальное подпространство.*

Следствием теоремы 5 будет следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. *m -мерная цепная дробь сходится тогда и только тогда, когда в подпространстве $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ существует m -мерное относительно минимальное подпространство.*

В случае $m = 1$ теорема 6 превращается в первую часть приведенной во введении теоремы Пинкерле [2], [3].

Теорему 5 можно применить к любому относительно минимальному пространству $\mathcal{S}^{(k+1)}$ пространства $\mathcal{S}$. Имея базис $(\mathbf{q}_1^{(k+1)}, \dots, \mathbf{q}_{k+1}^{(k+1)})$ пространства $\mathcal{S}^{(k+1)}$, можно рассмотреть последовательность k -мерных проективных векторов с компонентами, составленными из n -х членов $k + 1$ базисной последовательности $\mathbf{q}_i^{(k+1)}$. Ее сходимость в $F\mathbb{P}^k$ эквивалентна существованию относительно минимального пространства $\mathcal{S}^{(k)}$. Поэтому справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. *Если в $\mathcal{S}$ найдутся относительно минимальные пространства всех размерностей $m, m - 1, \dots, k$, то справедливы следующие формулы, задающие базис $\mathbf{q}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{q}_k^{(k)}$ пространства $\mathcal{S}^{(k)}$:*

$$r_j^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & j \in \{i_k, \dots, i_m\}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{j,n}^{(k+1)}}{q_{i_k,n}^{(k+1)}}, & j \notin \{i_k, \dots, i_m\}, \end{cases}$$

$$q_{j,n}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} q_{j,n}^{(k+1)} - r_j^{(k)} q_{i_k,n}^{(k+1)},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^{(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{m+1}^{(k)} \end{pmatrix} = R^{(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{m+1}^{(k+1)} \end{pmatrix}, \quad R^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \dots & -r_1^{(k)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -r_{m+1}^{(k)} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathcal{S}^{(k)} = \langle \mathbf{q}_{i_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}_{i_k}^{(k)} \rangle, \quad k = 1, \dots, m.$$

Часть Б) теоремы Пинкерле дает явный вид гарантированных теоремой 3 двучленных рекуррентных соотношений, которым удовлетворяют минимальные решения. Перейдем теперь к доказательству утверждения, обобщающего это свойство.

Выпишем выражение проективного вектора $\bar{\mathbf{f}}_0$ через компоненты $\bar{\mathbf{f}}_{n+1}$:

$$\bar{\mathbf{f}}_0 = \mathcal{J}^{-1} Q_n \mathcal{J} \bar{\mathbf{f}}_{n+1} = (s_2 : \dots : s_{m+1} : s_1),$$

где суммы s_j равны

$$q_{j,n-m} f_{m+1,n+1} + \sum_{k=1}^m q_{j,n-m+k} f_{k,n+1}.$$

Пусть предел $\bar{\mathbf{f}}_0$ сходящейся цепной дроби лежит в l -й карте ($l \in \{1, \dots, m+1\}$), координаты в которой задаются отображением σ_l :

$$\sigma_l(f_1, \dots, f_m) \stackrel{\text{def}}{=} (f_1 : \dots : \overset{l}{1} : \dots : f_m).$$

Итак, пусть

$$\sigma_l^{-1} \bar{\mathbf{f}}_0 = \sigma_l^{-1} (f_{1,0}^{(l)} : \dots : \overset{l}{1} : \dots : f_{m+1,0}^{(l)}) = (f_{1,0}^{(l)}, \dots, f_{l-1,0}^{(l)}, f_{l+1,0}^{(l)}, \dots, f_{m+1,0}^{(l)}).$$

Равенство проективных векторов можно записать в виде равенства их прообразов в l -й карте, домножив которые на неравный нулю знаменатель

$$q_{l,n-m} f_{m+1,n+1} + \sum_{k=1}^m q_{l,n-m+k} f_{k,n+1}$$

компонент вектора $\sigma_l^{-1} \mathcal{J}^{-1} Q_n \mathcal{J} \bar{\mathbf{f}}_{n+1}$, можно переписать как m линейных равенств. Предварительно вводя обозначение

$$q'_{j,r} = \begin{cases} q_{j,r} - f_{j,0}^{(l)} q_{l,r}, & j < l, \\ q_{j+1,r} - f_{j+1,0}^{(l)} q_{l,r}, & j > l, \end{cases}$$

выпишем их:

$$f_{m+1,n+1} q'_{j,n-m} + \sum_{k=1}^m f_{k,n+1} q'_{j,n-m+k} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Если $f_{m+1,n+1} \neq 0$, то последние равенства переписываются в виде соотношений

$$q'_{l,n} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{-f_{k,n+1}}{f_{m+1,n+1}} q'_{l,n-m+k} + \frac{-f_{m,n+1}}{f_{m+1,n+1}} q'_{l,n-m}. \quad (23)$$

Если же и $f_{m,n+1} \neq 0$, то (23) будут $(m+1)$ -членными рекуррентными соотношениями, отвечающими цепной дроби

$$\mathbf{b}'_0 + \frac{a'_0}{\ddots + \frac{a'_{n-1}}{\mathbf{b}'_n + \frac{a'_n}{\ddots}}} \quad (24)$$

с элементами

$$a'_n = \frac{-f_{m+1,n+1}}{f_{m,n+1}} \in F', \quad \mathbf{b}'_n = \left(\frac{f_{1,n+1}}{f_{m+1,n+1}}, \dots, \frac{f_{m-1,n+1}}{f_{m+1,n+1}} \right) \in F^m.$$

Отметим, что компоненты проективных векторов $\bar{\mathbf{f}}_{n+1}$ вошли в коэффициенты (23) в виде вполне определенных отношений. Соотношения (23) можно применять для численного построения базиса в пространстве m -минимальных решений исходных рекуррентных соотношений.

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 8. *Если в $\mathcal{S}$ есть относительно минимальное пространство максимальной размерности m , то его базис составляют последовательности — числители и знаменатель подходящих дробей к $(m-1)$ -мерной цепной дроби (23).*

Наша формулировка отличается от формулировки пункта Б) теоремы Пинкерле, поэтому посмотрим, что мы получили при $m = 1$. Рекуррентным соотношениям, записанным в форме (3), отвечает цепная дробь с элементами $a_n = d_{n-1}^{-1}$, $b_n = d_{n-1}^{-1} c_{n-1}$. По

доказанному нами минимальные решения q'_n подчинены условию

$$\begin{aligned} \frac{q'_n}{q'_{n-1}} &= -\frac{1}{f_{1,n+1}} = -\frac{1}{b_{n+1} + \frac{a_{n+1}}{b_{n+2} + \frac{a_{n+2}}{\ddots}}} \\ &= -\frac{1}{d_n^{-1}c_n + \frac{d_n^{-1}}{d_{n+1}^{-1}c_{n+1} + \frac{d_{n+1}^{-1}}{\ddots}}} = -\frac{d_n}{c_n + \frac{d_{n+1}}{c_{n+1} + \frac{d_{n+2}}{\ddots}}}, \end{aligned}$$

что совпадает с утверждением Б) теоремы Пинкерле.

В заключение автор благодарит А. Д. Брюно за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gautschi W. Computational aspects of three-term recurrence relations // SIAM Review. 1967. V. 9. P. 24–82.
- [2] Pincherle S. Delle funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad esse attinenti // Giorn. Mat. Battaglini. 1894. V. 32. P. 209–291.
- [3] Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. М.: Мир, 1985.
- [4] Парусников В.И. Обобщение теоремы Пинкерле для k -членных рекуррентных соотношений // Препринт № 87. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2000.
- [5] Jacobi C.G.J. Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // J. Reine Angew. Math. 1868. V. 69. P. 29–64.
- [6] Euler L. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // Petersburger Akademie Notiz: Exhib. August 14, 1775.
- [7] Perron O. Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus // Math. Ann. 1907. V. 64. № 6. P. 1–76.
- [8] Paley R. E. A. C., Ursell H. D. Continued fractions in several dimensions // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1930. V. 26. № 2. P. 127–144.
- [9] Парусников В.И. Алгоритм Якоби–Перрона и совместное приближение функций // Матем. сб. 1981. Т. 114 (156). № 2. С. 322–333.
- [10] de Bruijn M. G. The interruption phenomenon for generalized continued fractions // Bull. Austral. Math. Soc. 1978. V. 19. № 2. P. 245–272.
- [11] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. 3-е изд. М.: Наука, 1967.
- [12] Парусников В.И. Предельно периодические многомерные непрерывные дроби // Препринт № 62. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1983.
- [13] Parusnikov V. I. On the convergence of the multidimensional limit-periodic continued fractions // Lect. Notes in Math. 1985. № 1237. P. 217–227.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
E-mail: parus@spp.keldysh.ru

Поступило
11.01.2003
Исправленный вариант
26.11.2004