Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, С. Ф. Буслаева, О теореме Пуанкаре о разностных уравнениях, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 6, 943–947

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:27:44

О ТЕОРЕМЕ ПУАНКАРЕ О РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ

В. И. Буслаев, С. Ф. Буслаева

В данной статье показывается, что функция, коэффициенты разложения которой в степенной ряд являются решением разностного уравнения с коэффициентами, стремящимися к пределу со скоростью геометрической прогрессии, допускает мероморфное продолжение за пределы круга сходимости.

К разностным уравнениям

$$f_{n+k} + \alpha_{n,1}f_{n+k-1} + \dots + \alpha_{n,k}f_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

связывающим между собой элементы числовой последовательности $\{f_n\}_{n=1-k}^{\infty}$ приводят многие задачи анализа и теории чисел. Так, например, хорошо известно, что элементы последовательностей числителей $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ и знаменателей $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ числовой непрерывной дроби

$$a_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}} \quad (2)$$

связаны между собой соотношениями

$$p_n = b_n p_{n-1} + a_n p_{n-2}, \quad q_n = b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

т.е. являются решениями одного и того же разностного уравнения

$$f_n = b_n f_{n-1} + a_n f_{n-2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

но с разными начальными условиями $p_{-1} = 1, p_0 = a_0$ и $q_{-1} = 0, q_0 = 1$.

Разностное уравнение (1) называется *уравнением с постоянными коэффициентами*, если $\alpha_{n,i} = \alpha_i$ при всех $n = 0, 1, \dots, i = 1, \dots, k$. Многочлен $z^k + \alpha_1 z^{k-1} + \dots + \alpha_k$ называется *характеристическим многочленом* разностного уравнения (1). Легко проверяется, что общее решение разностного уравнения (1) с постоянными коэффициентами записывается в виде

$$f_n = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{r_i} C_{i,j} \lambda_i^n n^{j-1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — корни характеристического многочлена кратностей соответственно $r_1, \dots, r_l$ ($\sum_{i=1}^l r_i = k$), $C_{i,j}$ — некоторые постоянные, однозначно определяемые по начальным условиям $f_0, \dots, f_{k-1}$ конкретного решения.

Из равенства (4) следует, что для всякого решения $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ разностного уравнения (1) с постоянными коэффициентами соответствующая ему функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

является рациональной функцией с возможными полюсами в точках $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_l^{-1}$. При этом, если корни характеристического многочлена различны по модулю, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-01027, программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”, программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-1551.2003.1, и фонда INTAS, грант № 03-51-6637.

и этот предел равен одному из корней характеристического многочлена.

Разностное уравнение (1) называется *уравнением с предельно постоянными коэффициентами*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,i} = \alpha_i.$$

Многочлен $z^k + \alpha_1 z^{k-1} + \dots + \alpha_k$ и в этом случае называется характеристическим многочленом разностного уравнения (1). Найти решения разностного уравнения (1) в случае предельно постоянных коэффициентов в явном виде не представляется возможным. Однако последнее из вышеприведенных утверждений имеет место и в этом значительно более сложном случае, что составляет содержание теоремы Пуанкаре [1] – одной из самых тонких теорем в теории линейных разностных уравнений.

ТЕОРЕМА (Пуанкаре). Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ является решением разностного уравнения (1) с предельно постоянными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого различны по модулю. Тогда либо $f_n = 0$ при всех $n \geq n_0$, либо существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

и этот предел равен одному из корней характеристического многочлена.

Простые примеры показывают, что условия теоремы Пуанкаре нельзя ослабить, не нарушив утверждающей части теоремы, а утверждающую часть нельзя усилить, не потребовав дополнительных предположений.

Имеется целый ряд результатов, в том или ином направлении уточняющих теорему Пуанкаре. Одно из важнейших уточнений было получено Перроном [2] для невырожденных разностных уравнений, т.е. для уравнений с дополнительным предположением $\alpha_{n,k} \neq 0$, $n = 0, 1, \dots$ (невырожденность уравнения (1) означает возможность его решения в “другую сторону”, т.е. возможность однозначного определения значения f_n при известных значениях $f_{n+1}, \dots, f_{n+k}$).

ТЕОРЕМА (Перрон). Пусть корни характеристического многочлена невырожденного разностного уравнения (1) с предельно постоянными коэффициентами различны по модулю. Тогда для всякого корня λ характеристического многочлена найдется решение $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ разностного уравнения (1) такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lambda.$$

Так как множество решений разностного уравнения (1) образует k -мерное векторное пространство, то из теоремы Перрона следует, что всякое решение $\{f_n\}_{n=1-k}^{\infty}$ разностного уравнения (1) может быть записано в виде $f_n = C_1 f_{n,1} + \dots + C_k f_{n,k}$, где $C_1, \dots, C_k$ – некоторые постоянные числа,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1,i}}{f_{n,i}} = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – корни характеристического многочлена. Если эти корни перенумеровать в порядке возрастания их модулей $|\lambda_1| < \dots < |\lambda_k|$, то, как легко видеть,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_{n,1}|^{1/n} = |\lambda_1|$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} \geq |\lambda_2| > |\lambda_1|$$

для всякого решения $\{f_n\}_{n=1-k}^{\infty}$, отличного от $\{C f_{n,1}\}_{n=1-k}^{\infty}$. Хорошо известно, что существование единственного (с точностью до постоянного множителя) решения минимального роста разностного уравнения (3) эквивалентно сходимости непрерывной дроби (2). Поэтому как простое следствие теоремы Перрона может быть получена одна из самых красивых теорем теории непрерывных дробей – теорема Ван Флека [3] о сходимости правильной C -дроби

$$a_0 + \frac{a_1 z}{1 + \frac{a_2 z}{1 + \dots}} \quad (5)$$

с предельно постоянными коэффициентами.

ТЕОРЕМА (Ван Флек). Пусть коэффициенты правильной C -дроби (5) имеют предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0.$$

Тогда C -дроби (5) сходятся к мероморфной функции равномерно на компактах, лежащих в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, где

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \frac{t}{4a}, \quad t \leq -1 \right\},$$

и не содержащих полюсов предельной функции.

Заметим, что множество Γ в теореме Ван Флека – это в точности множество тех $z \in \mathbb{C}$, при которых равны по модулю корни

$$\lambda_{1,2}(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4az}}{2}$$

характеристического многочлена разностного уравнения

$$f_n(z) = f_{n-1}(z) + a_n z f_{n-2}(z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

соответствующего непрерывной дроби (5).

Из других уточнений теоремы Пуанкаре отметим следующий результат одного из соавторов [4].

ТЕОРЕМА. Пусть элементы последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$f_n + \alpha_{n,1} f_{n-1} + \dots + \alpha_{n,n} f_0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

бесконечного порядка с коэффициентами $\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,n}$ такими, что многочлены $1 + \alpha_{n,1}z + \dots + \alpha_{n,n}z^n$ равномерно на компактах, лежащих в круге $\{|z| < R\}$, сходятся при $n \rightarrow \infty$ к функции $\alpha(z)$, все корни которой различны по модулю. Тогда либо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R},$$

либо существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}}$$

и этот предел равен одному из корней функции α .

В данной заметке теорема Пуанкаре уточняется на случай разностных уравнений с коэффициентами, сходящимися со скоростью геометрической прогрессии

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{n,i} - \alpha_i|^{1/n} \leq q < 1, \quad i = 1, \dots, k. \quad (6)$$

Этот случай занимает промежуточное место между общим случаем разностных уравнений с предельно постоянными коэффициентами и частным случаем постоянных коэффициентов. Если в случае постоянных коэффициентов функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,$$

как отмечалось, является рациональной функцией с возможными полюсами в точках $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_k^{-1}$, а в общем случае предельно постоянных коэффициентов можно утверждать только лишь, что радиус круга голоморфности функции f равен одному из чисел $|\lambda_1^{-1}|, \dots, |\lambda_k^{-1}|$, то в рассматриваемом промежуточном случае можно утверждать, что функция f допускает мероморфное продолжение за пределы ее круга голоморфности. Более точно, в данной заметке будет доказана следующая теорема.

и обозначим через $R_m(f)$ радиус максимального круга с центром в точке $z = 0$, в который функция f , голоморфная в круге $\{|z| < R_0(f)\}$, мероморфно продолжается и имеет не более m полюсов. Пусть $m \in \mathbb{Z}$ таково, что $R_{m-1}(f) < q^{-1}R_0(f)$. Тогда найдутся положительные числа ε и δ такие, что $R_{m-1}(f)^{-1}e^{-\delta} > (q + \varepsilon)R_0(f)^{-1}$. При этих ε и δ из неравенств (9) следуют равенства

$$|f_{n+\nu+k} + \alpha_1 f_{n+\nu+k-1} + \dots + \alpha_k f_{n+\nu}| = o(R_{m-1}(f)^{-n} e^{-\delta n}), \quad n \rightarrow \infty, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Полученные равенства справедливы при всех $\nu \in \mathbb{Z}$ и, в частности, при $\nu = 0, \dots, m-1$. В работе [4] показано, что из системы m равенств (10) (при $\nu = 0, \dots, m-1$) следует, что функция f имеет m особых точек (лежащих внутри или на границе круга $\{|z| < R_{m-1}(f)\}$), каждая из которых является корнем многочлена α . Поэтому $m \leq \deg \alpha = k$. Это означает, что при $m > k$ неравенство $R_{m-1}(f) < q^{-1}R_0(f)$ невозможно. В частности, это равенство невозможно при $m = k + 1$. Следовательно, $R_k(f) \geq q^{-1}R_0(f)$, т.е. функция f допускает мероморфное продолжение в круг $\{|z| < q^{-1}R_0(f)\}$.

Покажем теперь, что все полюсы функции f в круге $\{|z| < q^{-1}R_0(f)\}$ лежат среди корней многочлена α . Рассмотрим минимальное из чисел $l = 1, \dots, k$, для которых $R_l \geq q^{-1}R_0(f)$, а $R_{l-1}(f) < q^{-1}R_0(f)$. По уже доказанному функция f имеет l особых точек, лежащих внутри или на границе круга $\{|z| < R_{l-1}(f)\}$, каждая из которых является корнем многочлена α . Так как $R_{l-1}(f) < R_l(f)$, то каждая из этих особых точек является полюсом и других полюсов функция f в круге $\{|z| < R_l(f)\}$, содержащем круг $\{|z| < q^{-1}R_0(f)\}$, не имеет.

Кроме того, так как функция f имеет в круге $\{|z| < R_l(f)\}$ ровно l полюсов, лежащих среди нулей многочлена $z^k \alpha(1/z)$, то можно воспользоваться теоремой Монтеcssу де Болора [5] и получить как ее следствие утверждение 3) теоремы.

Отметим, что при помощи теоремы Гончара [6] неравенства (8) могут быть записаны в уточненном виде

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\lambda_{n,i} - \lambda_i|^{1/n} \leq \left| \frac{\lambda_i}{R_m(f)} \right| < 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

где $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,m}$ — корни многочлена $z^m + \beta_{n,1}z^{m-1} + \dots + \beta_{n,m}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincaré H. // Amer. J. Math. 1885. V. 7. P. 203–258.
2. Пеppон О. // J. Reine Angew. Math. 1909. V. 136. P. 17–37; 1910. V. 137. P. 6–64.
3. Van Vleck E. V. // Trans. Amer. Math. Soc. 1904. V. 5. P. 253–262.
4. Буслаев В. И. // Матем. сб. 1986. Т. 131 (173). № 3 (11). С. 357–384.
5. de Montessus de Ballore R. // Bull. Soc. Math. France. 1902. V. 30. P. 28–36.
6. Гончар А. А. // Матем. сб. 1981. Т. 115 (157). № 4. С. 590–613.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
07.04.2005