Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Фазовые переходы в вероятностной игре, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 4, 637–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2668>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:51:08

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ВЕРОЯТНОСТНОЙ ИГРЕ

В. П. Маслов

В предыдущей работе [1] было показано, как чисто вероятностные задачи можно перевести на язык квантовой механики: введением оператора Гамильтона $\hat{H}$ в гильбертовом пространстве l_2 (в конечномерном случае), и что частотную вероятность уровня энергии ε_n оператора Гамильтона $\hat{H}$ можно интерпретировать как его кратность $k(\varepsilon_n)$. Автором было введено понятие оператора свободной энергии $\hat{F}$ как оператора с собственными значениями $(\varepsilon_n - \theta \ln k(\varepsilon_n))$ и теми же собственными функциями [2, с. 65, формулы 5, 6]. Рассматривается модель кристалла с условиями Борна–Кармана с M ячейками, между которыми потенциальные барьеры велики и расстояние между энергиями одной зоны (собственные функции симметричны) столь малы, что ими можно пренебречь. Тогда кратность каждого собственного значения умножается на M . Рассматриваются (как обычно) две зоны ε_1 и ε_2 (двухуровневая модель) со следующим парным взаимодействием. Любые два бозона, находящиеся на верхнем уровне, отдают квант энергии, обратно пропорциональный числу частиц N . При некоторых условиях на разность $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ и потенциал V имеется одно метастабильное состояние, интерпретируемое как сверхтекучее [3]. Можно показать, что для собственных значений оператора свободной энергии, отвечающих этому метастабильному состоянию, зависящих от θ , при некотором θ происходит фазовый переход второго рода с критическим значением $1/2$. Эту задачу мы переформулируем здесь как некоторую вероятностную игру.

Рассмотрим следующую игру. Одновременно кидают N одинаковых костей, каждая кость имеет $M \gg 1$ граней, грани с номером i соответствует число λ_i , $\lambda_i < \lambda_{i+1}$. Выигрыш (доход) вычисляется следующим образом. Обозначим через n_i число костей, у которых выпала грань с номером i . Очевидно, что $\sum_{i=1}^M n_i = N$. Пусть $G_1, G_2 > 0$ – целые числа такие, что $G_1 + G_2 = M$, $\lambda_i < 0$ при $i \leq G_1$, $\lambda_j > 0$ при $j > G_1$. Введем для броска одной кости осредненный проигрыш

$$\omega_1 = \frac{1}{G_1} \sum_{i=1}^{G_1} \lambda_i \quad (1)$$

и выигрыш

$$\omega_2 = \frac{1}{G_2} \sum_{i=1}^{G_2} \lambda_{G_1+i}; \quad (2)$$

тогда выигрыш для броска N костей задается формулой

$$\mathcal{E} = \omega_1 N_1 + \omega_2 N_2, \quad (3)$$

где N_1, N_2 выражаются следующим образом:

$$N_1 = \sum_{i=1}^{G_1} n_i, \quad N_2 = \sum_{i=1}^{G_2} n_{i+G_1}. \quad (4)$$

Очевидно, что $N_1 + N_2 = N$. Будем считать, что кости являются неразличимыми. В таком случае число возможных вариантов бросания N костей с выигрышем $\mathcal{E} = \omega_1 N_1 + \omega_2 N_2$ равно

$$\Gamma(N_1, N_2) = \sum_{K_1=0}^N \cdots \sum_{K_M=0}^N \delta_{L_1 N_1} \delta_{L_2 N_2}, \quad (5)$$

где δ_{LN} – символ Кронекера, а L_1, L_2 зависят от $K_1, \dots, K_M$ следующим образом:

$$L_1 = \sum_{i=1}^{G_1} K_i, \quad L_2 = \sum_{i=1}^{G_2} K_{i+G_1}.$$

Легко убедиться, что (5) может быть записано в виде

$$\Gamma(N_1, N_2) = \frac{(N_1 + G_1 - 1)!}{N_1! (G_1 - 1)!} \cdot \frac{(N_2 + G_2 - 1)!}{N_2! (G_2 - 1)!}. \quad (6)$$

Введем энтропию, отвечающую выигрышу $\mathcal{E} = \omega_1 N_1 + \omega_2 N_2$, следующим образом:

$$S(N_1, N_2) = \ln(\Gamma(N_1, N_2)). \quad (7)$$

Кроме того, будем считать, что в игре взимается налог на выигрыш. А именно, у каждой пары выигравших костей – таких костей, у которых выпала грань с номером $i > G_1$ – отнимается сумма V/N . Поскольку таких пар всего $N_2(N_2 - 1)/2$ штук, окончательный выигрыш (доход) в игре составит

$$\mathcal{E}(N_1, N_2) = \omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 - \frac{V N_2(N_2 - 1)}{2N}. \quad (8)$$

Рассмотрим случай $N \gg 1$ в описанной игре. Обозначим $G_1/N = g_1$, $G_2/N = g_2$. Легко убедиться, что в этом случае

$$\frac{\mathcal{E}(N_1, N_2)}{N} \simeq \mathcal{E}(n) = \omega_1 + \omega \cdot n - \frac{V n^2}{2}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{S(N_1, N_2)}{N} \simeq S(n) &= (n + g_2) \ln \left(1 + \frac{n}{g_2} \right) - n \ln \left(\frac{n}{g_2} \right) \\ &+ (1 - n + g_1) \ln \left(1 + \frac{1 - n}{g_1} \right) - (1 - n) \ln \left(\frac{1 - n}{g_1} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $n = N_2/N$, $\omega = \omega_2 - \omega_1 > 0$. Рассмотрим задачу о нахождении экстремальных значений выигрыша (9) при фиксированной энтропии (10). Такая задача решается с помощью метода Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} f(n, \theta) &= \omega_1 + \omega n - \frac{V n^2}{2} + \theta \left(n \ln \left(\frac{n}{g_2} \right) - (g_2 + n) \ln \left(1 + \frac{n}{g_2} \right) \right. \\ &\left. + (1 - n) \ln \left(\frac{1 - n}{g_1} \right) - (g_1 + 1 - n) \ln \left(1 + \frac{1 - n}{g_1} \right) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где θ – множитель Лагранжа, который будем называть *волатильностью*, $n \in [0, 1]$. Далее будем считать, что задана волатильность, а энтропию будем выражать через нее. По определению имеем $\omega > 0$. Будем также считать далее, что

$$V > \omega, \quad \theta > 0. \quad (12)$$

Рассмотрим задачу о нахождении минимума функции (11) при фиксированных ω , V , g_1 , g_2 .

Поскольку $\theta > 0$ и $f(n, \theta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией переменной n , экстремальное значение $f(n, \theta)$ достигается при $n = n_0(\theta, V, \omega, g_1, g_2) \in (0, 1)$, где $n_0(\theta, V, \omega, g_1, g_2)$ удовлетворяет уравнению

$$0 = \frac{\partial f}{\partial n}(n_0, \theta) = \omega - V n_0 + \theta \ln \left(\frac{n_0}{g_2 + n_0} \cdot \frac{g_1 + 1 - n_0}{1 - n_0} \right). \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет, по крайней мере, одно решение, так как

$$\frac{\partial f}{\partial n} \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow 1, \quad \frac{\partial f}{\partial n} \rightarrow -\infty \text{ при } n \rightarrow 0.$$

Кроме того, в силу

$$\frac{\partial^4 f}{\partial n^4}(n_0, \theta) = 2\theta \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(g_2 + n)^3} + \frac{1}{(1 - n)^3} - \frac{1}{(g_1 + 1 - n)^3} \right) > 0 \quad (14)$$

уравнение (13) не может иметь более трех решений.

Если выполнены условия (12), то легко показать, что при фиксированных параметрах ω, V, g_1, g_2 уравнение (13) имеет три решения при малых значениях волатильности θ и одно решение при больших значениях волатильности. Асимптотика решений при $\theta \rightarrow 0$ есть

$$\begin{aligned} n_1 &\sim \frac{g_2}{1+g_1} \exp\left(-\frac{\omega}{\theta}\right), \quad n_2 - 1 \sim -\frac{g_1}{1+g_2} \exp\left(-\frac{V-\omega}{\theta}\right), \\ n_3 - \frac{\omega}{V} &\sim \frac{\theta}{V} \ln\left(\frac{\omega/V}{g_2 + \omega/V} \cdot \frac{g_1 + 1 - \omega/V}{1 - \omega/V}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

При $\theta \rightarrow \infty$ асимптотика единственного решения уравнения (13) есть

$$n_0 - \frac{g_2}{g_1 + g_2} \sim \frac{1}{\theta} \left(V \frac{g_2}{g_1 + g_2} - \omega \right) \frac{g_1 g_2 (1 + g_1 + g_2)}{(g_1 + g_2)^3}. \quad (16)$$

Таким образом, видим, что при фиксированных значениях параметров V, ω, g_1, g_2 в игре возможен фазовый переход при изменении волатильности θ . Далее будут исследованы фазовые переходы, вызванные изменением налога. Вообще, в зависимости от значений $\theta, V, \omega, g_1, g_2$ уравнение (13) может иметь три решения (в таком случае функция (11) имеет локальный и глобальный минимумы и максимум на интервале $n \in (0, 1)$) или меньшее число решений (тогда функция (11) имеет один глобальный минимум на интервале $n \in (0, 1)$). Значения параметров $\theta, V, \omega, g_1, g_2$, при которых уравнение (13) имеет два решения, являются критическими; при приближении к этим значениям со стороны, где существуют три решения, два решения – локальный минимум и максимум функции (11) – приближаются друг к другу и превращаются в одно при достижении критических значений параметров, а при дальнейшем изменении параметров исчезают. Критические значения параметров, при которых происходит описанная бифуркация решений уравнения (13), определяются из уравнения

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}(n_0, \theta) = -V + \theta \left(\frac{1}{n_0} - \frac{1}{g_2 + n_0} + \frac{1}{1 - n_0} - \frac{1}{g_1 + 1 - n_0} \right), \quad (17)$$

где n_0 удовлетворяет уравнению (13). Покажем, что при приближении к критическим значениям производные энтропии, отвечающей решениям, испытывающим бифуркацию, стремятся к бесконечности.

Пусть параметры θ, ω, g_1, g_2 заданы. Рассмотрим фазовый переход, происходящий при изменении налога V . Пусть $n_0 = n_0(\theta, \omega, g_1, g_2)$, $V = V_0(\theta, \omega, g_1, g_2)$ удовлетворяют уравнениям (13), (17). В таком случае легко получить, что асимптотика решений уравнения (13), испытывающих бифуркацию, при стремлении налога V к критическому значению V_0 имеет вид

$$n_0 - n_0(\theta, \omega, g_1, g_2) \simeq \pm \sqrt{-\frac{2 \frac{\partial^2 f}{\partial V \partial n}(n_0, \theta)(V - V_0)}{\frac{\partial^3 f}{\partial n^3}(n_0, \theta)}}. \quad (18)$$

Энтропия, отвечающая решениям уравнения (13), есть

$$S = -\frac{\partial f}{\partial \theta}(n_0, \theta). \quad (19)$$

Ее производная по параметру V

$$\frac{\partial S}{\partial V} = -\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial V}(n_0, \theta) - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial n}(n_0, \theta) \cdot \frac{\partial n_0}{\partial V} = \ln\left(\frac{g_2 + n_0}{n_0} \cdot \frac{1 - n_0}{g_1 + 1 - n_0}\right) \cdot \frac{\partial n_0}{\partial V}. \quad (20)$$

В силу (18) очевидно, что при приближении налога V к критическому значению $V_0(\theta, \omega, g_1, g_2)$ выражение (19) растет как $1/\sqrt{|V - V_0|}$, т.е. имеет место фазовый переход с критическим индексом $1/2$.

Заметим, что если параметры θ, ω, g_1, g_2 фиксированы, то при изменении налога V могут происходить также фазовые переходы первого рода. Такие фазовые переходы возможны, когда уравнение (13) имеет три решения. В таком случае функция (11) имеет локальный и глобальный минимумы. Рассмотрим $n_1(\theta, \omega, V, g_1, g_2)$ и $n_2(\theta, \omega, V, g_1, g_2)$, непрерывно зависящие от V и непрерывно дифференцируемые по V , решения уравнения (13). Критическое значение налога V_0 определяется из уравнения

$$f(n_1, \theta) = f(n_2, \theta). \quad (21)$$

Если при $V < V_0$ точками глобального и локального минимумов функции (11) являлись соответственно $n_1(\theta, \omega, V, g_1, g_2)$ и $n_2(\theta, \omega, V, g_1, g_2)$, то после превышения налогом критического значения, при $V > V_0$, абсолютный минимум функции (11) достигается при $n = n_2(\theta, V, \omega, g_1, g_2)$, а локальный – при $n = n_1(\theta, V, \omega, g_1, g_2)$. Таким образом, очевидно, что при фиксированной волатильности и увеличении налога минимальный возможный выигрыш (9) в рассматриваемой игре и соответствующая ему энтропия (10) могут измениться скачком, что можно интерпретировать как финансовую катастрофу (дефолт).

В конце заметим, что при малых значениях налога, когда условие (12) $V > \omega$ не выполнено, фазовые переходы при изменении волатильности или налога невозможны. Это следует из вида функции (11) и ее производных первого (13) и более высоких порядков. Например, легко видеть, что в таком случае при малых значениях волатильности существует только одно решение уравнения (13), а определяемые формулами (15) n_2 и n_3 уже не являются асимптотиками каких-либо решений уравнений (13). Из формул (11), (13) следует, что если налог увеличить, то произойдет фазовый переход (кризис, дефолт, взрыв).

Автор благодарит Г. Ковалю за помощь.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 6. С. 883–891.
2. Maslov V. P. // Russ. J. Math. Phys. 2001. V. 8. № 1. P. 55–82.
3. Боголюбов Н. Н. Избранные труды. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1970.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: viktor_maslov@hotmail.com

Поступило
21.02.2003