Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Черников, Бикомпактное пространство гомотопически полноценно тогда и только тогда, когда оно есть абсолютный окрестностный h -ретракт, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 309–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2670>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 07:08:07

УДК 513.83

БИКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО ГОМОТОПИЧЕСКИ ПОЛНОЦЕННО ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ОНО ЕСТЬ АБСОЛЮТНЫЙ ОКРЕСТНОСТНЫЙ h -РЕТРАКТ

П. В. Черников

В заметке доказано, что бикомпактное пространство гомотопически полноценно тогда и только тогда, когда оно есть абсолютный окрестностный h -ретракт.

Библиография: 7 названий.

Топологическое пространство, гомотопически эквивалентное некоторому CW -комплексу, называется *гомотопически полноценным пространством* [1, с. 39]. В данной работе приводится описание бикомпактных гомотопически полноценных пространств.

В [2] определяется понятие абсолютного h -ретракта в классе бикомпактных пространств. В [5] вводится понятие абсолютного окрестностного h -ретракта в классе метрических пространств. Определим понятие абсолютного окрестностного h -ретракта в классе всех бикомпактных пространств.

Замкнутое подмножество A бикомпактного пространства X назовем *окрестностным h -ретрактом* X , если существуют окрестность U множества A в X и такое непрерывное отображение $r: U \rightarrow A$, что $r|_A \simeq \text{id}_A$. Отображение r называется *h -ретракцией*.

Бикомпакт Y назовем *абсолютным окрестностным h -ретрактом*, если всякое замкнутое подмножество A любого бикомпактного пространства X , гомеоморфное Y , является окрестностным h -ретрактом X .

Совокупность всех абсолютных окрестностных h -ретрактов обозначим через ANHR .

ЛЕММА 1. *Для того чтобы бикомпакт Y был абсолютным окрестностным h -ретрактом, необходимо и достаточно, чтобы Y был гомеоморфен окрестностному h -ретракту A тихоновского куба I^τ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО стандартное.

ЛЕММА 2. *Для того чтобы бикомпакт Y был абсолютным окрестностным h -ретрактом, необходимо и достаточно, чтобы для всякого непрерывного отображения $f: A \rightarrow Y$ замкнутого подмножества A любого бикомпактного пространства X в Y существовало такое непрерывное отображение $g: U \rightarrow Y$, где U – некоторая окрестность множества A в X , что $g|_A \simeq f$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО стандартное с использованием леммы 1.

ТЕОРЕМА. *Бикомпакт Y принадлежит ANHR тогда и только тогда, когда Y гомотопически эквивалентен некоторому CW -комплексу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть бикомпакт Y принадлежит ANHR. Покажем, что Y гомотопически эквивалентен CW -комплексу. По лемме 1 бикомпакт Y гомеоморфен окрестностному h -ретракту A тихоновского куба I^τ . Найдется открытое в I^τ множество $U \supset A$ и h -ретракция $r: U \rightarrow A$. Согласно [4, с. 158] существует такой конечный полиэдр P , что $A \subset P \times I^s \subset U$, где I^s — грань тихоновского куба I^τ . Следовательно, бикомпакт Y гомотопически доминируется полиэдром P и, значит, имеет гомотопический тип CW -комплекса [5, с. 542].

Обратно, пусть бикомпакт Y гомотопически эквивалентен некоторому CW -комплексу K . Пусть X — бикомпактное пространство, A — замкнутое подмножество X , $f: A \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Существуют такие непрерывные отображения $\varphi: Y \rightarrow K$, $\psi: K \rightarrow Y$, что $\psi\varphi \simeq \text{id}_Y$. Рассмотрим отображение $\varphi f: A \rightarrow K$. Найдется непрерывное продолжение $f': U \rightarrow K$ отображения φf , где U — окрестность множества A в пространстве X . Рассмотрим отображение $g = \psi f'$, $g: U \rightarrow Y$. Имеем

$$g|_A = \psi f'|_A = \psi\varphi f \simeq f.$$

Следовательно, по лемме 2 $Y \in \text{ANHR}$.

Теорема доказана.

Приведем пример линейного связного (доже ∞ -связного) метрического бикомпакта, не являющегося ANHR-пространством.

ПРИМЕР. Обозначим через C замыкание в плоскости $\mathbb{R}^2$ графика функции $y = \sin(\pi/x)$, где $0 < x \leq 1$, и рассмотрим простую дугу L с концами $(0, 1)$ и $(1, 0)$, пересекающуюся с C только в этих двух точках. Положим $X_0 = C \cup L$. Если бикомпакт X_0 принадлежит ANHR, то тогда по доказанной теореме он гомотопически эквивалентен некоторому CW -комплексу K . Очевидно, что $\pi_i(X_0) = 0$, $i \geq 0$, поэтому по теореме Уайтхеда CW -комплекс K стягиваем и, значит, бикомпакт X_0 стягиваем. Тогда $p_1 X_0 = p_1 \{\text{pt}\} = 0$, т.е. первые числа Бетти $p_1 X_0$ бикомпакта X_0 и $p_1 \{\text{pt}\}$ одноточечного пространства $\{\text{pt}\}$ равны. По классической теореме двойственности Александра [6, с. 171] равенство $p_1 X_0 = p_1 \{\text{pt}\}$ означает, что дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus X_0$ и $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{pt}\}$ имеют одно и то же число компонент. Противоречие. Таким образом, $X_0 \notin \text{ANHR}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичный пример пространства Y , не являющегося гомотопически полноценным, указан в [7, с. 453]. Но в этом примере пространство Y не бикомпактно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Постников М. М. Лекции по алгебраической топологии. Теория гомотопий клеточных пространств. М.: Наука, 1985.
- [2] Saalfrank C. W. A generalization of the concept of absolute retracts // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 374–378.
- [3] Черников П. В. Приближение измеримых отображений и ретракты // Деп. ВИНТИ № 2453-В90. М.: ВИНТИ, 1990.
- [4] Масси У. Теория гомологий и когомологий. М.: Мир, 1981.
- [5] Спенсер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
- [6] Александров П. С. Введение в гомологическую теорию размерности. М.: Наука, 1975.
- [7] Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.

Новосибирский государственный университет

Поступило
04.11.2004
Исправленный вариант
14.06.2005