Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Амосов, А. Д. Баранов, О дилатации сжимающих
коциклов и коциклических возмущениях группы сдвигов
на прямой, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 1, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2669>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 04:06:42

УДК 517.98

О ДИЛАТАЦИИ СЖИМАЮЩИХ КОЦИКЛОВ И КОЦИКЛИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ГРУППЫ СДВИГОВ НА ПРЯМОЙ

Г. Г. Амосов, А. Д. Баранов

Введен класс сжимающих коциклов, для которых существуют дилатации до унитарных марковских коциклов группы сдвигов на прямой S . Исследован класс коциклических возмущений S унитарными марковскими коциклами W со свойством $W_t - I \in \mathcal{S}_2$ (класс Гильберта–Шмидта). Полученные результаты применяются к задаче о возмущении колмогоровских потоков на гиперфинитных факторах, порожденных алгеброй канонических антикоммутиационных соотношений.

Библиография: 24 названия.

1. Введение. Пусть $U = (U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ есть C_0 -группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве H . Формула $x \rightarrow U_t x U_{-t}$, $x \in B(H)$, $t \in \mathbb{R}$, определяет естественное действие группы U на алгебре всех ограниченных операторов $B(H)$ в гильбертовом пространстве H . Заметим, что семейство $\alpha_t(\cdot) = U_t \cdot U_{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, образует группу автоморфизмов алгебры $B(H)$. Сильно непрерывное семейство сжимающих операторов $L = (L_t)_{t \geq 0}$ называется (*сжимающим*) *коциклом* группы U , если выполнено условие

$$L_{t+s} = L_t \alpha_t(L_s), \quad s, t \geq 0. \quad (1)$$

Условие (1) в точности означает, что семейство $T_t = L_t U_t$, $t \geq 0$, образует C_0 -полугруппу сжатий T , которую мы будем называть *коциклическим возмущением* группы U . В том случае, когда коцикл L состоит из унитарных операторов, он единственным образом доопределяется для отрицательных значений параметра t по формуле $L_{-t} = \alpha_t(L_t^*)$, $t \geq 0$. Получившееся семейство будет удовлетворять условию (1) для всех значений параметров $t, s \in \mathbb{R}$. В этом случае, коциклическое возмущение T продолжается до группы унитарных операторов. Заметим, что если $U_t = \text{Id}$, $t \in \mathbb{R}$, то сжимающий коцикл L образует C_0 -полугруппу, т.е. $L_{t+s} = L_t L_s$, $t, s \geq 0$.

Унитарный коцикл W группы унитарных операторов $\tilde{S}$ в гильбертовом пространстве $\tilde{H} = K \oplus H$ называется *дилатацией* сжимающего коцикла L группы U в гильбертовом пространстве K , если

$$L_t = P_K W_t|_K, \quad t \geq 0,$$

где P_K есть ортогональный проектор в $\tilde{H}$ на подпространство K , а $\tilde{S} = U \oplus S$ для некоторой группы унитарных операторов S в гильбертовом пространстве H . Дилатация

Работа выполнена при частичной поддержке программы "Ведущие научные школы", грант № НШ-2266.2003.1.

называется *минимальной*, если замыкание линейной оболочки множества $\{W_t\eta, \eta \in K, t \geq 0\}$ совпадает с $\tilde{H}$.

Пусть S есть группа сдвигов в гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$, определенная формулой $(S_t\eta)(x) = \eta(x - t)$, $\eta \in H$. Монотонно возрастающее при возрастании t семейство подпространств $H_t \subset H$, состоящих из функций с носителем на луче $[-t, +\infty)$, образует естественную фильтрацию пространства H . Унитарный коцикл W группы сдвигов S называется *марковским* [1]–[4], если $W_t|_{H_0^\perp} = \text{Id}$, $t \geq 0$. Пусть группа унитарных операторов U действует в гильбертовом пространстве K . Мы будем говорить, что коцикл W группы $\tilde{S} = U \oplus S$, действующий в гильбертовом пространстве $\tilde{H} = K \oplus H$, марковский, если $W_t|_{(K \oplus H_0)^\perp} = \text{Id}$, $t \geq 0$. С точки зрения квантовой теории открытых систем пространство K имеет смысл системы (одночастичной) с шумовым окружением H . Термин “марковский коцикл” традиционно используется для коциклов в пространстве Фока $\Gamma(\tilde{H}) \approx \Gamma(K) \otimes \Gamma(H)$, согласованных с естественной фильтрацией пространства H . Теория таких коциклов широко используется в квантовом стохастическом исчислении (см. [5]–[8]). Мы называем “марковскими” коциклы в одночастичном пространстве $K \oplus H$, вторичное квантование которых приводит к марковским коциклам в смысле общепринятого определения.

В работе [9] рассматривалась задача о дилатации сжимающих коциклов до изометрических для случая коциклов полугрупп эндоморфизмов. Это явилось некоторым стимулом для изучения нами дилатаций коциклов в первой части нашей работы.

Во второй части работы мы рассматриваем задачу о построении коциклов W , удовлетворяющих условию $W_t - I \in \mathcal{S}_2$. Такая задача естественным образом появляется при исследовании коциклических возмущений на гиперфинитных факторах фон Неймана, поскольку указанное условие должно выполняться для того, чтобы можно было корректно определить вторичное квантование коциклов W (см. [10]). Заметим, что (см. [11]) вторичное квантование группы сдвигов приводит к колмогоровским потокам на гиперфинитных факторах фон Неймана, канонически связанным с потоками сдвигов Пауэрса [12]. Исследования коциклических возмущений потоков сдвигов Пауэрса инициированы в [13] и проводятся, в последнее время, очень интенсивно (см. [14], [15]).

Предлагаемая работа построена следующим образом. В разделе 2 мы показываем, в каком смысле единственна минимальная дилатация коцикла. Далее, мы вводим модель марковского коцикла группы сдвигов и, с ее помощью, доказываем существование дилатации для случая, когда коциклическое возмущение является группой “усеченных сдвигов”. В разделе 3 мы рассматриваем возмущения группы сдвигов на прямой унитарными марковскими коциклами W и формулируем утверждение, позволяющее описать широкий класс возмущений коциклами, удовлетворяющими дополнительному условию $W_t - I \in \mathcal{S}_2$. Доказательство этого утверждения существенно опирается на теорему о триангуляции полугруппы усеченных сдвигов, доказательство которой приведено в разделе 4. Раздел 5 посвящен доказательству утверждения, сформулированного в третьей части. Наконец, в разделе 6 мы демонстрируем некоторые приложения полученных нами результатов к изучению коциклических возмущений колмогоровских потоков гиперфинитных факторов, порожденных алгеброй канонических антикоммутирующих соотношений (КАС). В приложении приведены основные сведения об алгебре КАС. Мы предполагаем, что полученные нами результаты имеют приложения не только для квазисвободных эволюций алгебры КАС, но и для других гиперфинитных алгебр фон Неймана, например, для алгебр, порожденных представлениями алгебры квадрата квантового белого шума (см. [16]).

2. Модель унитарного марковского коцикла группы сдвигов. Существование и единственность дилатации. Следующие два утверждения дают представление о степени единственности дилатации сжимающего коцикла.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что W и W' есть две минимальные дилатации сжимающего коцикла L группы U до унитарных коциклов групп $\tilde{S} = U \oplus S$ и $\tilde{S}' = U \oplus S'$ соответственно, причем*

$$W_t \eta = W'_t \eta, \quad \eta \in K, \quad t \geq 0.$$

Тогда коциклические возмущения групп $\tilde{S}$ и $\tilde{S}'$ коциклами W и W' совпадают, так что $W_t \tilde{S}_t = W'_t \tilde{S}'_t$, $t \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из условия $W_t \eta = W'_t \eta$, $\eta \in K$, следует

$$W_t \tilde{S}_t \eta = W'_t \tilde{S}_t \eta = W'_t \tilde{S}'_t \eta, \quad \eta \in K, \quad (2)$$

поскольку подпространство K приводит группы $\tilde{S}$ и $\tilde{S}'$, причем $\tilde{S}|_K = \tilde{S}'|_K = U$. Из условия коцикла следует, что семейства операторов $V_t^{(1)} = W_t \tilde{S}_t$ и $V_t^{(2)} = W'_t \tilde{S}'_t$, $t \in \mathbb{R}$, образуют группы унитарных операторов в $\tilde{H}$. В силу (2) мы получаем

$$\begin{aligned} V_t^{(1)} W_s \eta &= V_t^{(1)} W_s \tilde{S}_s \tilde{S}_{-s} \eta = V_t^{(1)} V_s^{(1)} \tilde{S}_{-s} \eta \\ &= V_{t+s}^{(1)} \tilde{S}'_{-s} \eta = V_{t+s}^{(2)} \tilde{S}'_{-s} \eta = V_t^{(2)} W'_s \eta. \end{aligned} \quad (3)$$

Мы использовали здесь свойство $\tilde{S}_{-s} \eta = U_{-t} \eta = \tilde{S}'_{-s} \eta \in K$. В силу минимальности дилатации из равенства (3) следует, что $V_t^{(1)} = V_t^{(2)} \equiv V_t$, $t \geq 0$.

СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что W и W' есть две минимальные дилатации сжимающего коцикла L группы U до унитарных коциклов одной и той же группы $\tilde{S} = U \oplus S$, причем*

$$W_t \eta = W'_t \eta, \quad \eta \in K, \quad t \geq 0.$$

Тогда

$$W_t = W'_t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1 $W_t \tilde{S}_t = W'_t \tilde{S}_t \equiv V_t$, $t \in \mathbb{R}$, откуда $W'_t = V_t \tilde{S}_{-t} = W_t$, $t \in \mathbb{R}$.

Займемся теперь исследованием существования дилатации. Подпространство $H_0 = L^2(\mathbb{R}_+)$ инвариантно относительно операторов сдвига S_t при $t \geq 0$. Следовательно, семейство операторов $S_t|_{H_0}$, $t \geq 0$, образует полугруппу изометрических операторов, называемую полугруппой сдвигов. Мы будем обозначать операторы, принадлежащие этой полугруппе, тем же символом, что операторы группы сдвигов в H . Согласно классической теореме Лакса (см. [17, лекция XI]) подпространство $E \subset H_0$ инвариантно относительно полугруппы сдвигов, $S_t E \subset E$, $t \geq 0$, тогда и только тогда, когда найдется внутренняя в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функция Θ (т.е. аналитическая и ограниченная в $\mathbb{C}_+$ функция, граничные значения которой равны по модулю единице почти везде на $\mathbb{R}$) такая, что

$$E = M_\Theta H_0, \quad M_\Theta = \mathcal{F}^{-1} \Theta \mathcal{F},$$

где $\mathcal{F}$ и Θ есть преобразование Фурье и оператор умножения на функцию Θ соответственно. Согласно теореме Пэли–Винера $\mathcal{F}H_0 = H^2(\mathbb{C}_+)$, где $H^2(\mathbb{C}_+) = H^2$ есть пространство Харди функций, аналитических в верхней полуплоскости и таких, что

$$\|\eta\|^2 = \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |\eta(x + iy)|^2 dx < \infty.$$

(Следует отметить, что мы отождествляем функции из класса Харди H^2 и их некасательные граничные значения на $\mathbb{R}$.) При этом, $\mathcal{F}(H_0 \ominus E) = K_\Theta$, где $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$ есть так называемое модельное подпространство. Модельные подпространства играют исключительно важную роль в модели Секефальви–Надя–Фойаша для операторов сжатия [17], [18].

Заметим, что оператор M_Θ изометрически отображает пространство H_0 на пространство E . Следовательно, полугруппы S и $S|_E$ унитарно эквивалентны, поскольку $M_\Theta S_t = S_t|_E M_\Theta$, $t \geq 0$. В работах [2]–[4] была введена модель, описывающая все марковские коциклы группы S в пространстве H с точностью до унитарной эквивалентности. Пусть U есть группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве $K = H_0 \ominus M_\Theta H_0$. Пара (U, Θ) определяет марковский унитарный коцикл W^* группы S по формуле

$$\begin{aligned} W_t^* &= (U_t P_K + S_t P_E) S_{-t} P_{[t, +\infty)} + M_\Theta P_{[0, t]} + P_{H_0^\perp}, \\ W_{-t}^* &= S_{-t} W_t S_t, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $P_{\mathcal{L}}$, $P_{[0, t]}$ и $P_{[t, +\infty)}$ обозначают ортогональные проекторы на подпространства $\mathcal{L}$ и подпространства функций с носителями на $[0, t]$ и $[t, +\infty)$ соответственно.

Формула (4) описывает все марковские коциклы с точностью до унитарной эквивалентности. Рассмотрим группу унитарных операторов $\tilde{S} = \{\tilde{S}_t = W_t^* S_t, t \in \mathbb{R}\}$. Заметим, что сужение группы $\tilde{S}$ на H_0 имеет вид $\tilde{S}_t = U_t \oplus S_t|_E$, $t \geq 0$. Как было указано выше, полугруппа $S|_E$ унитарно эквивалентна полугруппе сдвигов $S|_{H_0}$. Следовательно, группа $\tilde{S}$ в пространстве H унитарно эквивалентна группе $U \oplus S$ в пространстве $K \oplus H$. Поскольку по условию $\tilde{S}_t = W_t^* S_t$, $t \in \mathbb{R}$, мы получаем $S_t = W_t \tilde{S}_t$, и семейство унитарных операторов W является марковским коциклом группы $\tilde{S}$. Рассмотрим C_0 -полугруппу сжатий $T = \{T_t = P_K S_t|_K, t \geq 0\}$ в пространстве K . Полугруппа T определяет коцикл группы U по формуле $L_t = T_t U_{-t}$, $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Для коцикла $L = \{T_t U_{-t}, t \geq 0\}$, построенного по полугруппе “усеченных сдвигов” $T = \{T_t = P_K S_t|_K, t \geq 0\}$ и группе унитарных операторов U , существует марковский унитарный коцикл $W = \{W_t, t \in \mathbb{R}\}$ группы $\tilde{S} = U \oplus S$, являющийся минимальной дилатацией коцикла L , так что*

$$L_t = P_K W_t|_K, \quad t \geq 0.$$

Явный вид дилатации дается формулой (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим действие группы U на ортогональном дополнении к K как тождественное и рассмотрим семейство унитарных операторов $A_t = W_t U_t$, $t \geq 0$. Согласно формуле (4) получаем

$$A_t = S_t P_K + S_t P_E S_{-t} U_t + P_{[0, t]} M_\Theta^* U_t + P_{H_0^\perp}, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Из равенства (5) следует, что

$$A_t|_K = S_t|_K + P_{[0,t]}M_\Theta^*U_t|_K.$$

Покажем, что $P_{[0,t]}M_\Theta^*U_t|_K = 0$. Действительно, если $\eta \in K$, то $\mathcal{F}\eta = f \in K_\Theta$, а $M_\Theta^*\eta = \mathcal{F}^{-1}\bar{\Theta}f$. Хорошо известно (и немедленно вытекает из определения модельного пространства K_Θ), что $\bar{\Theta}f \in K_\Theta$ для всякой функции $f \in K_\Theta$. Следовательно, $\bar{\Theta}f \in H_-^2 = (H^2)^\perp$ и $\mathcal{F}^{-1}\bar{\Theta}f \in H_0^\perp$. Поэтому $P_{[0,t]}\mathcal{F}^{-1}\bar{\Theta}f = 0$.

Итак, мы показали, что $A_t|_K = S_t|_K$. Следовательно,

$$T_t = P_K W_t U_t|_K, \quad t \geq 0,$$

откуда немедленно следует доказываемое утверждение.

3. Коциклические возмущения группы сдвигов на прямой. Рассмотрим коциклические возмущения $\tilde{S}_t = W_t S_t$, $t \in \mathbb{R}$, группы сдвигов S унитарными марковскими коциклами W . Из представления (4) следует, что сужение каждого такого возмущения $\tilde{S}$ на подпространство H_0 имеет вид $\tilde{S}_t = U_t \oplus S_t|_E$, $t \geq 0$, где E есть некоторое инвариантное подпространство полугруппы сдвигов в H_0 , а U – группа унитарных операторов в пространстве $K = E^\perp$. Ниже мы исследуем, какими свойствами должна обладать группа U , чтобы группа $\tilde{S}$ являлась коциклическим возмущением группы S коциклом W со свойством $W_t - I \in \mathcal{S}_2$ при $t \in \mathbb{R}$, где $\mathcal{S}_2$ обозначает класс Гильберта–Шмидта.

Для любой группы U унитарных операторов в гильбертовом пространстве K найдется такое не более чем счетное семейство конечных мер μ_n на $\mathbb{R}$, $1 \leq n \leq N \leq +\infty$, $\mu_n(\mathbb{R}) < +\infty$, что группа U будет унитарно эквивалентна группе унитарных операторов $\tilde{U}$ в пространстве $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mu_n)$, действующей по формуле

$$\tilde{U}_t \left(\bigoplus_{n=1}^N \eta_n \right) = \bigoplus_{n=1}^N U_t^{(n)} \eta_n, \quad (6)$$

где группа унитарных операторов $U_t^{(n)}$ действует в пространстве $L^2(\mu_n)$ так, что $(U_t^{(n)}\eta)(x) = e^{itx}\eta(x)$. Представление (6) называется *спектральным*.

В статьях [3], [19] было показано, что в том случае, когда группа U циклическая, а мера μ , участвующая в спектральном представлении, сингулярна относительно меры Лебега, группа $\tilde{S}$ есть коциклическое возмущение группы S коциклом W со свойством $W_t - I \in \mathcal{S}_2$ (соответствующий результат был доказан в статье [3] для атомических мер и в [19] для непрерывных сингулярных мер). Здесь мы распространим этот результат на случай счетной прямой суммы циклических групп.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что меры μ_n , участвующие в спектральном представлении группы U , сингулярны относительно меры Лебега. Тогда группа $\tilde{S} = U \oplus S$ является коциклическим возмущением группы, унитарно эквивалентной группе S , коциклом W со свойством $W_t - I \in \mathcal{S}_2$, $t \in \mathbb{R}$.*

Перед тем как доказывать теорему 3, нам потребуется развить некоторую технику, которой посвящен следующий раздел.

4. Теорема о триангуляции усеченного сдвига. Существенную роль в доказательстве теоремы 3 играет теорема П. Р. Ахерна и Д. Н. Кларка о триангуляции оператора усеченного сдвига (см. [21], а также [17, лекция V]). Как в статье [21], так и в [17] рассматриваются модельные подпространства для однократного сдвига в единичном круге. Нам же понадобится вариант теоремы о триангуляции для модельных подпространств полугруппы сдвигов в полуплоскости. Заметим, что операторы, составляющие полугруппу сдвигов, имеют бесконечную кратность, и классическую теорему о триангуляции нельзя применить автоматически. По этой причине нам необходимо привести полное доказательство соответствующих утверждений.

Мы начнем со случая непрерывной сингулярной меры. Пусть μ – непрерывная сингулярная мера на вещественной прямой $\mathbb{R}$ (т.е. $\mu(\{t\}) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$) и $\mu(\mathbb{R}) < \infty$. Рассмотрим полугруппу унитарных операторов $U = (U_t)_{t \geq 0}$, действующих в пространстве $L^2(\mu)$ по формуле

$$(U_t f)(x) = e^{itx} f(x), \quad f \in L^2(\mu).$$

Определим сингулярную внутреннюю функцию φ как

$$\varphi(z) = \exp\left(i \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t - z}\right), \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (7)$$

и пусть $K = H_0 \ominus M_\varphi H_0$. Отметим одно важное свойство внутренней функции φ , определенной формулой (7): как показано в [20], $\varphi - 1 \in H^2$ и $\|\varphi - 1\|_2^2 = 2\mu(\mathbb{R})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Полугруппа U унитарно эквивалентна некоторой полугруппе $V = (V_t)_{t \geq 0}$, действующей в пространстве K и такой, что $V_t = P_K S_t|_K + R_t$, $t \geq 0$, где $R_t \in \mathcal{S}_2$. При этом, $\|R_t\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C\mu(\mathbb{R})$, где C – некоторая константа, зависящая только от t .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование Фурье унитарно отображает пространство H_0 на пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{C}_+)$, а подпространство K на модельное подпространство K_φ . Отметим также, что $\mathcal{F} S_t \mathcal{F}^{-1} = E_t$, где полугруппа $(E_t)_{t \geq 0}$ действует в H^2 по формуле

$$(E_t f)(x) = e^{itx} f(x).$$

Таким образом, утверждение теоремы эквивалентно следующему утверждению.

Полугруппа $U = (U_t)_{t \geq 0}$ унитарно эквивалентна некоторой полугруппе $V = (V_t)_{t \geq 0}$, действующей в пространстве K_φ и такой, что $V_t = P_\varphi E_t|_{K_\varphi} + R_t$, $t \geq 0$, где P_φ – проектор в H^2 на модельное пространство K_φ , $R_t \in \mathcal{S}_2$ и $\|R_t\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C\mu(\mathbb{R})$.

Рассмотрим оператор, унитарно отображающий пространство $L^2(\mu)$ на модельное пространство K_φ . Для случая пространств на единичной окружности подобная конструкция приведена в [21] (см. также [17, лекция V]). Применяя конформное отображение круга на полуплоскость, мы получим аналогичный результат для пространств на прямой и в полуплоскости.

Для $s \in \mathbb{R}$ обозначим через μ_s сужение меры μ на $(-\infty, s]$. Рассмотрим семейство сингулярных внутренних функций

$$\varphi_s(z) = \exp\left(i \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_s(t)}{t - z}\right), \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Тогда оператор $\mathcal{V}$, определенный в пространстве $L^2(\mu)$ формулой

$$(\mathcal{V}f)(z) = \sqrt{2}i \int_{\mathbb{R}} f(s) \varphi_s(z) \frac{d\mu(s)}{z-s}, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

осуществляет унитарное отображение пространства $L^2(\mu)$ на K_φ .

Мы имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}U_t f)(z) &= \sqrt{2}i \int_{\mathbb{R}} e^{its} f(s) \varphi_s(z) \frac{d\mu(s)}{z-s} \\ &= \sqrt{2}i e^{itz} \int_{\mathbb{R}} f(s) \varphi_s(z) \frac{d\mu(s)}{z-s} - \sqrt{2}i \int_{\mathbb{R}} f(s) \varphi_s(z) \frac{e^{itz} - e^{its}}{z-s} d\mu(s) \\ &= (E_t \mathcal{V}f)(z) + (J_t f)(z), \quad z \in \mathbb{C}_+. \end{aligned} \quad (8)$$

Покажем, что оператор J_t , действующий из $L^2(\mu)$ в H^2 , принадлежит классу Гильберта–Шмидта и $\|J_t\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C\mu(\mathbb{R})$. Рассмотрим семейство операторов $J_t^\varepsilon: L^2(\mu) \rightarrow H^2$, $\varepsilon > 0$, определенных как

$$(J_t^\varepsilon f)(x) = (J_t f)(x + i\varepsilon) = -\sqrt{2}i \int_{\mathbb{R}} f(s) \varphi_s(x + i\varepsilon) \frac{e^{it(x+i\varepsilon)} - e^{its}}{x + i\varepsilon - s} d\mu(s), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $\|g(\cdot + i\varepsilon)\|_{H^2} \rightarrow \|g\|_{H^2}$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ для всякой функции $g \in H^2$, то $J_t^\varepsilon \rightarrow J_t$ в сильной операторной топологии. Покажем, что $J_t^\varepsilon \in \mathcal{S}_2$. Учитывая, что $|\varphi_s(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}_+$, $s \in \mathbb{R}$, получаем

$$\|J_t^\varepsilon\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{it(x+i\varepsilon)} - e^{its}}{x + i\varepsilon - s} \right|^2 d\mu(s) dx \leq C(t)\mu(\mathbb{R}),$$

так как

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{it(x+i\varepsilon)} - e^{its}}{x + i\varepsilon - s} \right|^2 dx \leq C(t),$$

где константа $C(t)$ не зависит ни от s , ни от $\varepsilon > 0$. Таким образом, для фиксированного $t \geq 0$ нормы Гильберта–Шмидта операторов J_t^ε , $\varepsilon > 0$, равномерно ограничены. Переходя к сильному операторному пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем, что $J_t \in \mathcal{S}_2$ и $\|J_t\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C(t)\mu(\mathbb{R})$.

Применяя к равенству (8) проектор P_φ и оператор $\mathcal{V}^*$, получаем

$$U_t = \mathcal{V}^* P_\varphi E_t \mathcal{V} + \mathcal{V}^* P_\varphi J_t,$$

что завершает доказательство предложения 4.

Теперь рассмотрим случай атомической меры μ . Пусть

$$\mu = \sum_{n=1}^N y_n \delta_{x_n},$$

где δ_x обозначает меру Дирака (единичную нагрузку) в точке x , а $1 \leq N \leq \infty$. Мы считаем, что $\mu(\mathbb{R}) < \infty$, т.е. $\sum_n y_n < \infty$.

Положим $z_n = x_n + iy_n$ и рассмотрим произведение Бляшке

$$B(z) = \prod_{n=1}^N \frac{z - z_n}{z - \bar{z}_n}, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (9)$$

Условие $\sum_n y_n < \infty$ гарантирует сходимость произведения (9). Более того, как показано в [20], произведение Бляшке B обладает следующим важным свойством: $B - 1 \in H^2$ и $\|B - 1\|_2^2 = 4\pi \sum_n y_n = 4\pi\mu(\mathbb{R})$.

Будем отождествлять пространство $L^2(\mu)$ с пространством последовательностей $(f_n)_{n=1}^N$ таких, что $\sum_n |f_n|^2 y_n < \infty$. Если полугруппа $U = (U_t)_{t \geq 0}$ действует в $L^2(\mu)$ по формуле $(U_t f)(x) = e^{itx} f(x)$, то $U_t((f_n)_{n=1}^N) = (e^{itx_n} f_n)_{n=1}^N$. Пусть теперь $K = H_0 \ominus M_B H_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Полугруппа U унитарно эквивалентна некоторой полугруппе $V = (V_t)_{t \geq 0}$, действующей в пространстве K и такой, что $V_t = P_K S_t|_K + R_t$, $t \geq 0$, где $R_t \in \mathcal{S}_2$. При этом, $\|R_t\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C\mu(\mathbb{R})$, где константа C зависит только от t .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно рассуждениям, приведенным в начале доказательства предложения 4, нам достаточно показать, что полугруппа $U = (U_t)_{t \geq 0}$ унитарно эквивалентна некоторой полугруппе $V = (V_t)_{t \geq 0}$, действующей в модельном пространстве $K_B = H^2 \ominus BH^2$ и такой, что

$$V_t = P_B E_t|_{K_B} + R_t, \quad t \geq 0,$$

где P_B – проектор в H^2 на подпространство K_B , $R_t \in \mathcal{S}_2$ и $\|R_t\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C\mu(\mathbb{R})$.

В случае атомической меры μ построение оператора $\mathcal{V}$, унитарно отображающего $L^2(\mu)$ на K_B , оказывается значительно проще, чем в случае непрерывной сингулярной меры. Рассмотрим функции

$$g_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\prod_{m=1}^{n-1} \frac{z - z_m}{z - \bar{z}_m} \right) \frac{\sqrt{y_n}}{z - \bar{z}_n}.$$

Хорошо известно (см. [17, лекция V]), что функции g_n образуют ортонормированный базис в K_B (базис Мальмквиста–Уолша). Для $f = (f_n) \in L^2(\mu)$ положим

$$\mathcal{V}f = \sum_{n=1}^N \sqrt{y_n} f_n g_n.$$

Очевидно, оператор $\mathcal{V}$ унитарно отображает $L^2(\mu)$ на K_B . Далее, имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}U_t f)(z) &= \sum_{n=1}^N \sqrt{y_n} f_n e^{itx_n} g_n(z) \\ &= \sum_{n=1}^N \sqrt{y_n} f_n e^{itz} g_n(z) + \sum_{n=1}^N \sqrt{y_n} f_n (e^{itx_n} - e^{itz}) g_n(z) \\ &= (E_t \mathcal{V}f)(z) + (J_t f)(z), \quad z \in \mathbb{C}_+. \end{aligned}$$

Покажем, что $J_t \in \mathcal{S}_2$ и $\|J_t\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C\mu(\mathbb{R})$. Прежде всего, заметим, что

$$\|e^{itx_n} - e^{itx}\|_2^2 = \frac{y_n}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{itx_n} - e^{itx}}{x - x_n + iy_n} \right|^2 dx \leq C(t)y_n.$$

Рассмотрим действие оператора J_t на ортонормированном базисе $f^{(n)}$ пространства $L^2(\mu)$, где $f_k^{(n)} = 0$, $k \neq n$, и $f_n^{(n)} = (\sqrt{y_n})^{-1}$. Тогда

$$\|J_t\|_{\mathcal{S}_2}^2 = \sum_n \|J_t f^{(n)}\|_2^2 = \sum_n \|(e^{itx_n} - e^{itz})\sqrt{y_n}g_n\|_2^2 \leq C \sum_n y_n.$$

Таким образом, предложение полностью доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Название “теорема о триангуляции” связано с тем, что в классическом случае оператора сдвига в классе Харди в круге оператор R_t есть ниже-треугольный (вольтерров) оператор. Для нас, однако, существенны только включение $R_t \in \mathcal{S}_2$ и оценка нормы Гильберта–Шмидта оператора R_t .

Теперь мы объединим предложения 4 и 5 в одно утверждение, которым будем пользоваться при доказательстве теоремы 3.

Пусть μ – сингулярная мера на вещественной прямой $\mathbb{R}$ и $\mu(\mathbb{R}) < \infty$. Пусть полугруппа унитарных операторов $U = (U_t)_{t \geq 0}$ действует в пространстве $L^2(\mu)$ по формуле $(U_t f)(x) = e^{itx} f(x)$.

Мы можем представить меру μ как сумму непрерывной сингулярной и атомической мер, т.е. $\mu = \mu^{(1)} + \mu^{(2)}$, где мера $\mu^{(1)}$ не имеет точечных нагрузок, а $\mu^{(2)} = \sum_n y_n \delta_{x_n}$ – атомическая мера. Тогда пространство $L^2(\mu)$ изоморфно прямой сумме пространств $L^2(\mu^{(1)})$ и $L^2(\mu^{(2)})$, а полугруппа U распадается в прямую сумму полугрупп: $U^{(1)} \oplus U^{(2)} = (U_t^{(1)} \oplus U_t^{(2)})_{t \geq 0}$, где

$$\begin{aligned} (U_t^{(1)} f)(x) &= e^{itx} f(x), & f \in L^2(\mu^{(1)}), \\ (U_t^{(2)} f)(x) &= e^{itx} f(x), & f \in L^2(\mu^{(2)}). \end{aligned}$$

Определим сингулярную внутреннюю функцию φ формулой (7) (с $\mu^{(1)}$ вместо μ), а произведение Бляшке B формулой (9). Положим

$$\Theta(z) = \varphi(z)B(z) = \exp\left(i \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu^{(1)}(t)}{t - z}\right) \prod_{n=1}^N \frac{z - z_n}{z - \bar{z}_n}, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (10)$$

Функция Θ внутренняя, и $\Theta - 1 \in H^2$ (см. [20]), причем

$$\|\Theta - 1\|_2^2 \leq C\mu(\mathbb{R}). \quad (11)$$

Отметим следующее, хорошо известное свойство модельных пространств. Пусть Θ_1 и Θ_2 – внутренние функции. Тогда модельное пространство $K_{\Theta_1 \Theta_2}$ представимо в виде ортогональной прямой суммы

$$K_{\Theta_1 \Theta_2} = K_{\Theta_1} \oplus \Theta_1 K_{\Theta_2}. \quad (12)$$

В частности, $K_{\Theta} = K_{\varphi} \oplus \varphi K_B$, и проектор P_{Θ} на K_{Θ} имеет вид $P_{\Theta} = P_{\varphi} + \varphi P_B \bar{\varphi}$ (здесь φ обозначает оператор умножения на функцию φ). Наконец, пусть $K = H_0 \ominus M_{\Theta} H_0 = \mathcal{F}^{-1} K_{\Theta}$.

ТЕОРЕМА 6. Полугруппа U унитарно эквивалентна некоторой полугруппе $V = (V_t)_{t \geq 0}$, действующей в пространстве K и такой, что $V_t = P_K S_t|_K + R_t$, $t \geq 0$, где $R_t \in \mathcal{S}_2$. При этом,

$$\|R_t\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C\mu(\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

где C – некоторая константа, зависящая только от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как обычно, мы перейдем к модельным пространствам в классе Харди с помощью преобразования Фурье. Нам надо построить такую полугруппу операторов $V = (V_t)_{t \geq 0}$ в пространстве K_Θ , унитарно эквивалентную полугруппе $U = (U_t)_{t \geq 0}$, что

$$V_t = P_\Theta E_t|_{K_\Theta} + R_t, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

и $R_t \in \mathcal{S}_2$. Согласно предложениям 4 и 5 полугруппы $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ унитарно эквивалентны полугруппам $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ в пространствах K_φ и K_B таким, что

$$\begin{aligned} V_t^{(1)} &= P_\varphi E_t|_{K_\varphi} + R_t^{(1)}, \quad t \geq 0, \\ V_t^{(2)} &= P_B E_t|_{K_B} + R_t^{(2)}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

При этом операторы $R_t^{(1)}$ и $R_t^{(2)}$ принадлежат классу Гильберта–Шмидта, $\|R_t^{(1)}\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C\mu^{(1)}(\mathbb{R})$ и $\|R_t^{(2)}\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C\mu^{(2)}(\mathbb{R})$, где константа C зависит только от t .

Определим полугруппу $V = (V_t)_{t \geq 0}$ следующим образом:

$$V_t = V_t^{(1)} P_\varphi + \varphi V_t^{(2)} P_B \bar{\varphi}$$

(напомним, что φ обозначает оператор умножения на внутреннюю функцию φ в пространстве H^2). В силу разложения $K_\Theta = K_\varphi \oplus \varphi K_B$ V есть полугруппа унитарных операторов в пространстве K_Θ . Покажем, что выполнено равенство (14). По определению полугруппы V

$$V_t = P_\varphi E_t P_\varphi + \varphi P_B E_t P_B \bar{\varphi} + R_t^{(1)} P_\varphi + \varphi R_t^{(2)} P_B \bar{\varphi}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P_\Theta E_t P_\Theta &= (P_\varphi + \varphi P_B \bar{\varphi}) E_t (P_\varphi + \varphi P_B \bar{\varphi}) \\ &= P_\varphi E_t P_\varphi + \varphi P_B E_t P_B \bar{\varphi} + \varphi P_B \bar{\varphi} E_t P_\varphi, \end{aligned}$$

так как оператор $P_\varphi E_t \varphi P_B$ тождественно равен нулю. Действительно, ясно, что операторы E_t и φ коммутируют, а $P_\varphi(\varphi f) = 0$, $f \in H^2$. Наконец, заметим, что $P_B \bar{\varphi} P_\varphi = 0$, поскольку $\bar{\varphi} f \in (H^2)^\perp$ для всякой функции $f \in K_\varphi$, и, значит, $P_B \bar{\varphi} f = 0$. Следовательно,

$$V_t = P_\Theta E_t P_\Theta + R_t^{(1)} P_\varphi + \varphi R_t^{(2)} P_B \bar{\varphi} + \varphi P_B \bar{\varphi} (P_\varphi E_t - E_t P_\varphi).$$

Теперь теорема будет доказана, как только мы покажем, что коммутатор $P_\varphi E_t - E_t P_\varphi$ принадлежит классу Гильберта–Шмидта и $\|P_\varphi E_t - E_t P_\varphi\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C\mu^{(1)}(\mathbb{R})$. Мы вынесем это утверждение в отдельное предложение (предложение 7), которое будет доказано в начале следующего раздела.

5. Доказательство теоремы 3. Пусть μ – конечная сингулярная борелевская мера на $\mathbb{R}$, а внутренняя функция Θ определена формулой (10). Напомним, что $K = H_0 \ominus M_\Theta H_0$, а P_K обозначает проектор, действующий из H_0 на K . Нам понадобится следующее предложение о коммутаторе проектора P_K и операторов сдвига S_t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Имеем $P_K S_t - S_t P_K \in \mathcal{S}_2$ и $\|P_K S_t - S_t P_K\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C\mu(\mathbb{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование Фурье устанавливает унитарную эквивалентность операторов P_K и S_t с операторами P_Θ и E_t , действующими в пространстве Харди H^2 . Хорошо известно (см. [17]), что проектор P_Θ на подпространство K_Θ имеет вид

$$(P_\Theta \eta)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \Theta(z)\overline{\Theta(s)}}{s - z} \eta(s) ds, \quad \eta \in H^2, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (15)$$

Чтобы обойти трудности, связанные с интерпретацией значений интеграла (15) при $z \in \mathbb{R}$, вновь воспользуемся приемом из доказательства предложения 4. Рассмотрим семейство операторов Q_ε , $\varepsilon > 0$, действующих в H^2 по формуле

$$(Q_\varepsilon \eta)(x) = (P_\Theta \eta)(x + i\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \Theta(x + i\varepsilon)\overline{\Theta(s)}}{s - x - i\varepsilon} \eta(s) ds, \quad \eta \in H^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что $Q_\varepsilon \rightarrow P_\Theta$ в сильной операторной топологии при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Ядро $D_\varepsilon(x, s)$ коммутатора $Q_\varepsilon E_t - E_t Q_\varepsilon$ имеет вид

$$D_\varepsilon(x, s) = (1 - \Theta(x + i\varepsilon)\overline{\Theta(s)}) \frac{e^{its} - e^{it(x+i\varepsilon)}}{s - x - i\varepsilon}.$$

Из условия $1 - \Theta \in H^2$ немедленно вытекает, что $D_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, причем

$$\|D_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}^2 \leq C \|1 - \Theta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq 2C\mu(\mathbb{R})$$

с константой $C = C(t)$, не зависящей от $\varepsilon > 0$. Таким образом, $Q_\varepsilon E_t - E_t Q_\varepsilon \in \mathcal{S}_2$, причем нормы Гильберта–Шмидта указанных операторов равномерно ограничены. Переходя к сильному операторному пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем требуемую оценку для нормы Гильберта–Шмидта коммутатора $P_\Theta E_t - E_t P_\Theta \in \mathcal{S}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассматриваемая группа U унитарно эквивалентна группе $\tilde{U}$, определенной формулой (6). С помощью замены масштаба мы всегда можем добиться того, что $\sum_n \mu_n(\mathbb{R}) < \infty$. Обозначим через θ_n внутреннюю функцию, порожденную мерой μ_n согласно формуле (10), и положим $\Theta_n = \prod_{s=1}^n \theta_s$. Рассмотрим сингулярную меру $\mu = \sum_n \mu_n$. Пусть сингулярная внутренняя функция Θ определена равенством (10). Тогда $\Theta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Theta_n$ и $\Theta - 1 \in H^2(\mathbb{R})$.

Рассмотрим подпространства

$$L_n = H_0 \ominus M_{\Theta_n} H_0, \quad K_n = M_{\Theta_{n-1}} L_n$$

и положим

$$K = \bigoplus_{n=1}^N K_n, \quad E = H_0 \ominus K.$$

Поскольку $\Theta = \prod_{n=1}^N \theta_n$, из представления (12) следует, что $K = H_0 \ominus M_\Theta H_0$.

По теореме 6 группа $\tilde{U}$ унитарно эквивалентна группе $V_t = \bigoplus_{n=1}^N V_t^{(n)}$, где группа

$$V_t^{(n)} = M_{\Theta_{n-1}} \tilde{V}_t^{(n)} M_{\Theta_{n-1}}^*|_{K_n}$$

действует в пространстве K_n и

$$\tilde{V}_t^{(n)} = P_{L_n} S_t|_{L_n} + R_t^{(n)}, \quad t \geq 0.$$

При этом $R_t^{(n)} \in \mathcal{S}_2$.

Определим унитарные операторы W_t с помощью формулы (4):

$$W_t = (V_t P_K + S_t P_E) S_{-t} P_{[t, +\infty)} + M_\Theta P_{[0, t]} + P_{H_0^\perp}, \quad t \geq 0,$$

а для $t < 0$ положим $W_t^* = S_t W_{-t} S_{-t}$. Тогда $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ есть унитарный коцикл группы S , и группа $\tilde{S}$ является коциклическим возмущением группы S коциклом W . Мы покажем, что $W_t - I \in \mathcal{S}_2$. Очевидно, достаточно проверить последнее включение для $t \geq 0$.

Имеем

$$W_t - I = (V_t - S_t) P_K S_{-t} P_{[t, \infty)} + (M_\Theta - I) P_{[0, t]}, \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Заметим, что

$$P_K S_t|_K = \bigoplus_{n=1}^N M_{\Theta_{n-1}} P_{L_n} S_t|_{L_n} M_{\Theta_{n-1}}^*.$$

Следовательно,

$$(V_t - S_t) P_K = \sum_{n=1}^N M_{\Theta_{n-1}} (V_t^{(n)} - P_{L_n} S_t|_{L_n}) M_{\Theta_{n-1}}^* - P_E S_t P_K.$$

Согласно оценке (13)

$$\|V_t^{(n)} - P_{L_n} S_t|_{L_n}\|_{\mathcal{S}_2}^2 = \|R_t^{(n)}\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C \mu_n(\mathbb{R}), \quad t \geq 0.$$

Следовательно,

$$\|P_K (V_t - S_t) P_K\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq C \sum_n \mu_n(\mathbb{R}) < +\infty.$$

Покажем, что $P_E S_t P_K \in \mathcal{S}_2$. Поскольку $E = H_0 \ominus K$, имеем

$$P_E S_t P_K = P_E (S_t P_K - P_K S_t).$$

Последний оператор принадлежит классу $\mathcal{S}_2$ согласно предложению 7.

Таким образом, мы показали, что оператор $(V_t - S_t) P_K$ (а, значит, и первое слагаемое в формуле (16)) принадлежит классу Гильберта–Шмидта $\mathcal{S}_2$. Оценим второе слагаемое в (16). Из условия $\Theta - 1 \in L^2(\mathbb{R})$ вытекает, что оператор $(M_\Theta - I) P_{[0, t]}$ есть оператор Гильберта–Шмидта. Действительно, ядро оператора $(\Theta - 1) \mathcal{F}: L^2([0, t]) \rightarrow H^2$ имеет вид

$$k(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\Theta(y) - 1) e^{-ixy}.$$

Следовательно, $k \in L^2([0, t] \times \mathbb{R})$, и, принимая во внимание неравенство (11), получаем

$$\|M_\Theta - I\|_{\mathcal{S}_2}^2 = \|(1 - \Theta) \mathcal{F}\|_{\mathcal{S}_2}^2 \leq t \|\Theta - 1\|_2^2 = 2t \mu(\mathbb{R}).$$

Суммируя полученные результаты, находим, что $W_t - I \in \mathcal{S}_2$, $t \in \mathbb{R}$.

6. Коциклические возмущения колмогоровских потоков на гиперфинитных факторах. В этом разделе мы используем сведения об алгебре канонических антикоммутиационных соотношений, приведенные в приложении. Фиксируем оператор R , $0 \leq R \leq I$, в гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$. Рассмотрим представление π_R алгебры канонических антикоммутиационных соотношений $\mathcal{A}(H)$ в пространстве $\mathcal{H} = \Gamma(H) \otimes \Gamma(H)$, отвечающее состоянию ω_R . Пусть семейство операторов R_t , $0 \leq R_t \leq I$, определено условием $R_t S_t = S_t R$. Группа сдвигов S в пространстве H определяет семейство инъективных *-гомоморфизмов τ_t алгебры $\pi_R(\mathcal{A}(H))$ на алгебру $\pi_{R_t}(\mathcal{A}(H))$ согласно следующей формуле:

$$\tau_t(\pi_R(a(\eta))) = \pi_{R_t}(a(S_t \eta)), \quad \eta \in H, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\mathcal{M}_R \subset B(H)$ есть гиперфинитный фактор фон Неймана, порожденный алгеброй $\pi_R(\mathcal{A}(H))$. Предположим, что $R = P_K$ есть проектор на коинвариантное подпространство $K = H_0 \ominus M_\Theta H_0$ полугруппы сдвигов, отвечающее внутренней функции Θ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть μ есть конечная сингулярная борелевская мера, а внутренняя функция Θ определена формулой (10). Тогда *-гомоморфизм τ_t алгебры $\pi_{P_K}(\mathcal{A}(H))$ на алгебру $\pi_{S_t P_K S_{-t}}(\mathcal{A}(H))$ продолжается до *-гомоморфизма гиперфинитного фактора $\mathcal{M}_{P_K}$ на гиперфинитный фактор $\mathcal{M}_{S_t P_K S_{-t}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие продолжения *-гомоморфизма α алгебры $\pi_R(\mathcal{A}(H))$, полученного квазисвободным подъемом унитарного оператора U , до *-гомоморфизма гиперфинитного фактора $\mathcal{M}_R$ имеет вид $RU - UR \in \mathcal{S}_2$ (см. [22]). Таким образом, результат следует из предложения 7.

Семейство *-гомоморфизмов $\tau = \{\tau_t, t \in \mathbb{R}\}$ алгебры фон Неймана $\mathcal{M}_0$, образы которых принадлежат алгебре всех ограниченных операторов $B(\mathcal{H})$ в некотором фиксированном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, естественно назвать *колмогоровским потоком* (см. [23, 3]) на алгебре $\mathcal{M} = \bigcup_t \tau_t(\mathcal{M}_0)$ с уходящей алгеброй $\mathcal{M}_0$, если выполнено условие

$$\bigcap_t \mathcal{M}_t = \{\mathbb{C}1\},$$

где $\mathcal{M}_t = \tau_t(\mathcal{M}_0)$, $t \in \mathbb{R}$, а символ 1 обозначает тождественный оператор в пространстве $\mathcal{H}$.

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_0$ суть гиперфинитные факторы фон Неймана, порожденные алгебрами $\pi_{P_K}(\mathcal{A}(H))$ и $\pi_{P_K}(\mathcal{A}(H_0))$ соответственно. Положим $\mathcal{M}_t = \tau_t(\mathcal{M}_0)$. Здесь мы оставили то же самое обозначение для продолжения τ_t с алгебры $\pi_{P_K}(\mathcal{A}(H))$ на фактор $\mathcal{M}_{P_K}$, существующего в силу предложения 8.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Семейство *-гомоморфизмов $\tau = \{\tau_t, t \in \mathbb{R}\}$ образует колмогоровский поток на алгебре $\mathcal{M}$ с уходящей алгеброй $\mathcal{M}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно записать факторы $\mathcal{M}_t$ в явном виде (см. приложение)

$$\mathcal{M}_0 = B(\Gamma(E) \otimes \Gamma(K)), \quad \mathcal{M}_t = B(\Gamma(S_t E) \otimes \Gamma(S_t K)), \quad (17)$$

где $E \oplus K = H_0$, а $B(X)$ обозначает множество всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве X . Из равенства (17) немедленно следует, что $\bigcap_t \mathcal{M}_t = \{\mathbb{C}1\}$.

Пусть $W = \{W_t, t \in \mathbb{R}\}$ есть марковский коцикл группы сдвигов S . Рассмотрим коциклическое возмущение $\tilde{S} = \{\tilde{S}_t = W_t S_t, t \in \mathbb{R}\}$ группы S . Положим $P_t = S_t P_K S_{-t}$ и $\tilde{P}_t = W_t P_t W_t^*, t \in \mathbb{R}$. Пусть w_t есть $*$ -гомоморфизм алгебры $\pi_{P_t}(\mathcal{A}(H))$ на алгебру $\pi_{\tilde{P}_t}(\mathcal{A}(H))$. Введем обозначение $\tilde{\mathcal{M}}_t = \mathcal{M}_{\tilde{P}_t}$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть марковский коцикл W удовлетворяет условию $W_t - I \in \mathcal{S}_2$. Тогда $*$ -гомоморфизм w_t продолжается до $*$ -гомоморфизма гиперфинитного фактора $\mathcal{M}_t$ на гиперфинитный фактор $\tilde{\mathcal{M}}_t$, так что получающееся семейство $*$ -гомоморфизмов $w_t \circ \tau_t$ образует колмогоровский поток на гиперфинитном факторе $B(\Gamma(H \oplus K) \otimes \{\mathbb{C}\Omega\})$ с уходящей алгеброй $B(\Gamma(E) \otimes \{\mathbb{C}\Omega\}) \subset \tilde{\mathcal{M}}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $W_t - I \in \mathcal{S}_2$ вытекает, что $P_t W_t - W_t P_t \in \mathcal{S}_2$. Следовательно, согласно [22] $*$ -гомоморфизм w_t продолжается с $\pi_{P_t}(\mathcal{A}(H))$ на $\mathcal{M}_t$. Заметим, что

$$\tilde{\mathcal{M}}_t = w_t(\mathcal{M}_t) = B(\Gamma(\tilde{S}_t E) \otimes \Gamma(K)).$$

Следовательно, $\mathcal{N} \equiv B(\Gamma(E) \otimes \{\mathbb{C}\Omega\}) \subset \tilde{\mathcal{M}}_0$, и определено сужение τ_t на $\mathcal{N}$. С другой стороны, $\bigcap_t \tau_t(\mathcal{N}) = \{\mathbb{C}1\}$.

Приложение. Алгебра канонических антикоммутиационных соотношений и ее представления. Ниже приведены сведения из работ [22], [24].

Пусть H есть сепарабельное гильбертово пространство. Алгеброй канонических антикоммутиационных соотношений $\mathcal{A}(H)$ называется алгебра с инволюцией $*$, единицей 1 и образующими $a(\xi), a^*(\eta), \xi, \eta \in H$, удовлетворяющими соотношениям:

1. $a^*(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha a^*(\xi) + \beta a^*(\eta), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
2. $a(\xi)a^*(\eta) + a^*(\eta)a(\xi) = (\eta, \xi)1$;
3. $a(\xi)a(\eta) + a(\eta)a(\xi) = 0$.

Любой оператор $R, 0 \leq R \leq I$, определяет состояние (линейный положительный функционал) ω_R на алгебре $\mathcal{A}(H)$ по формуле

$$\omega_R(a^*(\eta_1) \cdots a^*(\eta_n) a(\xi_1) \cdots a(\xi_m)) = \delta_{nm} \det((R\eta_i, \xi_j)). \quad (18)$$

Состояние (18) называется *квазисвободным*.

Антисимметричным произведением n копий пространства H называется гильбертово пространство $\Lambda^n H$, образованное линейной оболочкой векторов $\eta_1 \Lambda \eta_2 \Lambda \cdots \Lambda \eta_n$, $\eta_i \in H$, со скалярным произведением

$$(\eta_1 \Lambda \cdots \Lambda \eta_n, \xi_1 \Lambda \cdots \Lambda \xi_n) = \det((\eta_i, \xi_j)).$$

Антисимметричным пространством Фока над H называется гильбертово пространство $\Gamma(H) = \{\mathbb{C}\Omega\} \oplus (\bigoplus_{n=1}^{+\infty} \Lambda^n H)$. Здесь первое слагаемое в сумме представляет собой одномерное пространство, натянутое на вектор Ω , называемый вакуумным.

Будем предполагать, что алгебра $\mathcal{A}(H)$ реализована в качестве подалгебры алгебры ограниченных операторов в $\Gamma(H)$. При этом, действие образующих $\mathcal{A}(H)$ задается формулой $a^*(\eta)\xi_1 \Lambda \cdots \Lambda \xi_n = \eta \Lambda \xi_1 \Lambda \cdots \Lambda \xi_n$, и $a(\eta)$ является сопряженным с $a^*(\eta)$. Заметим, что при этом $\|a(\eta)\| = \|a^*(\eta)\| = \|\eta\|_H$, и $\mathcal{A}(H)$ становится C^* -алгеброй относительно операторной нормы в $\Gamma(H)$.

Другие представления алгебры $\mathcal{A}(H)$ могут быть получены с помощью конструкции Гельфанда–Наймарка–Сигала по различным состояниям на $\mathcal{A}(H)$. Квазисвободное состояние (18) определяет представление π_R алгебры $\mathcal{A}(H)$ в пространстве $\mathcal{H} = \Gamma(H) \otimes \Gamma(H)$. Фиксируем ортонормированный базис $(\eta_n)_{n=1}^{+\infty}$ в H и оператор J в $\Gamma(H)$, определяемый условиями $J\Omega = \Omega$, $Ja(\eta) = -a(\eta)J$. Тогда отображение π_R , заданное формулой

$$\pi_R(a(\eta_n)) = a^*((I - R)^{1/2}\eta_n) \otimes J + I \otimes a(R^{1/2}\eta_n),$$

можно продолжить по линейности, так что получится представление алгебры $\mathcal{A}(H)$, при котором $\omega_R(x^*y) = (\pi_R(x), \pi_R(y))_{\Gamma(H) \otimes \Gamma(H)}$, $x, y \in \mathcal{A}(H)$. Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}_R = \pi_R(\mathcal{A}(H))''$, где X' обозначает коммутант множества X , является фактором, т.е. $\mathcal{M}_R \cap \mathcal{M}'_R = \{\mathbb{C}1\}$. Фактор $\mathcal{M}_R$ называется гиперфинитным фактором фон Неймана или просто *гиперфинитным фактором*.

Пусть сжимающий оператор T действует в гильбертовом пространстве H . Тогда *-отображение $\alpha_{T,R}$, заданное на образующих $\mathcal{A}(H)$ формулой $\alpha_{T,R}(a(\eta)) = a(T\eta)$, $\eta \in H$, может быть единственным образом продолжено до вполне положительного отображения C^* -алгебры $\mathcal{A}$, переводящего состояние ω_R в состояние $\omega_{R'}$, определяемое условием $R'T = TR$, так что $\omega_{R'}(\alpha_{T,R}(x)) = \omega_R(x)$, $x \in \mathcal{A}(H)$. В том случае, когда оператор T унитарен, отображение $\alpha_{T,R}$ является *-автоморфизмом алгебры $\mathcal{A}(H)$. В этом случае положим $\tau_{U,R}(\pi_R(x)) = \pi_{R'}(\alpha_{U,R}(x))$, $x \in \mathcal{A}(H)$. Тогда $\tau_{U,R}$ есть инъективный *-гомоморфизм алгебры $\pi_R(\mathcal{A}(H))$ на алгебру $\pi_{R'}(\mathcal{A}(H))$. Говорят, что отображения $\alpha_{T,R}$ и $\tau_{U,R}$ заданы квазисвободным подъемом оператора T .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Amosov G. G. Cocycle perturbation of quasifree algebraic K -flow leads to required asymptotic dynamics of associated completely positive semigroup // *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Rel. Top.* 2000. V. 3. №2. P. 237–246.
- [2] Amosov G. G. Stationary quantum stochastic processes from cohomological point of view // *Quantum Probability and Infinite Dimensional Analysis* (Burg, 2001) / ed. W. Freudenberg. *Quantum Probab. White Noise Anal.* V. 15. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 2003. P. 29–40.
- [3] Amosov G. G. On Markovian cocycle perturbations in classical and quantum probability // *Intern. J. Math. Math. Sci.* 2003. №54. P. 3443–3467.
- [4] Амосов Г. Г. О марковских возмущениях группы унитарных операторов, ассоциированной со случайным процессом со стационарными приращениями // *Теор. вероятн. и ее прим.* 2004. Т. 49. С. 145–155.
- [5] Accardi L., Frigerio A., Lewis J. T. Quantum stochastic processes // *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 1982. V. 18. №1. P. 97–133.
- [6] Parthasarathy K. R. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*. Monographs in Mathematics. V. 85. Basel: Birkhäuser Verlag, 1992.
- [7] Lindsay J. M., Wills S. J. Markovian cocycles on operator algebras adapted to a Fock filtration // *J. Funct. Anal.* 2000. V. 178. P. 269–300.
- [8] Liebscher V. How to generate Markovian cocycles on boson Fock space // *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Rel. Top.* 2001. V. 4. P. 215–219.
- [9] Bhat B. V. R. Minimal isometric dilations of operator cocycles // *Integral Equations Operator Theory.* 2002. V. 42. №2. P. 125–141.
- [10] Amosov G. G. On cocycle conjugacy of quasifree endomorphism semigroups on the CAR algebra // *J. Math. Sci.* 2001. V. 105. P. 2496–2503.
- [11] Булинский А. В. Алгебраические K -потoki и полупотoki сдвигов Пауэрса // *УМН.* 1996. Т. 51. С. 145–146.
- [12] Powers R. T. An index theory for semigroups of *-endomorphisms of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and types II_1 factors // *Canad. J. Math.* 1988. V. 40. №1. P. 86–114.

- [13] Arveson W. Continuous analogues of Fock space // Mem. Amer. Math. Soc. 1989. V. 80. № 409. P. 1–66.
- [14] Bhat B. V. R., Skeide M. Tensor product systems of Hilbert modules and dilations of completely positive semigroups // Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Rel. Top. 2000. V. 3. P. 519–575.
- [15] Barreto S. D., Bhat B. V. R., Liebscher V., Skeide M. Type I product systems of Hilbert modules // J. Funct. Anal. 2004. V. 212. P. 121–181.
- [16] Accardi L., Amosov G. G., Franz U. Second quantized automorphisms of the renormalized square of white noise (RSWN) algebra // Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Rel. Top. 2004. V. 7. P. 183–194.
- [17] Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.
- [18] Секефальви-Надь Б., Фойаш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
- [19] Amosov G. G., Baranov A. D. On perturbations of the group of shifts on the line by unitary cocycles // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132. P. 3269–3273.
- [20] Баранов А. Д. Изометрические вложения пространств K_Θ в верхней полуплоскости // Проблемы матем. анализа. 2000. Т. 21. С. 30–44.
- [21] Ahern P. R., Clark D. N. On functions orthogonal to invariant subspaces // Acta Math. 1970. V. 124. P. 191–204.
- [22] Araki H. On quasifree states of CAR and Bogoliubov automorphisms // Contemp. Math. 1985. V. 62. P. 21–141.
- [23] Emch G. G. Generalized K -flows // Commun. Math. Phys. 1976. V. 49. P. 191–215.
- [24] Evans D. Completely positive quasifree maps on the CAR algebra // Commun. Math. Phys. 1979. V. 70. P. 53–68.

(Г. Г. Амосов) Московский физико-технический институт
(А. Д. Баранов) Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: amosov@fizteh.ru, d.baranov@mail.ioffe.ru

Поступило
02.02.2005