Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Я. Тудоровский, О влиянии спина на классическую и квантовую динамику электрона в тонких закрученных квантовых трубках, *Матем. заметки*, 2005, том 78, выпуск 6, 948–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2665>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 10:16:54

О ВЛИЯНИИ СПИНА НА КЛАССИЧЕСКУЮ И КВАНТОВУЮ ДИНАМИКУ ЭЛЕКТРОНА В ТОНКИХ ЗАКРУЧЕННЫХ КВАНТОВЫХ ТРУБКАХ

Т. Я. Тудоровский

1. Введение. Прогресс в нанотехнологии позволил создавать тонкие длинные квазиодномерные структуры сложной геометрии – нанотрубки. Нанотрубка в рассматриваемой модели представляет собой область типа тонкого изогнутого цилиндра. Вне этой границы волновая функция квантовой частицы экспоненциально быстро убывает (модель “мягких стенок”) вследствие наличия потенциала конфайнмента v_{int} , быстро возрастающего при удалении от оси. Мы ограничимся рассмотрением квантовой частицы (электрона) в трубках с медленно меняющимися вдоль оси характеристиками, помещенными в постоянное однородное слабое магнитное поле. Ясно, что эффективная динамика электрона в такой трубке должна быть одномерной.

Обозначим через d характерный диаметр трубки, а через L ее длину. То обстоятельство, что трубка тонкая, означает, что параметр $\mu = d/L \ll 1$. Мы считаем, что квантовые состояния в нанотрубке описываются матричным гамильтонианом [1]–[3] (так называемый гамильтониан Рашба), который в безразмерных переменных имеет вид

$$\widehat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(-i\mu\nabla - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + v_{\text{int}} - \frac{\mu}{2}\langle\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}\rangle + \mu\alpha\langle\boldsymbol{\sigma}, [\nabla v_{\text{int}}, -i\mu\nabla - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]\rangle,$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (1/2)[\mathbf{r}, \mathbf{H}]$, $\mathbf{H}$ – магнитное поле, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ – стандартные матрицы Паули. Жирными буквами обозначены векторы и векторные операторы с компонентами в декартовой системе координат. Постоянная α зависит от типа рассматриваемого кристалла [2]. Мы будем считать, что $\alpha \lesssim 1$.

Определим воображаемую ось трубки как гладкую кривую $\mathbf{r} = \mathbf{R}(x)$, где x – натуральный параметр. В окрестности оси введем криволинейные координаты (x, y_1, y_2) по формуле

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(x) + \mu\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{n}_1(x) + y_2\mathbf{n}_2(x),$$

где y_1, y_2 – декартовы координаты и $\mathbf{n}_1(x), \mathbf{n}_2(x)$ – векторы ортонормированного базиса в нормальном сечении оси в точке x . Используемые координаты и гамильтониан $\widehat{\mathcal{H}}$ в них описаны в [1]. Потенциал конфайнмента выберем в виде

$$v_{\text{int}}(x, y) = \frac{1}{2}\Omega(x)^2(y_1^2 + y_2^2).$$

В работах [1], [4], [5] с помощью “обобщенного” адиабатического принципа (“операторного разделения переменных”) проведена редукция размерности в квантовых проводах переменной толщины. Редукция заключается в переходе для нижних подзон размерного квантования (с номерами $\nu \ll \mu^{-1}$) от гамильтониана $\widehat{\mathcal{H}}$ и функции $\Psi^\nu(x, y, t, \mu)$ в $\mathbb{R}^3$ к эффективному пространственно одномерному гамильтониану $\widehat{L}^\nu$ и функции $\psi^\nu(x, t, \mu)$ на оси трубки; при этом Ψ^ν и ψ^ν связаны соотношением

$$\Psi^\nu(x, y, t, \mu) = G(x, y)^{-1/4}(\chi_0^\nu(x, y, t) + \mu\widehat{\chi}_1^\nu) \exp\left(i \int_{x^*}^x \frac{\langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{A}(\mathbf{R}) \rangle dx}{\mu}\right) \psi^\nu(x, t, \mu).$$

Здесь $G(x, y) = (1 - \mu k(x)\langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle)^2$, $k(x) = |\partial_x^2 \mathbf{R}(x)|$ – кривизна оси, $\mathbf{n} = \partial_x^2 \mathbf{R}(x)/|\partial_x^2 \mathbf{R}(x)|$ – вектор нормали к оси трубки в точке x , $\partial_x = \partial/\partial x$, $\chi_0^\nu, \chi_1^\nu - (2(\nu+1) \times 2)$ -матрицы, $\psi^\nu(x, t, \mu) - (2(\nu+1))$ -мерный вектор [5],

$$\chi_0^\nu = \exp(i\langle \mathbf{y}, \mathbf{A}(\mathbf{R}) \rangle) \left\| \begin{pmatrix} w_1^\nu(x, y) & 0 & \dots & w_{\nu+1}^\nu(x, y) & 0 \\ 0 & w_1^\nu(x, y) & \dots & 0 & w_{\nu+1}^\nu(x, y) \end{pmatrix} \right\|, \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00968А, и проекта DFG-PAH, грант № DFG 436 RUS 113/785.

где “мгновенные поперечные” функции w_j^ν , $j = 1, \dots, \nu + 1$, суть собственные функции задачи

$$\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) + v_{\text{int}}(x, y) \right] w_j^\nu = \varepsilon_\perp^\nu(x) w_j^\nu, \quad \varepsilon_\perp^\nu(x) = \Omega(x)(\nu + 1).$$

Выберем

$$w_j^\nu = e^{il\varphi} u^{|l|k}(r), \quad l = 0, \pm 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $y_1 = r \cos \varphi$, $y_2 = r \sin \varphi$. Для построения главного члена асимптотики важен лишь факт существования $\hat{\chi}_1^\nu$.

Функция $\psi^\nu(x, t, \mu)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера с $(2(\nu + 1) \times 2(\nu + 1))$ -матричным гамильтонианом $\hat{L}^\nu$, который в базисе $\{w_j^\nu\}$ имеет вид блочно-диагональной матрицы с (2×2) -блоками $\hat{L}^{\nu l}$, отвечающими проекции момента на ось трубки, равной l :

$$\hat{L}^{\nu l} = -\frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Omega(x)(\nu + 1) - \frac{\mu^2 k(x)^2}{8} - \frac{\mu}{2} \langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{H} \rangle l - \frac{\mu}{2} \langle \sigma, \mathbf{a}^l(x) \rangle. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{a}^l(x) = \mathbf{H} - 2\alpha l \Omega(x)^2 \partial_x \mathbf{R}$ [1]. Тем самым, вектор $\psi^\nu(x, t, \mu)$ составлен из двухкомпонентных вектор-функций $\psi^{\nu l}(x, t, \mu)$, заданных гамильтонианами $\hat{L}^{\nu l}$ (2). Мы изучим некоторые точные и асимптотические решения стационарных и эволюционных задач, порожденных оператором $\hat{L}^{\nu l}$.

2. Явно решаемая модель для спиральной трубки. Рассмотрим трубку с осью

$$\mathbf{R}(x) = \left(\rho_1 \sin \frac{x}{\rho}, -\rho_1 \cos \frac{x}{\rho}, \frac{\rho_2 x}{\rho} \right), \quad \rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}.$$

Для нее $k(x) = \rho_1/\rho^2 = \text{const}$, кручение оси $\varkappa(x) = \rho_2/\rho^2 = \text{const}$. Следующее утверждение принадлежит В. В. Белову, С. В. Николаеву, С. О. Синицыну.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть выполнено условие

i) сечение трубки постоянно $\Omega(x) = \Omega = \text{const}$ и магнитное поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$.

Тогда гамильтониан (2) унитарно эквивалентен оператору с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} U^{-1} \hat{L}^{\nu l} U &= -\frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\mu^2}{2\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &+ \Omega(\nu + 1) - \frac{\mu \rho_2 H l}{2\rho} + \frac{\mu^2 \rho_2^2}{8\rho^4} - \frac{\mu}{2} H \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \mu \alpha l \Omega^2 \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & -\rho_2 \end{pmatrix}, \quad (3) \\ U(x) &= \begin{pmatrix} e^{-ix/(2\rho)} & 0 \\ 0 & e^{ix/(2\rho)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. В предположении i) спектр оператора $\hat{L}^{\nu l}$ (2) в бесконечной спиральной трубке непрерывен и имеет вид

$$E^{\nu l}(q) = \frac{q^2}{2} + \Omega(\nu + 1) - \frac{\mu \rho_2 H l}{2\rho} + \frac{\mu^2 \rho_2^2}{8\rho^4} - \sigma_{\uparrow\downarrow} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \sqrt{\left(\frac{q + H\rho}{2} - \alpha l \Omega^2 \rho_2 \right)^2 + (\alpha l \Omega^2 \rho_1)^2},$$

где $\sigma_{\uparrow\downarrow} = \pm 1$.

Пусть волновая функция $\Psi^\nu(x, y, \mu)$ периодически повторяется через каждые N витков. Условие периодичности для функции Ψ^ν приводит к блоховскому условию для функции $\psi^{\nu l}$ с квазиимпульсом $I/(2\pi\rho N)$, $I = -I_{AB} + I_B^l$, где

$$I_{AB} = \int_0^{2\pi\rho N} \frac{\langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{A}(\mathbf{R}) \rangle dx}{\mu} = \frac{N\Phi}{\mu}, \quad I_B^l = l \int_0^{2\pi\rho N} \varkappa dx.$$

Таким образом, условие периодичности Ψ^ν имеет вид

$$N \left(\frac{2\pi\rho q^{ln}}{\mu} - \pi - 2\pi\rho \varkappa l + \frac{\Phi}{\mu} \right) = 2\pi n.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Спектр оператора $\hat{L}^{\nu l}$ с указанными боловскими условиями дискретен: $E^{\nu l n} = E^{\nu l}(q^{ln})$, где $q^{ln} = (\mu/\rho)(n/N + l\rho_2/\rho + 1/2) - \Phi/(2\pi\rho)$, $\Phi = \pi\rho_1^2 H$ – поток магнитного поля через площадь проекции спирали.

Слагаемое I_{AB} есть проявление так называемого эффекта Ааронова–Бома, а I_B^l – фазы Берри. Отметим, что $I_B = 0$ при $l = 0$. Из [1] следует, что в случае невырожденного терма $I_B = 0$ для произвольного сечения трубки. При $\rho_2 = 0$ $E^{\nu l n}$ определяют спектр замкнутой торической трубки.

3. Динамика спина в коротковолновом режиме. Рассмотрим трубку переменной толщины с $\Omega(x) \neq \text{const}$ и нестационарное уравнение $i\mu\psi_t^{\nu l} = \hat{L}^{\nu l}\psi^{\nu l}$. Исследуем эволюцию волновых пакетов $\psi^{\nu l}(x, t, \mu)$ с условием $\psi^{\nu l}(x, 0, \mu) = \exp(iS_0^\nu(x)/\mu)A_0^{\nu l}(x)$, где $A^{\nu l}$ – двумерный вектор (“коротковолновый режим”; см. [1]). В этом случае функции $\psi^{\nu l}$ имеют квазиклассический вид и восстанавливаются по

1) траекториям $X(x_0, t)$ уравнения Ньютона

$$\ddot{x} = -\Omega'(x)(\nu + 1), \quad x|_{t=0} = X(x_0, t), \quad \dot{x}|_{t=0} = \frac{\partial S_0^\nu}{\partial x}(x_0);$$

2) решениям $A^{\nu l}(x_0, t)$ уравнения для спинора $A^{\nu l}$:

$$\frac{dA^{\nu l}}{dt} - \frac{i}{2}\langle \sigma, \mathbf{a}^l(x(t)) \rangle A^{\nu l} = 0, \quad A^{\nu l}|_{t=0} = A_0^{\nu l}(x_0). \quad (4)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Предположим, что при $t < t^*$

$$J^{\nu l}(x_0, t) = \left| \frac{\partial X}{\partial x_0} \right| \neq 0.$$

Тогда при $t < t^*$

$$\psi^{\nu l}(x, t, \mu) = e^{iS^\nu(X_0(x, t), t)/\mu + i\vartheta(X_0(x, t))} [A^{\nu l}(X_0(x, t), t) (J^{\nu l}(X_0(x, t), t))^{-1/2} + O(\mu)],$$

где

$$S^\nu(x_0, t) = S_0^\nu(x_0) + \int_0^t \left[\frac{1}{2} \dot{X}(x_0, t)^2 - \Omega(X(x_0, t))(\nu + 1) \right] dt,$$

$$\vartheta(x_0, t) = \frac{l}{2} \int_0^t \langle \partial_x \mathbf{R}(X(x_0, t)), \mathbf{H} \rangle dt,$$

$X_0(x, t)$ – решение уравнения $X(t, x_0) = x$ относительно x_0 . При $t > t^*$ (после появления фокальных точек) асимптотика определяется с помощью канонического оператора Маслова [6]. Фокальные точки появляются, например, в местах сужения трубки и вблизи ее конца.

4. Спектральные асимптотики в коротковолновом режиме. Пусть в трубке переменной толщины функции Ψ^ν удовлетворяют условию периодичности через каждый виток спирали и частота $\Omega(x)$ с тем же периодом имеет на витке единственную точку минимума x_0 . Тогда существуют два типа асимптотических собственных функций [7]. Функции, отвечающие энергиям $E^{\nu l n} < \max \varepsilon_\perp^\nu(x)$, локализованы в классически доступной области; функции, отвечающие $E^{\nu l n} > \max \varepsilon_\perp^\nu(x)$, делокализованы и описывают “баллистические” состояния.

Локализованные состояния. Локализованные состояния можно разделить на

- 1) низколежащие, соответствующие осцилляторному приближению (приближению Борна–Опенгеймера для исходной трехмерной задачи), и
- 2) возбужденные, соответствующие быстроосциллирующим ВКБ-решениям.

1) Спектр низколежащих состояний имеет вид

$$E^{\nu nl} = \Omega(x_0)(\nu + 1) + \mu \sqrt{\Omega''(x_0)(\nu + 1)} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\mu \rho_1}{2\rho} H_2 \sin\left(\frac{x_0}{\rho}\right) l - \frac{\mu \rho_2}{2\rho} H_3 l + \mu \sigma_{\uparrow\downarrow} |\mathbf{H} - 2\alpha l \Omega(x_0)^2 \partial_x \mathbf{R}(x_0)| + O(\mu^2).$$

Здесь $\sigma_{\uparrow\downarrow} = \pm 1$ отвечают направлению спина по или против вектора $\mathbf{H} - 2\alpha l \Omega(x_0)^2 \partial_x \mathbf{R}(x_0)$.

2) Спектр возбужденных локализованных состояний имеет вид

$$E_s^{\nu ln} = E_0^{\nu n} - \mu \omega_H^{\nu ln} - \mu \omega_s^{\nu ln} + O(\mu^2),$$

где $E_0^{\nu n}$ находится из условия квантования Бора–Зоммерфельда

$$\frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2(E_0^{\nu n} - \Omega(x)(\nu + 1))} dx = \mu \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

x_1, x_2 такие, что $x_1 < x_2$, суть решения уравнения $E_0^{\nu n} - \Omega(x)(\nu + 1) = 0$,

$$\omega_H^{\nu nl} = l(2T)^{-1} \int_0^t \langle \partial_x \mathbf{R}(X(x_0, t)), \mathbf{H} \rangle dt = \frac{l}{T} \int_{x_1}^{x_2} \langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{H} \rangle [2(E_0^{\nu n} - \Omega(x)(\nu + 1))]^{-1/2} dx,$$

$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} [2(E_0^{\nu n} - \Omega(x)(\nu + 1))]^{-1/2} dx$ – период замкнутой траектории на уровне энергии $E_0^{\nu n}$, $\omega_s^{\nu nl}$ – показатели Флоке матрицы монодромии системы (4). В силу того, что матрица $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}^l(x(t)) \rangle$ в уравнении (4) самосопряженная, показатели Флоке вещественны. Мы считаем, что они суть $\exp(i\omega_s^{\nu nl} T)$, $-\pi/T < \omega_s^{\nu nl} \leq \pi/T$.

Отметим, что для локализованных состояний

$$I_{AB} = \oint \frac{\langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{A}(\mathbf{R}) \rangle dx}{\mu} = 0, \quad I_B^l = l \oint \kappa(x) dx = 0.$$

Баллистические состояния.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Спектр баллистических состояний имеет вид

$$E = E_0^{\nu n} - \mu \omega_H^{\nu nl} - \mu \omega_s^{\nu nl} + \mu \omega_B^l + O(\mu^2),$$

где $E_0^{\nu n}$ определяется условием квантования Бора–Зоммерфельда

$$\int_0^{2\pi\rho N} \sqrt{2(E_0^{\nu n} - \Omega(x)(\nu + 1))} dx = 2\pi\mu n - I_{AB},$$

где

$$\omega_H^{\nu nl} = \frac{l}{T} \int_0^{2\pi\rho N} \langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{H} \rangle [2(E_0^{\nu n} - \Omega(x)(\nu + 1))]^{-1/2} dx, \\ T = \int_0^{2\pi\rho N} [2(E_0^{\nu n} - \Omega(x)(\nu + 1))]^{-1/2} dx,$$

$\omega_s^{\nu nl}$ – показатели Флоке системы (4), $\omega_B^l = I_B^l/T$.

ЗАМЕЧАНИЕ (спин-орбитальное расщепление и теория возмущений). Пусть $\mathbf{H} = 0$, $\alpha \ll 1$. Тогда поправка $\omega_s^{\nu n l}$ может быть посчитана с помощью теории возмущений [2]. Действительно, матрица монодромии уравнения (4)

$$\mathcal{M} = E + 2\alpha l \int_0^T \Omega(X(x_0, t))^2 \langle \sigma, \partial_x \mathbf{R}(X(x_0, t)) \rangle dt + O(\alpha^2),$$

ее показатели Флоке $\text{mod } O(\alpha^2)$ суть собственные числа матрицы

$$\begin{aligned} & 2\alpha l T^{-1} \int_0^T \Omega(X(x_0, t))^2 \langle \sigma, \partial_x \mathbf{R}(X(x_0, t)) \rangle dt \\ &= 2\alpha l T^{-1} \int_0^{2\pi\rho N} \Omega(x) \langle \sigma, \partial_x \mathbf{R}(x) \rangle [2(E_0^{\nu n} - \Omega(x)(\nu + 1))]^{-1/2} dx. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что теория возмущений работает только при $\alpha \ll 1$.

5. Влияние спина на классическую динамику слабовозбужденных состояний.

При произвольном направлении $\mathbf{H}$ спин может существенно влиять на классическую динамику слабовозбужденных состояний. Действительно, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $|\mathbf{a}^l(x)| \neq 0$ (термы не пересекаются) и $\Omega(x) = \Omega = \text{const}$. Тогда система уравнений $i\mu\psi_t^{\nu l} = \widehat{L}^{\nu l}\psi^{\nu l}$ имеет быстроосциллирующие ВКБ-решения, которые восстанавливаются по траекториям двух классических систем [1]

$$\ddot{x} = -\nabla v_{\uparrow\downarrow}^l,$$

где

$$v_{\uparrow\downarrow}^l = -\frac{1}{2}\langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{H} \rangle l - \frac{\sigma_{\uparrow\downarrow}}{2} |\mathbf{a}^l(x)|, \quad \mathbf{a}^l(x) = \sqrt{|\mathbf{H}|^2 + (2\alpha l \Omega^2)^2 - 2\alpha l \Omega^2 \langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{H} \rangle}.$$

Экстремумы $v_{\uparrow\downarrow}^l$ находятся из условия

$$(|\mathbf{a}^l(x)| - \sigma_{\uparrow\downarrow} \alpha \Omega^2) \partial_x \left(-\frac{1}{2} \langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{H} \rangle l \right) = 0.$$

Точкам минимума $v_{\uparrow\downarrow}^l$ соответствуют “ловушки”. Для направления $\sigma_{\downarrow}$ минимумы и максимумы потенциала $v_{\uparrow\downarrow}^l$ соответствуют минимумам и максимумам $-(1/2)\langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{H} \rangle l$, т.е. фазовый портрет спиновой частицы качественно совпадает с фазовым портретом аналогичной бесспиновой. Для направления $\sigma_{\uparrow}$ аналогичная картина имеет место при условии $\alpha \Omega^2 < |\mathbf{a}^l(x^*)|$, где x^* соответствует точкам минимума и максимума $-(1/2)\langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{H} \rangle l$.

Для направления $\sigma_{\downarrow}$ максимум потенциала повышается на величину $(1/2)|\mathbf{a}^l(x^*)|$ по сравнению с бесспиновой частицей, а для $\sigma_{\uparrow}$ понижается на ту же величину. Отсюда следует любопытная возможность *сепарировать спиновые частицы* с заданной проекцией момента l : в диапазоне энергий

$$\Omega(\nu + 1) - \frac{\mu}{2} \langle \partial_x \mathbf{R}(x^*), \mathbf{H} \rangle l - \frac{\mu}{2} |\mathbf{a}^l(x^*)| < E < \Omega(\nu + 1) - \frac{\mu}{2} \langle \partial_x \mathbf{R}(x^*), \mathbf{H} \rangle l + \frac{\mu}{2} |\mathbf{a}^l(x^*)|$$

частица с направлением спина $\sigma_{\uparrow}$ будет проходить через трубку, в то время как частица с направлением спина $\sigma_{\downarrow}$ будет отражаться от нее.

В случае, когда $\alpha \Omega^2 > |\mathbf{a}^l(x^*)|$, для направления $\sigma_{\uparrow}$ в центре “магнитной” ловушки (точке минимума $-(1/2)\langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{H} \rangle l$) возникает барьер – ловушка распадается на две; в точках максимума $-(1/2)\langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{H} \rangle l$ появляются дополнительные точки минимума.

6. Переворот спина (спин-флип). Рассмотрим случай $\mathbf{H} = 2\alpha l \Omega^2 \partial_x \mathbf{R}(x^*)$. Тогда x^* есть точка минимума $-(1/2)\langle \partial_x \mathbf{R}, \mathbf{H} \rangle l$, а $|\mathbf{a}^l(x^*)| = 0$. В этом случае в точках x^* имеет место пересечение термов, которому соответствует “переворот” спина. В качестве примера возьмем ось в виде дуги окружности $\mathbf{R}(x) = \rho(\cos(x/\rho), \sin(x/\rho), 0)$ и поле $\mathbf{H} = 2\alpha l \Omega^2(-1, 0, 0)$. В этом случае потенциал имеет вид

$$v_{\uparrow\downarrow}^l = -\alpha l^2 \Omega^2 \sin \frac{x}{\rho} - \sigma_{\uparrow\downarrow} \alpha |l| \Omega^2 \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2\rho} \right) \right|.$$

Тогда $x^* = \pi\rho/2$, и справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Главный член ВКБ-решения задачи Коши определяется уравнениями*

$$\ddot{x} = -(v_{\pm}^l)',$$

где

$$v_{\pm}^l = -\alpha l^2 \Omega^2 \sin \frac{x}{\rho} \mp \alpha |l| \Omega^2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2\rho} \right) \neq v_{\uparrow\downarrow}^l$$

(см. [8]).

Автор благодарит за дискуссии и ценные замечания В.В. Белова, В.А. Гейлера, С.Ю. Доброхотова, К.В. Панкрашкина и Л.А. Чернозатонского.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов В. В., Доброхотов С. Ю., Тудоровский Т. Я. // ТМФ. 2004. Т. 141. С. 267–303.
2. Магарилл Л. И., Энтин М. В. // ЖЭТФ. 2003. Т. 123. № 4. С. 867–876.
3. Entin M. V., Magarill L. I. // Phys. Rev. B. 2002. V. 66. P. 205308-1.
4. Белов В. В., Доброхотов С. Ю., Синицын С. О., Тудоровский Т. Я. // Докл. РАН. 2003. Т. 393. С. 460–464.
5. Belov V. V., Dobrokhoto S. Yu., Tudorovskii T. Ya. // Russ. J. Math. Phys. 2004. V. 11. P. 109–119.
6. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
7. Brüning J., Dobrokhoto S. Yu., Pan-krashkin K. V. // Russ. J. Math. Phys. 2002. V. 9. № 1. P. 14–49.
8. Кучеренко В. В. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38. № 3. С. 625–662.

Институт проблем механики РАН
E-mail: timtudor@mail.ru

Поступило
09.02.2005