Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Альбеверио, С. Ю. Доброхотов, М. А. Потеряхин,
О несамосопряженности операторов с малой диффузией,
Матем. заметки, 2005, том 78, выпуск 6, 941–942

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2663>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:12:46

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О НЕСАМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ С МАЛОЙ ДИФФУЗИЕЙ

С. Альбеверио, С. Ю. Доброхотов, М. А. Потеряхин

Предположим, что

(i) у гладкого векторного поля $V(x)$ в $\mathbb{R}^n$ существует инвариантный k -мерный тор

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = X(\varphi_1, \dots, \varphi_k)\}, \quad \varphi_j \in [0, 2\pi],$$

с условно-периодическим движением с частотами $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$, причем движение по этому тору асимптотически устойчиво.

В этом предположении в работах [1]–[4] были построены асимптотические собственные функции и собственные значения (λ_ν, u_ν) оператора с малой диффузией вида $\hat{L} = V(x)\nabla - \varepsilon\Delta$, $x \in \mathbb{R}^n$ (ν – номер λ_ν, u_ν , возможно, многомерный). Мы рассматриваем $\hat{L}$ как минимальный оператор в $\mathbb{R}^n$, т.е. как замыкание оператора, заданного соответствующим дифференциальным выражением на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Функции u_ν локализованы в окрестности инвариантного тора Λ и удовлетворяют соотношению

$$\hat{L}u_\nu = \lambda_\nu u_\nu + O(\varepsilon^{1/2}), \quad u_\nu \in L_2(\mathbb{R}^n), \quad (1)$$

где оценка $O(\varepsilon^{1/2})$ справедлива в любом весовом пространстве $L_{2,\rho}$ с ограниченным в норме C весом $\rho(x)$. Такие торы, таким образом, являются аттракторами векторного поля $V(x)$; в случае $k = 1$ имеем Λ -асимптотически устойчивый предельный цикл.

Некоторые из чисел λ_ν оказываются комплексными, например, среди них имеются числа вида

$$\frac{1}{(2\pi)k} \int_\Lambda \operatorname{div} V(X(\varphi)) d\varphi + i(\omega_1\nu_1 + \dots + \omega_k\nu_k),$$

где ν_j – целые числа. Вопрос о том, приближают ли построенные (формальные) асимптотические собственные функции и значения какие-либо точные собственные функции и значения оператора $\hat{L}$, оказывается весьма нетривиальным, и ответ на него неизвестен. Аналогичный вопрос неоднократно обсуждался в задачах квантовой и волновой механики, в которых операторы $\hat{L}$ самосопряженные (см., например, [5], [6]).

Хорошо известно следующее очень полезное, хотя и элементарное утверждение [5]. Пусть $\widehat{\mathcal{L}}$ – самосопряженный оператор в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и функция w с нормой $\|w\|_{\mathcal{H}} = 1$ и число λ удовлетворяют уравнению $\widehat{\mathcal{L}}w - \lambda w = f$, где невязка f также принадлежит $\mathcal{H}$. Тогда для расстояния между спектром оператора $\widehat{\mathcal{L}}$ и числом λ справедлива оценка

$$\rho(\operatorname{Spectrum} \widehat{\mathcal{L}}, \lambda) \leq \|f\|_{\mathcal{H}}. \quad (2)$$

Отсюда, в частности, следует, что асимптотические собственные числа действительно приближают некоторые точные собственные значения оператора в самосопряженном случае. Это, вообще

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00735, и проекта DFG-ПАН, грант № DFG 436 RUS 113/779.

говоря, не так для асимптотических собственных функций, поэтому их часто называют квазимодами.

В рассматриваемой ситуации для ответа на вопрос о существовании в окрестности чисел λ_ν точек из спектра оператора $\hat{L}$ пользоваться оценкой (2) нельзя, поскольку вообще не известно, является ли этот оператор в существенном самосопряженным (и даже симметричным) на своей области определения в некотором гильбертовом пространстве. Для некоторых векторных полей он может быть самосопряженным, а для некоторых нет. Например, если рассмотреть операторы $\hat{L}$ с векторными полями градиентного типа, т.е. полями вида $V = \nabla \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – неотрицательная функция, растущая на бесконечности, то оператор $\hat{L}$ будет симметричным, а при соответствующих предположениях на $\Phi(x)$ – в существенном самосопряженным в пространстве L_2 с весом $e^{-\Phi(x)/\varepsilon}$. В этом случае, как хорошо известно, замена $u = we^{-\Phi/2\varepsilon}$ переводит уравнение $\hat{L}u = \lambda u$ в уравнение Шрёдингера. Понятно, что тогда собственные значения оператора $\hat{L}$ вещественны.

Комплексность некоторых значений λ_ν , вытекающая из сделанных выше предположений на векторное поле $V(x)$, должна указывать на несамосопряженность оператора $\hat{L}$. С другой стороны, известно, что в некоторых случаях асимптотические собственные значения операторов с малой диффузией не приближают никакие значения его спектра. В этом случае говорят о так называемом псевдоспектре [7]. Цель этой заметки – показать, что наличие у оператора $\hat{L}$ комплексных асимптотических собственных значений (возможно, и не имеющих никакого отношения к спектру), тем не менее, позволяет сделать заключение о несамосопряженности этого оператора.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ имеется функция u , $\|u\|_{\mathcal{H}} = 1$, и комплексное число λ_ν , удовлетворяющие (1) с оценкой $O(\varepsilon^{1/2})$ в норме $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Тогда оператор $\hat{L}$ не является самосопряженным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что оператор $\hat{L}$ является самосопряженным. В силу самосопряженности оператора расстояние от построенного собственного значения λ до настоящего спектра будет $O(\varepsilon^{1/2})$. Так как $\lambda \in \mathbb{C}$, то это означает, что в настоящем спектре существует хотя бы одно комплексное значение. В свою очередь это противоречит хорошо известной теореме о вещественности спектров самосопряженных операторов. Следовательно, оператор $\hat{L}$ является несамосопряженным.

Применяя это утверждение в ситуации, когда векторное поле удовлетворяет приведенным в начале заметки условиям, получаем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Предположим, что векторное поле удовлетворяет условию (i). Тогда оператор $\hat{L}$ не является самосопряженным ни в каком гильбертовом пространстве, в котором справедливо (1), в частности, ни в каком весовом пространстве $L_{2,\rho}$ с ограниченным в норме $\mathbb{C}$ весом $\rho(x)$.

Авторы благодарят В. А. Гейлера за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dobrokhotov S. Yu., Kolokoltsov V. N., Martinez Olive V. // *Sobretiro de Soc. Mat. Mexicana*. 1994. V. 11. P. 81–89.
2. Доброхотов С. Ю., Колокольцов В. Н., Мартинес Оливэ В. // *Матем. заметки*. 1995. Т. 58. № 2. С. 301–306.
3. Albeverio S., Dobrokhotov S. Yu., Poteryakhin M. A. // *Asymptotic Analysis*. 2005. V. 43. № 3. P. 171–203.
4. Потеряхин М. А. // *Матем. заметки*. 2005. Т. 77. № 1. С. 152–156.
5. Маслов В. П., Федорюк М. В. *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*. М.: Наука, 1976.
6. Арнольд В. И. // *Функцион. анализ и примен.* 1972. Т. 6. № 2. С. 94–101.
7. Davies E. B. // *J. Operator Theory*. 2000. V. 43. P. 243–262.

(С. Альбеверио) Institute für Angewandte Mathematik der Universität Bonn
(С. Ю. Доброхотов, М. А. Потеряхин) Институт проблем механики РАН
E-mail: albeverio@uni-bonn.de, dobr@ipmmnet.ru, poter@ipmmnet.ru

Поступило
06.04.2005