Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, Эквивалентные нормы в пространствах функций дробной гладкости на произвольной области, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 340–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:32:56

УДК 517.518

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ ДРОБНОЙ ГЛАДКОСТИ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

О. В. Бесов

Здесь изучаются пространства $B_{pq}^s(G)$, $L_{pq}^s(G)$ функций f с положительным показателем гладкости $s > 0$, заданных на области $G \subset \mathbb{R}^n$. Нормы в этих пространствах определены с помощью интегральных норм разности функции f порядка $m > s$, рассматриваемой как функция точки области и шага разности. Для произвольной области $G \subset \mathbb{R}^n$ устанавливается характеристика этих пространств в терминах локальных аппроксимаций функции многочленами степени $m - 1$.

Библиография: 16 названий.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_1^n x_i e^i$, e^i – орты стандартного базиса. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$ пусть $[x, y]$ – отрезок с концами в точках x, y , $y + tE = \{x: x = y + tz, z \in E\}$,

$$B(x, t) = \{y: |y - x| \leq t\} = x + B(0, t), \quad B_0 = B(0, 1),$$

χ – характеристическая функция шара B_0 или отрезка $[-1, 1]$.

При $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\Delta^m(y)f(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x + jy),$$

$$\Delta^m(y, E)f(x) = \begin{cases} \Delta^m(y)f(x) & \text{при } B(x, m|y|) \subset E, \\ 0 & \text{при } B(x, m|y|) \not\subset E, \end{cases}$$

при $t > 0$

$$\delta^m(t, E)f(x) = \begin{cases} |B_0|^{-1} \int_{|y| < 1} |\Delta^m(ty)f(x)| dy & \text{при } B(x, mt) \subset E, \\ 0 & \text{при } B(x, mt) \not\subset E. \end{cases}$$

Все встречающиеся множества измеримы по Лебегу, $|E|$ – мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Все встречающиеся функции действительнзначны и локально суммируемы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00602, программы “Ведущие научные школы”, № 00-15-96047, и INTAS, грант № 99-01080.

Для $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|f\|_{p,E} = \|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_p = \|f\|_{p,\mathbb{R}^n};$$

при $p = \infty$ $\left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ понимается как $\text{ess sup}_E |f|$, $L(E) = L_1(E)$.

При $1 < q < \infty$ через L_q^* обозначается пространство измеримых на $(0, 1)$ функций g с нормой

$$\|g\|_{L_q^*} = \left(\int_0^1 |g(t)|^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad L_\infty^* = L_\infty((0, 1)).$$

Через G будем обозначать область в $\mathbb{R}^n$. При $\delta > 0$ полагаем $G_\delta = \{x: x \in G, \text{dist}(x, \partial G) > \delta\}$. При этом δ считаем столь малым, что $G_\delta \neq \emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Символом $B_{pq,r}^{s(m)}(G)$ при $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $0 < s < m$, $m \in \mathbb{N}$, будем обозначать банахово пространство функций $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ с нормой

$$\|f\|_{B_{pq,r}^{s(m)}(G)} = \|f\|_{L_r(G_\delta)} + \|f\|_{b_{pq}^{s(m)}(G)},$$

где

$$\|f\|_{b_{pq}^{s(m)}(G)} = \left(\int_{m|h|<1} \left(\frac{\|\Delta^m(h, G)f\|_p}{|h|^s} \right)^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Символом $L_{pq,r}^{s(m)}(G)$ при $1 < p, q \leq \infty$, $0 < s < m$, $m \in \mathbb{N}$, будем обозначать банахово пространство функций $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ с нормой

$$\|f\|_{L_{pq,r}^{s(m)}(G)} = \|f\|_{L_r(G_\delta)} + \|f\|_{l_{pq}^{s(m)}(G)},$$

где

$$\|f\|_{l_{pq}^{s(m)}(G)} = \left\| \left(\int_0^{\frac{1}{m}} \left(\frac{\delta^m(t, G)f}{t^s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p. \quad (2)$$

При $r = p$ вместо $B_{pq,r}^{s(m)}(G)$, $L_{pq,r}^{s(m)}(G)$ и т.п. будем писать $B_{pq}^{s(m)}(G)$, $L_{pq}^{s(m)}(G)$ и т.п. При $m - 1 \leq s < m$ верхний индекс (m) в обозначениях пространств будем опускать.

Пространства $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$, $L_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ ($= F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$) изучены достаточно подробно (см. [1]–[3]). Характеризация пространств Лизоркина–Трибеля L_{pq}^s на $\mathbb{R}^n$ и на областях $G \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей в терминах шаровых средних от абсолютных величин разностей была предложена Стрихартцем [4] при $q = 2$ (пространства бесселевых потенциалов) и в общем случае Лизоркиным [5]. Другие характеристики пространств $B_{pq}^s(G)$, $L_{pq}^s(G)$ на области G с регулярной границей можно найти в [3], [6].

Введем в рассмотрение также пространства функций, характеризующихся определенными интегральными оценками для их локальных приближений алгебраическими многочленами. Примем некоторые обозначения:

$$\tau_a f(x) = f(x + a), \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma_t f(x) = f(tx), \quad t > 0,$$

$\mathcal{P}_{m-1}$ – подпространство пространства $L(B_0)$, состоящее из всех многочленов вида $\sum_{|\alpha| \leq m-1} c_\alpha x^\alpha$ (степени не выше $m-1$),

$$\begin{aligned} \pi &= \pi^{(m-1)} \text{ – некоторый проектор } L(B_0) \text{ на } \mathcal{P}_{m-1}, \\ \pi_{a,t} &= \tau_a^{-1} \circ \sigma_t^{-1} \circ \pi \circ \sigma_t \circ \tau_a, \\ D_{m-1}(t, E)f(x) &= D_{m-1}(t, B(x, t) \cap E)f(x) \\ &= \begin{cases} t^{-n} \|f - \pi_{x,t} f \mid L(B(x, t))\| & \text{при } B(x, t) \subset E, \\ 0 & \text{при } B(x, t) \not\subset E. \end{cases} \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1 [7]. Функционалы $D_{m-1}(t, G)f$, образованные с помощью двух разных проекторов π и $\hat{\pi}$, эквивалентны с постоянными, не зависящими от f, x, t . В самом деле,

$$\begin{aligned} \|f - \hat{\pi}_{x,t} f \mid L(B(x, t))\| &= \|f - \pi_{x,t} f - \hat{\pi}_{x,t}(f - \pi_{x,t} f) \mid L(B(x, t))\| \\ &\leq (1 + \|\hat{\pi}\|) \|f - \pi_{x,t} f \mid L(B(x, t))\|. \end{aligned}$$

Из аналогичных оценок ясно также, что $D_{m-1}(t, G)f$ останется эквивалентным после замены в нем приближения функции с помощью проекционного многочлена на ее наилучшее приближение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. При $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $0 < s < m$, $m \in \mathbb{N}$, обозначим через $\tilde{B}_{pq,r}^{s(m)}(G)$, $\tilde{L}_{pq,r}^{s(m)}(G)$ пространства функций $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ с конечными нормами соответственно

$$\begin{aligned} \|f \mid \tilde{B}_{pq,r}^{s(m)}(G)\| &= \|f \mid L_r(G_\delta)\| + \|f \mid \tilde{b}_{pq}^{s(m)}(G)\|, \\ \|f \mid \tilde{L}_{pq,r}^{s(m)}(G)\| &= \|f \mid L_r(G_\delta)\| + \|f \mid \tilde{l}_{pq}^{s(m)}(G)\|, \end{aligned}$$

где

$$\|f \mid \tilde{b}_{pq}^{s(m)}(G)\| = \left(\int_0^1 \|D_{m-1}(t, G)f\|_p^q t^{-sq} \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad (3)$$

$$\|f \mid \tilde{l}_{pq}^{s(m)}(G)\| = \left\| \left(\int_0^1 (D_{m-1}(t, G)f)^q t^{-sq} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_p. \quad (4)$$

Через $b_{pq}^{s(m)}(G)$, $l_{pq}^{s(m)}(G)$, $\tilde{b}_{pq}^{s(m)}(G)$, $\tilde{l}_{pq}^{s(m)}(G)$ будем обозначать полунормированные пространства с полунормами, введенными в определениях 1–3.

Пространства функций, характеризуемых локальными приближениями многочленами, изучались во многих работах, см., например, [2], [4], [7]–[9]. Ближайшими к представленным здесь результатам о совпадении $B_{pq}^s(G) = \tilde{B}_{pq}^s(G)$, $L_{pq}^s(G) = \tilde{L}_{pq}^s(G)$ являются результаты Аджиева [7], установившего их для областей G с регулярной границей. Этим он дополнил для пространств $B_{pq}^s(G)$ предшествующие результаты Ильина (см. [2]) и распространил на области более общего вида результаты Трибеля [8] для областей с бесконечно гладкой границей. Отметим еще результаты Девора и Шарпли [10],

исследовавших для регулярной области $G \subset \mathbb{R}^n$ шкалу пространств $C_p^s(G) = \tilde{L}_{p,\infty}^s(G)$. Другие справки исторического характера можно найти в [7], [3], [6].

Из относящихся к произвольной области $G \subset \mathbb{R}^n$ отметим результат Кальдерона [11] о характеристизации пространства Соболева $W_p^l(G)$ в терминах локальных аппроксимаций.

При доказательстве эквивалентности полунорм в пространстве $l_{pq}^{s(m)}(G)$ существенно будет использована

ТЕОРЕМА I [12]–[14]; [15, Т. 2, С. 335], [3, п. 2.2.2]. Пусть B_1, B_2 – рефлексивные банаховы пространства и оператор A определен на функциях $\bar{f} \in L_p(\mathbb{R}^n, B_1)$, $p \in (1, \infty)$, формулой

$$(A\bar{f})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\bar{f}(y) dy,$$

где $K(x)$ – линейный ограниченный оператор из B_1 в B_2 , функция $x \rightarrow K(x)$ локально суммируема на $\mathbb{R}^n$. Пусть при некоторых $p_0 \in (1, \infty)$, $R, M > 0$

- 1) $\|A\bar{f} \mid L_{p_0}(\mathbb{R}^n, B_2)\| \leq M \|\bar{f} \mid L_{p_0}(\mathbb{R}^n, B_1)\|;$
- 2) $\int_{|x| > R|y|} \|K(x) - K(x-y) \mid B_1 \rightarrow B_2\| dx \leq M \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$

Тогда для всех $p \in (1, \infty)$

$$\|A\bar{f} \mid L_p(\mathbb{R}^n, B_2)\| \leq C_p M \|\bar{f} \mid L_p(\mathbb{R}^n, B_1)\|,$$

где C_p не зависит от $\bar{f}$, M .

ТЕОРЕМА 1. Для произвольной области $G \subset \mathbb{R}^n$ при $0 < s < t$, $1 \leq p, q \leq \infty$ полунормы $\|f \mid b_{pq}^{s(m)}(G)\|$ и $\|f \mid \tilde{b}_{pq}^{s(m)}(G)\|$ эквивалентны.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольной области $G \subset \mathbb{R}^n$ при $0 < s < t$ и при $1 < p, q < \infty$ или $1 < p \leq q = \infty$ полунормы $\|f \mid l_{pq}^{s(m)}(G)\|$ и $\|f \mid \tilde{l}_{pq}^{s(m)}(G)\|$ эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1, 2. Оценим сначала $D_{m-1}(1, B_0)f(0)$ через интеграл от $\delta^m(t, B_0)f$. Воспользуемся для этого проекционным представлением из [16]:

$$f(x) = P_{m-1}(x) + \int_0^1 \iint R(x, y, z) \Delta^m(vy) f(x - vx + vy + vz) dy dz \frac{dv}{v}, \quad (5)$$

где $P_{m-1}(x)$ – (проекционный) многочлен (степени $m-1$), построенный по значениям функции f из шара B_0 , $R(x, y, z)$ – многочлен степени m по x с коэффициентами из C_0^∞ по y и по z , сосредоточенными в $\{(y, z): |y| < \varepsilon, |z| < \varepsilon\}$, где число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. Поэтому в (5) при $x \in B_0$ вместо $\Delta^m(vy)f$ можно написать $\Delta^m(vy, B_0)f$. Из (5) видно, что

$$\begin{aligned} D_{m-1}(1, B_0)f(0) &= \|f - \pi f \mid L_1(B_0)\| \leq \|f - P_{m-1} - \pi(f - P_{m-1}) \mid L_1(B_0)\| \\ &\leq C_1 \|f - P_{m-1} \mid L_1(B_0)\| \\ &\leq C_2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \right) \int_{|y| < 1} \|\Delta^m(vy, B_0)f\|_1 dy \frac{dv}{v}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для получения последней оценки при $v \leq 1/2$ сначала интегрирование было проведено по x , а затем по z ; при $v > 1/2$ – в противоположном порядке.

Из (6) имеем

$$D_{m-1}(1, B_0)f(0) \leq C_3 \int_0^1 \|\delta^m(v, B_0)f\|_1 \frac{dv}{v}.$$

Отсюда с помощью сдвигов и растяжений получаем, что при $t > 0$, $x \in G_t$

$$\begin{aligned} D_{m-1}(t, G)f(x) &= D_{m-1}(t, B(x, t))f(x) = D_{m-1}(t, B(0, t))(\tau_x f)(0) \\ &= D_{m-1}(1, B_0)(\sigma_t \tau_x f)(0) \leq C_3 \int_0^1 \|\delta^m(tv, B(x, t))f\|_1 \frac{dv}{v} \\ &= C_3 t^{-n} \int_0^1 \|\delta^m(tv, B(x, t))f\|_1 \frac{dv}{v} \\ &= C_3 t^{-n} \int_0^t \|\delta^m(v, B(x, t))f\|_1 \frac{dv}{v}. \end{aligned} \quad (7)$$

Продолжая оценку (7), имеем

$$\begin{aligned} D_{m-1}(t, G)f(x) &\leq C_4 t^{-n} \int_0^t \int_{|y|<1} \|\Delta^m(vy, B(x, t))f\|_1 dy \frac{dv}{v} \\ &= C_4 t^{-n} \int_0^t \int_{|y|<v} \|\Delta^m(y, B(x, t))f\|_1 dy \frac{dv}{v^{n+1}} \\ &\leq C_5 t^{-n} \int_{|y|<t} \|\Delta^m(y, B(x, t))f\|_1 \frac{dy}{|y|^n}. \end{aligned} \quad (8)$$

С помощью неравенства Гёльдера имеем

$$\|\Delta^m(y, B(x, t))f\|_1 \leq C_6 \|\Delta^m(y, B(x, t))f\|_{p'} t^{n/p'}. \quad (9)$$

Из (8) с помощью неравенства Минковского и (9) получаем оценку

$$\begin{aligned} \|D_{m-1}(t, G)f\|_p &\leq C_7 t^{-n} \int_{|y|<t} \|\Delta^m(y, B(x, t))f\|_{p'} t^{\frac{n}{p'}} \left[\int_G \|\Delta^m(y, B(x, t))f\|_p^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \frac{dy}{|y|^n} \\ &\leq C_8 \int_{|y|<t} \|\Delta^m(y, G)f\|_p \frac{dy}{|y|^n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Применяя неравенство Гёльдера, из (10) при $0 < \kappa < s$, $q < \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \|D_{m-1}(t, G)f\|_p^q t^{-sq} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} &\leq C_8 \left(\int_0^1 \left[\int_{|y|<t} \|\Delta^m(y, G)f\|_p \frac{dy}{|y|^n} \right]^q t^{-sq} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq C_8 \left(\int_0^1 \int_{|y|<t} \frac{\|\Delta^m(y, G)f\|_p^q}{|y|^{\kappa q}} \frac{dy}{|y|^n} \left[\int_{|y|<t} |y|^{\kappa q'} \frac{dy}{|y|^n} \right]^{q/q'} t^{-sq} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq C_9 \left(\int_0^1 \int_{|y|<t} \|\Delta^m(y, G)f\|_p^q |y|^{-\kappa q} \frac{dy}{|y|^n} t^{\kappa q - sq} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\int_{|y|<1} \|\Delta^m(y, G)f\|_p^q |y|^{-sq} \frac{dy}{|y|^n} \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (11)$$

При $q = \infty$ оценка (11) выводится аналогично.

Из (11) следует вложение

$$b_{pq}^{s(m)}(G) \subset \tilde{b}_{pq}^{s(m)}(G) \quad (12)$$

для произвольной области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Получим теперь вложение

$$l_{pq}^{s(m)}(G) \subset \tilde{l}_{pq}^{s(m)}(G) \quad \text{при } 1 < p, q < \infty \text{ и при } 1 < p \leq q = \infty. \quad (13)$$

Пусть сначала $1 < p, q < \infty$. Пусть $\chi_0 \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ (или $\chi_0 \in C_0^1(\mathbb{R}^1)$), причем $\chi(x) \leq \chi_0(x) \leq \chi(x/2)$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$ (соответственно при всех $x \in \mathbb{R}^1$).

Из оценки (7) следует, что

$$t^{-s} D_{m-1}(t, G) f(x) \leq C \int (K_0(y) ((\cdot)^{-s} \delta^m(\cdot, G) f(x+y)))(t) dy, \quad (14)$$

где оператор $K_\varepsilon(y): L_q^* \rightarrow L_q^*$ имеет вид

$$(K_\varepsilon(y)g)(t) = t^{-n} \chi_0\left(\frac{\varepsilon}{|y|}\right) \chi_0\left(\frac{y}{t}\right) \int_0^t g(v) \left(\frac{v}{t}\right)^s \frac{dv}{v}, \quad \varepsilon \geq 0.$$

Убедимся, что условия теоремы I выполнены для оператора A с ядром $K = K_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $B_1 = B_2 = L_q^*$, $p_0 = q$, $R = 2$.

Для $\bar{f}(v, x)$, $\bar{f} \in L_q(\mathbb{R}^n, L_q^*)$, имеем

$$N^q = \|A\bar{f} \mid L_q(\mathbb{R}^n, L_q^*)\|^q \leq \int \int_0^1 \left[\int t^{-n} \chi_0\left(\frac{y}{t}\right) \int_0^t |\bar{f}(v, x+y)| \left(\frac{v}{t}\right)^s \frac{dv}{v} dy \right]^q \frac{dt}{t} dx.$$

Применяя неравенство Гёльдера по v, y , получаем

$$N^q \leq C \int \int_0^1 \int t^{-n} \chi_0\left(\frac{y}{t}\right) \int_0^t |\bar{f}(v, x+y)|^q \left(\frac{v}{t}\right)^{sq} \frac{dv}{v} dy \frac{dt}{t} dx.$$

Интегрируя последовательно по x, y, t , получаем оценку

$$N^q \leq C_1 \int_0^1 \|\bar{f}(v, \cdot) \mid L_q(\mathbb{R}^n)\|^q \frac{dv}{v} = C_1 \|\bar{f} \mid L_q(\mathbb{R}^n, L_q^*)\|^q.$$

Этим условие 1) теоремы I проверено.

Проверим условие 2). Заметим, что при $\varepsilon > 0$, $0 < t \leq 1$

$$\begin{aligned} \Delta(t, x, y) &= \chi_0\left(\frac{\varepsilon}{|x|}\right) \chi_0\left(\frac{x}{t}\right) - \chi_0\left(\frac{\varepsilon}{|x-y|}\right) \chi_0\left(\frac{x-y}{t}\right) \\ &= \left[\chi_0\left(\frac{\varepsilon}{|x|}\right) - \chi_0\left(\frac{\varepsilon}{|x-y|}\right) \right] \chi_0\left(\frac{x}{t}\right) + \chi_0\left(\frac{\varepsilon}{|x-y|}\right) \left[\chi_0\left(\frac{x}{t}\right) - \chi_0\left(\frac{x-y}{t}\right) \right], \end{aligned}$$

откуда с помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем

$$\begin{aligned} |\Delta(t, x, y)| &\leq \chi_0\left(\frac{x}{t}\right) \max_{a \in \left[\frac{\varepsilon}{|x|}, \frac{\varepsilon}{|x-y|}\right]} |\chi'_0(a)| \frac{\varepsilon ||x-y| - |x||}{|x| |x-y|} \\ &\quad + \chi_0\left(\frac{\varepsilon}{|x-y|}\right) \max_{z \in [x, x-y]} \left| \text{grad } \chi_0\left(\frac{z}{t}\right) \right| \frac{|y|}{t}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sup_{0 < t \leq 1} |\Delta(t, x, y) t^{-n}| \leq C_1 \frac{|y|}{|x|^{n+1}}.$$

Пусть $g \in L_q^*$. Тогда с помощью неравенства Минковского имеем

$$\begin{aligned} \|(K_\varepsilon(x) - (K_\varepsilon(x-y))g) \mid L_q^*\| &\leq \left\{ \int_0^1 \left[|\Delta(t, x, y)| t^{-n} \int_0^t |g(v)| \left(\frac{v}{t}\right)^s \frac{dv}{v} \right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \\ &\leq C_1 \frac{|y|}{|x|^{n+1}} \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^1 |g(tu)| u^s \frac{du}{u} \right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \\ &\leq C_1 \frac{|y|}{|x|^{n+1}} \int_0^1 \left\{ \int_0^1 |g(tu)|^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} u^s \frac{du}{u} \\ &\leq C_2 \frac{|y|}{|x|^{n+1}} \|g \mid L_q^*\|. \end{aligned}$$

Теперь для проверки условия 2) теоремы I остается заметить, что

$$\int_{|x| > 2|y|} \frac{|y|}{|x|^{n+1}} dx \leq C \quad \forall y \neq 0.$$

Из приведенных выкладок видно, что условия 1), 2) для оператора A с ядром K_ε выполнены с постоянными, не зависящими от $\varepsilon > 0$. В силу этого с помощью предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ под знаком интеграла Лебега заключаем, что будет ограниченным в $L_p(\mathbb{R}^n, L_q^*)$ оператор, стоящий в правой части (14). Этим вложение (13) при $1 < p, q < \infty$ установлено.

Установим вложение (13) в случае $1 < p \leq q = \infty$. В силу (7) имеем

$$\begin{aligned} &\sup_{0 < t < 1} t^{-s} D_{m-1}(t, G) f(x) \\ &\leq C \sup_{0 < t < 1} t^{-s-n} \int_0^t \int_{|y| < t} v^s \sup_{0 < w \leq 1} w^{-s} \delta^m(w, G) f(x+y) dy \frac{dv}{v} \\ &\leq C_1 \sup_{0 < t < 1} t^{-n} \int_{|y| < t} \sup_{0 < v \leq 1} v^{-s} \delta^m(v, G) f(x+y) dy, \end{aligned}$$

откуда переходом к L_p -норме в силу ограниченности оператора максимальной функции получаем желаемую оценку. Этим вложение (13) установлено.

Для получения вложений, противоположных вложениям (12), (13), также воспользуемся проекционным представлением (5). В правой части (5) вместо f можно написать

произвольный многочлен Q_{m-1} степени не выше $m-1$ с коэффициентами, зависящими от x и v . Оценивая разность $\Delta^m(h)f(0)$ как разность от правой части (5) через сумму модулей значений правой части при сдвинутых на kh аргументах, имеем

$$|\Delta^m(h)f(0)| \leq C \sum_{k=0}^m \int_0^1 \iint \chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \chi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \sum_{j=1}^{m+1} |(f - Q_{m-1})(kh(1-v) + jvy + vz)| dy dz \frac{dv}{v}.$$

Здесь $m|h| \leq 1$, коэффициенты Q_{m-1} зависят от $h, k, v, f: B_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Выбирая Q_{m-1} надлежащим образом, имеем

$$|\Delta^m(h)f(0)| \leq C \sum_{k=0}^m \int_0^{\frac{1}{2}} D_{m-1}(v, B_0) f(kh(1-v)) \frac{dv}{v} + C \int_{\frac{1}{2}}^1 D_{m-1}(v, B_0) f(0) \frac{dv}{v}.$$

Пусть $f: B(0, t) \rightarrow \mathbb{R}^1$. Применяя последнюю оценку к функции $f_t(x) = f(tx)$, получаем при $x = 0, G = B(0, t)$ оценку

$$|\Delta^m(th, G)f(x)| \leq C \sum_{k=1}^m \int_0^{\frac{t}{2}} D_{m-1}(v, G) f\left(x + kth\left(1 - \frac{v}{t}\right)\right) \frac{dv}{v} + C \int_0^t D_{m-1}(v, G) f(x) \frac{dv}{v}, \quad (15)$$

где $m|h| \leq 1, 0 < t < \min\{1, \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G)\}$.

С помощью сдвига видим, что оценка (15) справедлива для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ при $G = B(x, t)$. Но тогда она верна в приведенном в (15) виде. Считая в (15) $h = 1/m$ и положив $y = th$, получим

$$|\Delta^m(y, G)f(x)| \leq C \sum_{k=1}^m \int_0^{2m|y|} D_{m-1}(v, G) f\left(x + kh\left(1 - \frac{v}{t}\right)\right) \frac{dv}{v} + C \int_0^{2m|y|} D_{m-1}(v, G) f(x) \frac{dv}{v}, \quad |y| > 0$$

(при $m|y| \geq \text{dist}\{x, \mathbb{R}^n \setminus G\}$ левая часть равна нулю). Переходя к $L_p(G)$ -нормам, получаем отсюда

$$\|\Delta^m(y, G)f\|_p \leq C_1 \int_0^{2m|y|} \|D_{m-1}(v, G)f\|_p \frac{dv}{v}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, при $0 < \sigma < s, 1 \leq q < \infty$ получаем

$$\|\Delta^m(y, G)f\|_p \leq C_2 |y|^\sigma \left(\int_0^{2m|y|} (v^{-\sigma} \|D_{m-1}(v, G)f\|_p)^q \frac{dv}{v} \right)^{1/q},$$

откуда

$$\left(\int_{m|y| < 1} \|\Delta^m(y, G)f\|_p^q \frac{dy}{|y|^{sq+n}} \right)^{1/q} \leq C_3 \left(\int_0^1 \|D_{m-1}(v, G)f\|_p^q \frac{dv}{v^{sq+1}} \right)^{1/q}. \quad (16)$$

Это неравенство устанавливается без применения неравенства Гёльдера и при $q = \infty$.

Из (16) следует, что

$$\tilde{b}_{pq}^{s(m)}(G) \subset b_{pq}^{s(m)}(G). \quad (17)$$

Установим вложение

$$\tilde{l}_{pq}^{s(m)}(G) \subset l_{pq}^{s(m)}(G) \quad (18)$$

при $1 < p, q < \infty$ и при $1 < p \leq q = \infty$.

Интегрируя (15) по h при $m|h| < 1$, получаем

$$\begin{aligned} \delta^m(t, G)f(x) &\leq C \int \int_0^{\frac{t}{2}} D_{m-1}(v, G)f(x+y)t^{-n}\chi_0\left(\frac{y}{t}\right)\frac{dv}{v}dy \\ &\quad + C \int_0^t D_{m-1}(v, G)f(x)\frac{dv}{v}. \end{aligned}$$

Отсюда в обозначениях $g(v, x) = v^{-s}D_{m-1}(v, G)f(x)$ имеем

$$t^{-s}\delta^m(t, G)f(x) \leq CAg(t, x) + CBg(t, x), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} Ag(t, x) &= \int (K(y)g(\cdot, x+y))(t)dy, \\ (K(y)\phi)(t) &= t^{-s-n}\chi_0\left(\frac{y}{t}\right)\int_0^t v^s\phi(v)\frac{dv}{v}, \quad \phi \in L_q^*, \\ (Bg)(t, x) &= t^{-s}\int_0^t v^sg(v, x)\frac{dv}{v} = \int_0^1 u^sg(tu, x)\frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Ограниченность оператора $A: L_p(L_q^*) \rightarrow L_p(L_q^*)$ установлена при доказательстве (13).

Для доказательства ограниченности оператора $B: L_p(L_q^*) \rightarrow L_p(L_q^*)$ получаем сначала с помощью неравенства Гёльдера оценку ($0 < \varepsilon < s$)

$$(Bg)(t, x) \leq Ct^{-\varepsilon} \left(\int_0^t v^{\varepsilon q} g(v, x)^q \frac{dv}{v} \right)^{1/q},$$

откуда

$$\begin{aligned} \|(Bg)(\cdot, x) \mid L_q^*\|^q &\leq C^q \int_0^1 t^{-\varepsilon q} \int_0^t v^{\varepsilon q} g(v, x)^q \frac{dv}{v} \frac{dt}{t} \\ &\leq C_1^q \int_0^1 g(v, x)^q \frac{dv}{v} = C_1^q \|g(\cdot, x) \mid L_q^*\|^q. \end{aligned}$$

Теперь остается лишь перейти к $L_p(G)$ -нормам в последнем неравенстве. Из (19) и установленной ограниченности операторов A, B следует (18) при $1 < p, q < \infty$.

В случае $1 < p \leq q = \infty$ доказательство (18) элементарно следует из оценки (19) и ограниченности оператора максимальной функции в L_p при $1 < p \leq \infty$. Тем самым теоремы 1, 2 установлены.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [2] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
- [3] Трибелъ Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [4] Strichartz P. S. Multipliers on fractional Sobolev spaces // J. Math. Mech. 1967. V. 16. № 9. P. 1031–1060.
- [5] Лизоркин П. И. Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций // Тр. МИАН. 1972. Т. 117. С. 212–243.
- [6] Трибелъ Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
- [7] Аджиев С. С. Характеризация функциональных пространств $B_{p,q}^s(G)$, $L_{p,q}^s(G)$, $W_p^s(G)$ и вложения в $BMO(G)$ // Тр. МИАН. 1997. Т. 214. С. 7–24.
- [8] Triebel H. Local approximation spaces // Z. Anal. und Anwend. 1989. V. 88. № 3. P. 261–288.
- [9] Брудный Ю. А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. ММО. 1971. Т. 24. С. 71–132.
- [10] DeVore R. A., Sharpley R. S. Maximal function measuring smoothness // Mem. Amer. Math. Soc. 1984. V. 293.
- [11] Calderón A. P. Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // Stud. Math. 1972. V. 44. P. 563–682.
- [12] Schwartz J. A remark on inequalities of Calderón–Zygmund type for vector-valued functions // Comm. Pure and Appl. Math. 1961. V. 14. № 4. P. 785–799.
- [13] Бендек А., Кальдерон А. П., Панцоне Р. Операторы свертки на функциях со значениями в банаховом пространстве // Математика. 1963. Т. 7. № 5. С. 121–131.
- [14] Krée P. Propriétés de continuité dans L^p de certains noyaux // Boll. Unione Mat. Ital. 1967. V. 22. № 3. P. 330–334.
- [15] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.
- [16] Бесов О. В., Ильин В. П. Проекционные представления функций через разности // Тр. МИАН. 1979. Т. 150. С. 3–10.