Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Смагин, О скорости сходимости проекционно-разностных методов для гладко разрешимых параболических уравнений, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 6, 907–918

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:39:11

УДК 517.988.8

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ГЛАДКО РАЗРЕШИМЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Смагин

Линейная параболическая задача в сепарабельном гильбертовом пространстве решается приближенно проекционно-разностным методом. Дискретизация задачи по пространству проводится методом Галёркина с ориентацией на конечномерные подпространства типа конечных элементов, а по времени используются неявная схема Эйлера и модифицированная схема Кранка–Николсон. Установлены равномерные по временной сетке и среднеквадратичные по пространству оценки погрешности приближенных решений. Эти оценки характеризуют скорость сходимости погрешностей к нулю как по временной переменной, так и по пространственным переменным.

Библиография: 10 названий.

1. Описание задачи. В работах [1] и [2] изучалась сходимость в сильных нормах проекционно-разностных методов для гладко разрешимых параболических уравнений. В [1] дискретизация задачи по времени проводится по неявной схеме Эйлера, а в [2] – по модифицированной схеме Кранка–Николсон. В [3] и [4] показано соответственно, что для подпространств типа конечных элементов в более слабой среднеквадратичной норме скорость сходимости погрешностей к нулю по пространственным переменным увеличивается на порядок.

В данной работе установлено, что при оценке погрешности приближенных решений в промежуточной норме, равномерной по временной сетке и среднеквадратичной по пространству, скорость по пространственным переменным сходимости погрешностей к нулю увеличивается на полпорядка.

Для стационарных задач, решаемых проекционным методом, этот эффект достаточно хорошо известен, его обоснование называют леммой Обэна–Нитше (см., например, [5, с. 139]), и при этом скорость сходимости возрастает на порядок.

В случае, когда параболическая задача общего вида решается приближенно полудискретным проекционным методом (дискретизация проводится только по пространственным переменным), обоснование подобного факта для общего случая проекционных подпространств типа конечных элементов дано в [3] и [6]. Для весьма частного случая одномерных параболических задач и для кусочно линейных базисных функций подобный результат для проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени приводится в [7, с. 217].

Сформулируем исходную параболическую задачу в вариационной форме. Пусть V и H – сепарабельные гильбертовы пространства такие, что $V \subset H$ и вложение плотно и непрерывно. Через V' обозначим пространство, двойственное V . Отождествляя

H со своим двойственным, получим $V \subset H \subset V'$. Под выражением вида (z, v) далее понимаем значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. В случае $z \in H$ выражение (z, v) совпадает со скалярным произведением элементов $z, v \in H$. Норму элемента z в пространстве H обозначаем $\|z\|$.

Пусть для $t \in [0, T]$, где $T < \infty$, на $u, v \in V$ определено семейство полуторалинейных симметричных форм $a(t, u, v)$. Для всех $t \in [0, T]$ и $u, v \in V$ выполнено

$$|a(t, u, v)| \leq M_1 \|u\|_V \|v\|_V, \quad a(t, u, u) \geq \delta \|u\|_V^2, \quad \delta > 0. \quad (1.1)$$

Считаем, что функция $t \rightarrow a(t, u, v)$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$ и для формы $a_1(t, u, v) = \partial a(t, u, v) / \partial t$ справедлива оценка

$$|a_1(t, u, v)| \leq M_2 \|u\|_V \|v\|_V. \quad (1.2)$$

Здесь и далее производные понимаются в обобщенном смысле.

Форма $a(t, u, v)$ порождает линейный ограниченный из V в V' оператор $A(t)$, определяемый соотношением $a(t, u, v) = (A(t)u, v)$. Из (1.1) следует оценка $\|A(t)u\|_{V'} \leq M_1 \|u\|_V$. Для всех $u \in V$ функция $t \rightarrow A(t)u \in V'$ дифференцируема и $a_1(t, u, v) = (A'(t)u, v)$. Функция $t \rightarrow A'(t)u \in V'$ измерима. Из (1.2) почти при всех $t \in [0, T]$ следует оценка $\|A'(t)u\|_{V'} \leq M_2 \|u\|_V$.

Для $t \in [0, T]$ определим множество

$$D[A(t)] = \{u \in V \mid A(t)u \in H\}.$$

Предположим существование гильбертова пространства E такого, что для $t \in [0, T]$ выполняется $D[A(t)] \subset E \subset V$, пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$ (см. [8, с. 23]) и для $t \in [0, T]$ и $u \in D[A(t)]$ выполняется оценка $\|u\|_E \leq d \|A(t)u\|$.

Примеры реализации пространств H, V и E можно найти, например, в [1], [4], [8].

Предположим, что на V для $t \in [0, T]$ определены линейные операторы $B(t): V \rightarrow H$ такие, что

$$\|B(t)u\| \leq M_3 \|u\|_V, \quad u \in V, \quad (1.3)$$

для $u \in V$ функция $t \rightarrow B(t)u \in H$ дифференцируема и справедлива оценка $\|B'(t)u\| \leq M_4 \|u\|_V$.

Предположим, что задана непрерывная на $[0, T]$ функция $t \rightarrow f(t) \in H$ такая, что существует производная $f' \in L_2(0, T; V')$. Пусть также задан элемент $u^0 \in D[A(0)]$.

В сделанных предположениях рассмотрим в пространстве V' задачу

$$u'(t) + [A(t) + B(t)]u(t) = f(t), \quad u(0) = u^0. \quad (1.4)$$

В [9] установлено, что задача (1.4) имеет единственное решение $u(t)$, далее называемое гладким, такое, что

$$u' \in C([0, T], H) \cap L_2(0, T; V), \quad A(\cdot)u(\cdot) \in C([0, T], H), \quad u'' \in L_2(0, T; V'),$$

и удовлетворяются уравнение и начальное условие (1.4). Из уравнения (1.4) следует, что и $B(\cdot)u(\cdot) \in C([0, T], H)$.

Отметим, что к (1.4) сводятся параболические задачи как с краевыми условиями Дирихле, так и Неймана, а также и смешанными краевыми условиями. Кроме того, можно рассматривать задачи произвольного $2m, m \geq 1$, порядка по пространственным переменным (см., например, [8]).

2. Проекционно-разностный метод с неявной схемой Эйлера по времени. Через V_h , где параметр $h > 0$, обозначим конечномерное подпространство пространства V . Определим на элементах $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V'_h} = \sup |(u_h, v_h)|$, где точная верхняя грань берется по всем $v_h \in V_h$ с $\|v_h\|_V = 1$. Очевидно, что $\|u_h\|_{V'_h} \leq \|u_h\|_{V'}$. Пусть P_h – ортопроектор в пространстве H на V_h . В [10] показано, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\bar{P}_h: V' \rightarrow V'_h$ и $\|\bar{P}_h u\|_{V'_h} \leq \|u\|_{V'}$ для $u \in V'$. Отметим для $u \in V'$ и $v \in H$ соотношение $(\bar{P}_h u, v) = (u, P_h v)$ [3].

Задаче (1.4) сопоставим разностную задачу в V_h :

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \bar{P}_h A(t_k)u_k^h + P_h B(t_k)u_k^h = P_h f(t_k), \quad k = \overline{1, N}, \quad (2.1)$$

где N – натуральное число, $\tau N = T$, $t_k = k\tau$ и элемент $u_0^h \in V_h$ считаем заданным. Задача (2.1) для достаточно малых τ однозначно разрешима [1].

В предположении, что подпространства V_h такие, что

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leq ch\|v\|_E, \quad v \in E, \quad (2.2)$$

где Q_h – ортопроектор пространства V на V_h , в [1] установлена оценка погрешности

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|^2 \tau \\ & + \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right) dt \right\|_V^2 \\ & \leq M \left\{ \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + \tau \int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2) dt \right. \\ & \left. + h^2 \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Простой анализ доказательства в [1] оценки (2.3) показывает, что при условии дополнительной гладкости решения задачи (1.4), $u'' \in L_p(0, T; H)$ для $1 \leq p \leq 2$, оценка погрешности следующая:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|^2 \tau \\ & + \sum_{k=1}^N \left\| u'(t_k) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|^2 \tau \\ & \leq M \left\{ \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|^p dt \right)^{2/p} \right. \\ & \left. + h^2 \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При получении оценки (2.4) главное в работе [1] в тождестве (14) иначе оценить слагаемое

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{2}{\tau^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{t_k}^t \operatorname{Re}(u''(s), z_k^h - z_{k-1}^h) ds \right) dt \\ &\leq \varepsilon^{-1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u''(s)\| ds \right)^2 + \varepsilon \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2 \\ &\leq \varepsilon^{-1} \tau^{2-2/p} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u''(t)\|^p dt \right)^{2/p} + \varepsilon \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|^2, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало.

Далее покажем, что более слабая норма погрешности, а именно, выражение

$$S_1 \equiv \max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right) dt \right\|^2 \quad (2.5)$$

при $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$ стремится к нулю по параметру h , вообще говоря, быстрее, чем это следует из оценок (2.3) и (2.4).

Предположим дополнительно, что в задаче (1.4) операторы $B(t): H \rightarrow V'$ и справедлива оценка

$$\|B(t)u\|_{V'} \leq M_4 \|u\|, \quad u \in H. \quad (2.6)$$

В приложениях условия (1.3) и (2.6) фактически выполняются одновременно.

Как в [1] и [2], определим для $t \in [0, T]$ гильбертовы пространства $V(t)$, задав на V новое скалярное произведение,

$$V(t) = \{u, v \in V \mid (u, v)_{V(t)} = a(t, u, v)\}.$$

Через $Q_h(t)$ обозначим ортопроектор в пространстве $V(t)$ на V_h .

ТЕОРЕМА 1. Пусть для задачи (1.4) выполнены перечисленные выше условия гладкой разрешимости. Пусть, кроме того, операторы $B(t)$ удовлетворяют условию (2.6) и $u(t)$ – решение задачи (1.4) такое, что $u''(t) = u_1''(t) + u_2''(t)$, где $u_1'' \in L_p(0, T; H)$ для $1 \leq p \leq 2$ и $u_2'' \in L_2(0, T; V')$. Пусть, наконец, u_k^h – решение задачи (2.1). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right) dt \right\|^2 \\ &+ \sum_{k=1}^N \|Q_h(t_k)u(t_k) - u_k^h\|_{V'}^2 \tau \\ &\leq M \left\{ \|u^0 - u_0^h\|^2 + \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u_1''(t)\|^p dt \right)^{2/p} + \tau^2 \int_0^T \|u_2''(t)\|_{V'}^2 dt \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|^2 \tau \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^N \| [I - Q_h(t_k)] u(t_k) \|^2 \tau \right)^{1/2} \right\}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $z_k = u(t_k) - u_k^h$. Тогда, учитывая свойство

$$\overline{P}_h A(t)u = \overline{P}_h A(t)Q_h(t)u, \quad \text{где } u \in V,$$

нетрудно установить тождество

$$(z_k - z_{k-1})\tau^{-1} + \overline{P}_h A(t_k)z_k^h + P_h B(t_k)z_k = \{[u(t_k) - u(t_{k-1})]\tau^{-1} - P_h u'(t_k)\}, \quad (2.8)$$

где $z_k^h = Q_h(t_k)u(t_k) - u_k^h$. Умножим (2.8) скалярно в H на z_k^h . После простых преобразований получим

$$\begin{aligned} ((z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, z_k) + a(t_k, z_k^h, z_k^h) &= ((z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, [I - Q_h(t_k)]u(t_k)) \\ &- (B(t_k)z_k, z_k^h) + \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [u'(t) - u'(t_k)] dt, z_k^h \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

В равенстве (2.9) возьмем удвоенную вещественную часть и воспользуемся оценкой (1.1). Получим неравенство

$$\begin{aligned} &\|z_k\|^2 \tau^{-1} - \|z_{k-1}\|^2 \tau^{-1} + \|z_k - z_{k-1}\|^2 \tau^{-1} + 2\delta \|z_k^h\|_V^2 \\ &\leq 2 \operatorname{Re}((z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, [I - Q_h(t_k)]u(t_k)) - 2 \operatorname{Re}(B(t_k)z_k, z_k^h) \\ &+ 2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [u'(t) - u'(t_k)] dt, z_k^h\right) = \sum_{i=1}^3 I_i. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Оцениваем слагаемые I_i , $i = 1, 2$, в правой части (2.10). Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 2\|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\| \|[I - Q_h(t_k)]u(t_k)\|, \\ I_2 &\leq 2M_4 \|z_k\| \|z_k^h\|_V \leq \varepsilon_1 \|z_k^h\|_V^2 + \varepsilon_1^{-1} M_4^2 \|z_k\|^2. \end{aligned}$$

Слагаемое I_3 в (2.10) преобразуем так:

$$I_3 = \frac{2}{\tau} \operatorname{Re} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{t_k}^t u_1''(s) ds, z_k^h \right) dt + \frac{2}{\tau} \operatorname{Re} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{t_k}^t u_2''(s) ds, z_k^h \right) dt = I_3^1 + I_3^2.$$

Оцениваем I_3^1 :

$$\begin{aligned} I_3^1 &\leq 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_1''(s)\| ds \|z_k^h\| \leq 2c \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_1''(s)\| ds \|z_k^h\|_V \\ &\leq \varepsilon_2^{-1} c^2 \tau^{2-2/p} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_1''(s)\|^p ds \right)^{2/p} + \varepsilon_2 \|z_k^h\|_V^2. \end{aligned}$$

Для слагаемого I_3^2 получим

$$I_3^2 \leq 2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_2''(s)\|_V ds \|z_k^h\|_V \leq \varepsilon_3^{-1} \tau \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_2''(s)\|_V^2 ds + \varepsilon_3 \|z_k^h\|_V^2.$$

Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \delta/3$. В результате из (2.10) следует оценка

$$\begin{aligned} & \|z_k\|^2 \tau^{-1} - \|z_{k-1}\|^2 \tau^{-1} + \|z_k - z_{k-1}\|^2 \tau^{-1} + \delta \|z_k^h\|_V^2 \\ & \leq 2 \|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\| \|[I - Q_h(t_k)]u(t_k)\| \\ & \quad + c_1 \tau^{2-2/p} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_1''(t)\|^p dt \right)^{2/p} + c_2 \tau \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u_2''(t)\|_V^2 dt + c_3 \|z_k\|^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Умножим (2.11) на τ и просуммируем по k от 1 до $m \leq N$. Имеем

$$\begin{aligned} & \|z_m\|^2 + \sum_{k=1}^m (\|z_k - z_{k-1}\|^2 + \delta \|z_k^h\|_V^2 \tau) \\ & \leq \|z_0\|^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^N \|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\|^2 \tau \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^N \|[I - Q_h(t_k)]u(t_k)\|^2 \tau \right)^{1/2} \\ & \quad + c_1 \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u_1''(t)\|^p dt \right)^{2/p} + c_2 \tau^2 \int_0^T \|u_2''(t)\|_V^2 dt + c_3 \tau \sum_{k=1}^m \|z_k\|^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В (2.12) выделяем суммарное неравенство для $\|z_m\|^2$. Получим оценку (2.7) для $\max \|u(t_k) - u_k^h\|^2$. Эту оценку подставим в (2.12) и получим (2.7) в полном объеме.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в задаче (1.4) $f' \in L_2(0, T; V')$, то решение $u(t)$ таково, что $u'' \in L_2(0, T; V')$, и оценка (2.7) выполняется с $u_1''(t) = 0$ и $u_2''(t) = u''(t)$. Если же решение $u(t)$ задачи (1.4) такое, что $u'' \in L_p(0, T; H)$ для $1 \leq p \leq 2$, то оценка (2.7) выполняется с $u_1''(t) = u''(t)$ и $u_2''(t) = 0$.

Обратим теперь внимание, что в (2.3) и (2.4) установлены оценки выражения

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|^2 \tau, \quad (2.13)$$

которые можно подставить в оценку (2.7). В результате получим

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия гладкой разрешимости задачи (1.4) и условие (2.2), т.е. выполняется оценка (2.7). Пусть, кроме того, операторы $B(t)$ удовлетворяют условию (2.6). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} S_1 & \leq M \left\{ \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + \tau \int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_V^2) dt \right. \\ & \quad \left. + h^3 \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Если же дополнительно решение $u(t)$ такое, что $u'' \in L_p(0, T; H)$ для $1 \leq p \leq 2$, т.е. выполняется оценка (2.4), то

$$\begin{aligned} S_1 & \leq M \left\{ \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|^p dt \right)^{2/p} \right. \\ & \quad \left. + h^3 \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В (2.14) и (2.15) выражение S_1 определено в (2.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что

$$\begin{aligned} \|u^0 - u_h^0\|_H^2 &\leq 2\|u^0 - Q_h u^0\|_H^2 + 2\|Q_h u^0 - u_h^0\|_H^2 \\ &\leq c_1 h^4 \|A(0)u^0\|_H^2 + c_2 \|Q_h u^0 - u_h^0\|_V^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Следует также воспользоваться оценкой

$$\left(\sum_{k=1}^N \| [I - Q_h(t_k)] u(t_k) \|^2 \tau \right)^{1/2} \leq ch^2 \max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|, \quad (2.17)$$

обоснованной, например, в [4]. Затем оценки (2.4) и (2.5) выражения (2.13) нужно подставить в (2.7). После несложных преобразований получим (2.14) и (2.15).

3. Проекционно-разностный метод с модифицированной схемой Кранка–Николсон по времени. В качестве задачи, приближенной к (1.4), которая удовлетворяет условиям гладкой разрешимости, рассмотрим разностную задачу в V_h

$$\begin{aligned} (u_k^h - u_{k-1}^h) \tau_k^{-1} + \bar{P}_h [A(t_k) u_k^h + A(t_{k-1}) u_{k-1}^h] 2^{-1} \\ + P_h [B(t_k) u_k^h + B(t_{k-1}) u_{k-1}^h] 2^{-1} = f_h^k, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где элемент $u_0^h \in V_h$ считаем заданным, $f_h^k = P_h [f(t_k) + f(t_{k-1})] 2^{-1}$, а остальные параметры задачи (3.1) такие же, как в задаче (2.1). Как и задача (2.1), задача (3.1) для достаточно малых τ однозначно разрешима [2].

В [2] установлены оценки для погрешности

$$S_2 \equiv \max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|^2 \tau. \quad (3.2)$$

В предположении (2.2) и в предположении дополнительной гладкости решения задачи (1.4) $u'' \in L_p(0, T; H)$ для некоторого $1 \leq p \leq 2$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} S_2 \leq M \left\{ \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + h^2 \left[\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right] \right. \\ \left. + \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|^p dt \right)^{2/p} \right\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где погрешность S_2 определена в (3.2). Если же существует $u''' \in L_p(0, T; H)$ для некоторого $1 \leq p \leq 2$, то для S_2 справедлива оценка

$$\begin{aligned} S_2 \leq M \left\{ \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + h^2 \left[\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right] \right. \\ \left. + \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \|u'''(t)\|^p dt \right)^{2/p} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далее покажем, что выражение $\max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|^2$ при $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$ стремится к нулю по параметру h , вообще говоря, быстрее, чем это следует из оценок (3.3) и (3.4).

ТЕОРЕМА 2. Пусть для задачи (1.4) выполнены перечисленные выше условия гладкой разрешимости. Кроме того, операторы $B(t)$ удовлетворяют условию (2.6). Пусть $u(t)$ – решение задачи (1.4), а u_k^h – решение задачи (3.1). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|^2 \\ & \leq M \left\{ \|u^0 - u_0^h\|^2 + \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} - u'(t) \right) dt \right\|^2 \right. \\ & \quad + \tau^2 \left[\|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 + \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u'(t)\|^2 dt \right] \\ & \quad \left. + \left(\sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|^2 \tau \right)^{1/2} \max_{0 \leq t \leq T} \|[I - Q_h(t)]u(t)\| \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $z_k = u(t_k) - u_k^h$. Тогда нетрудно установить равенства

$$\begin{aligned} & (z_k - z_{k-1})\tau^{-1} + \overline{P}_h[A(t_k)z_k^h + A(t_{k-1})z_{k-1}^h]2^{-1} + P_h[B(t_k)z_k + B(t_{k-1})z_{k-1}]2^{-1} \\ & = [u(t_k) - u(t_{k-1})]\tau^{-1} - P_h[u'(t_k) + u'(t_{k-1})]2^{-1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $z_k^h = Q_h(t_k)u(t_k) - u_k^h$ и $k = \overline{1, N}$. Умножим (3.6) на $(z_k^h + z_{k-1}^h)\tau$ скалярно в H . В результате после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} & (z_k - z_{k-1}, z_k + z_{k-1}) + 2 \left(\frac{A(t_k)z_k^h + A(t_{k-1})z_{k-1}^h}{2}, \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) \tau \\ & = ((z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, [I - Q_h(t_k)]u(t_k) + [I - Q_h(t_{k-1})]u(t_{k-1}))\tau \\ & \quad + 2 \left(\frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\tau} - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2}, \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) \tau \\ & \quad - 2 \left(\frac{B(t_k)z_k + B(t_{k-1})z_{k-1}}{2}, \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) \tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Преобразуем здесь выражение

$$\frac{A(t_k)z_k^h + A(t_{k-1})z_{k-1}^h}{2} = A(t_k) \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} + \frac{[A(t_{k-1}) - A(t_k)]z_{k-1}^h}{2}.$$

Учитывая последнее соотношение, возьмем от (3.7) вещественную часть:

$$\begin{aligned} & \|z_k\|^2 - \|z_{k-1}\|^2 + 2 \left(A(t_k) \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}, \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) \tau \\ & = 2 \operatorname{Re}((z_k - z_{k-1})\tau^{-1}, [I - Q_h(t_k)]u(t_k) + [I - Q_h(t_{k-1})]u(t_{k-1}))\tau \\ & \quad + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\tau} - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2}, \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) \tau \\ & \quad - 2 \operatorname{Re} \left(\frac{B(t_k)z_k + B(t_{k-1})z_{k-1}}{2}, \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) \tau \\ & \quad + \operatorname{Re} \left([A(t_k) - A(t_{k-1})]z_{k-1}^h, (z_k^h + z_{k-1}^h)2^{-1} \right) \tau = \sum_{i=1}^4 I_i. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Оценим слагаемые в обеих частях (3.8). Прежде всего, из (1.1) получим

$$2 \left(A(t_k) \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}, \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) \tau \geq 2\delta \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2.$$

Теперь оцениваем сверху слагаемые I_i в правой части (3.8):

$$I_1 \leq 2 \|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\| 2 \max_{0 \leq t \leq T} \| [I - Q_h(t)]u(t) \| \tau.$$

Слагаемое I_2 прежде преобразуем:

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \operatorname{Re} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1}))}{2} \right) dt, \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right) \\ &\leq 2 \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1}))}{2} \right) dt \right\|_{V'} \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_V \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon_1 \tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1}))}{2} \right) dt \right\|_{V'}^2 + \varepsilon_1 \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau. \end{aligned}$$

При оценке слагаемого I_3 воспользуемся условием (2.6):

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \varepsilon_2^{-1} \left\| \frac{B(t_k)z_k + B(t_{k-1})z_{k-1}}{2} \right\|_{V'}^2 \tau + \varepsilon_2 \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \\ &\leq \varepsilon_2^{-1} 2^{-1} M_4^2 (\|z_k\|^2 + \|z_{k-1}\|^2) \tau + \varepsilon_2 \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau. \end{aligned}$$

Оценим, наконец,

$$I_4 \leq M_2 \tau \|z_{k-1}^h\|_V \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_V \tau \leq \varepsilon_3^{-1} M_2^2 \tau^3 \|z_{k-1}^h\|_V^2 + \varepsilon_3 \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau.$$

Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \delta/3$. Тогда из (3.8) получим оценку

$$\begin{aligned} &\|z_k\|^2 - \|z_{k-1}\|^2 + \delta \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \\ &\leq c_1 \|z_k\|^2 \tau + c_2 \|z_{k-1}\|^2 \tau + c_3 \tau^3 \|z_{k-1}^h\|_V^2 \\ &\quad + 4 \|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\| \max_{0 \leq t \leq T} \| [I - Q_h(t)]u(t) \| \tau \\ &\quad + \frac{c_4}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1}))}{2} \right) dt \right\|_{V'}^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Неравенства (3.9) суммируем по k от 1 до $m \leq N$. В результате простых преобразований получим

$$\begin{aligned} &\|z_m\|^2 + \delta \sum_{k=1}^m \left\| \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \\ &\leq c_1 \left\{ \|z_0\|^2 + \tau^3 \sum_{k=1}^m \|z_{k-1}^h\|_V^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^m \|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\|^2 \tau \right)^{1/2} \max_{0 \leq t \leq T} \| [I - Q_h(t)]u(t) \| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^m \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1}))}{2} \right) dt \right\|_{V'}^2 \right\} + c_2 \tau \sum_{k=1}^m \|z_k^h\|^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В (3.10) рассмотрим слагаемое

$$\tau^3 \sum_{k=1}^m \|z_{k-1}^h\|_V^2 \leq \tau^2 T \max_{0 \leq k \leq N} \|z_k^h\|_V^2 \leq \tau^2 T \left(\|Q_h(0)u^0 - u_0^h\|_V^2 + \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k^h\|_V^2 \right).$$

Обратим внимание на соотношение $z_k^h = z_k - [I - Q_h(t_k)]u(t_k)$. Тогда получим

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|z_k^h\|_V^2 \leq 2 \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k\|_V^2 + 2 \max_{0 \leq t \leq T} \|[I - Q_h(t)]u(t)\|_V^2.$$

Воспользуемся теперь оценкой

$$\|[I - Q_h(t)]v\|_V^2 \leq M_1 \delta^{-1} \|(I - Q_h)v\|_V^2, \quad v \in V,$$

а также оценкой, установленной в [2],

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N} \|z_k\|_V^2 \leq c \Big\{ & \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 \\ & + \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u'(t)\|^2 dt \\ & + \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} - u'(t) \right) dt \right\|^2 \Big\}. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \tau^3 \sum_{k=1}^m \|z_{k-1}^h\|_V^2 \leq c \tau^2 \Big\{ & \|Q_h(0)u^0 - u_0^h\|_V^2 + \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 \\ & + \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u'(t)\|^2 dt \\ & + \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} - u'(t) \right) dt \right\|^2 \Big\}. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Из (3.10) и (3.11) следует оценка

$$\begin{aligned} \|z_m\|^2 \leq c \Big\{ & \|z_0\|^2 + \left(\sum_{k=1}^N \|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\|^2 \tau \right)^{1/2} \max_{0 \leq t \leq T} \|[I - Q_h(t)]u(t)\| \\ & + \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} \right) dt \right\|_{V'}^2 + \tau^2 \left(\|Q_h(0)u^0 - u_0^h\|_V^2 \right. \\ & + \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 + \int_0^T \|[I - Q_h(t)]u'(t)\|^2 dt \\ & \left. + \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} - u'(t) \right) dt \right\|^2 \right) \Big\}. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Из (3.12), учитывая представление

$$\sum_{k=1}^N \|(z_k - z_{k-1})\tau^{-1}\|^2 \tau = \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|^2 \tau,$$

непрерывность вложения $H \subset V'$, ограниченность параметра τ и оценку

$$\|Q_h(0)u^0 - u_0^h\|_V^2 \leq 2\|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + 2 \max_{0 \leq t \leq T} \|[I - Q_h(t)]u(t)\|_V^2,$$

получим оценку (3.5).

Воспользуемся оценками выражения (2.13) из (3.3) и (3.4), которые подставим в оценку (3.5). Получим

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия гладкой разрешимости задачи (1.4), условие (2.2), и $u(t)$ – решение задачи (1.4) такое, что $u'' \in L_p(0, T; H)$ для $1 \leq p \leq 2$, т.е. выполняется оценка (2.3). Пусть, кроме того, операторы $B(t)$ удовлетворяют условию (2.6). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|^2 \leq M \Big\{ & \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + (\tau^4 + h^3) \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 \right. \\ & \left. + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right) + \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|^p dt \right)^{2/p} \Big\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Если же решение $u(t)$ такое, что $u''' \in L_p(0, T; H)$ для $1 \leq p \leq 2$, т.е. выполняется оценка (2.4), то справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|^2 \leq M \Big\{ & \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + (\tau^4 + h^3) \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 \right. \\ & \left. + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right) + \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \|u'''(t)\|^p dt \right)^{2/p} \Big\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения оценки (3.13) обратим внимание на очевидную оценку

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 \leq ch^2 \max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|_H^2, \quad (3.15)$$

а также воспользуемся оценкой, установленной в [2],

$$\frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} - u'(t) \right) dt \right\|^2 \leq \frac{\tau^{3-2/p}}{4} \left(\int_0^T \|u''(t)\|^p dt \right)^{2/p}. \quad (3.16)$$

Подставляя в правую часть (3.5) оценки (2.16), (2.17), (3.15), (3.16) и (3.3), получим

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|^2 \leq M \Big\{ & \|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + h^4 \|A(0)u^0\|^2 \\ & + \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|^p dt \right)^{2/p} + \left[\|Q_h u^0 - u_0^h\|_V + h \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\| \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right)^{1/2} \right) + \tau^{3/2-1/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|^p dt \right)^{1/p} \right] h^2 \max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\| \\ & \left. + \tau^2 \left[\|Q_h u^0 - u_0^h\|_V^2 + h^2 \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|^2 + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2 dt \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Оценка (3.13) получается теперь из (3.17) в результате простых преобразований.

Оценка (3.14) получается аналогично. Следует только вместо оценки (3.3) воспользоваться оценкой (3.4), а вместо оценки (3.16) применить оценку

$$\frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} - u'(t) \right) dt \right\|^2 \leq \frac{\tau^{5-2/p}}{64} \left(\int_0^T \|u'''(t)\|^p dt \right)^{2/p},$$

установленную также в [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Полученные выше результаты остаются верными, если равномерную сетку по времени заменить произвольной $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, удовлетворяющей условию $N \max \tau_k \leq C$, где $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ и $k = \overline{1, N}$. При этом в соответствующих оценках погрешности, например, (3.13) и (3.14), в правой части оценок под τ нужно понимать $\max \tau_k$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смагин В. В. Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода приближенного решения абстрактного параболического уравнения // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 6. С. 898–909.
- [2] Смагин В. В. Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений с модифицированной схемой Кранка–Николсон // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 6. С. 913–923.
- [3] Смагин В. В. Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 3. С. 143–160.
- [4] Смагин В. В. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 6. С. 908–919.
- [5] Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
- [6] Смагин В. В. Оценки погрешности полудискретных приближений по Галеркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана // Изв. вузов. Сер. матем. 1996. № 3 (406). С. 50–57.
- [7] Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
- [8] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [9] Смагин В. В. О разрешимости абстрактного параболического уравнения с оператором, область определения которого зависит от времени // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 5. С. 711–712.
- [10] Вайникко Г. М., Оя П. Э. О сходимости и скорости сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 7. С. 1269–1277.

Воронежский государственный университет
E-mail: root@svv.vsu.ru

Поступило
20.02.2004