Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, О полугруппах распределений с сингулярностью в нуле и ограниченных решениях линейных дифференциальных включений, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 1, 19–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2671>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:30:13

УДК 517.98

О ПОЛУГРУППАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ В НУЛЕ И ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов

Изучаются полугруппа распределений с сингулярностью в нуле и ее генератор. Установлена связь этой полугруппы с некоторой вырожденной полугруппой линейных операторов на правой полуоси, не содержащей нуля. В исследовании существенно используется спектральная теория линейных отношений. Получены приложения к вопросу о существовании ограниченных решений линейных дифференциальных включений.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. В данной работе исследуются полугруппы распределений, которые на промежутке $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ определяются с помощью некоторой сильно непрерывной вырожденной полугруппы линейных операторов. Такой класс полугрупп распределений возникает при изучении определенных типов линейных дифференциальных включений и линейных дифференциальных уравнений с необратимым оператором при производной. Основное содержание статьи составляют теоремы 3.2, 4.1, 4.2.

Пусть X – комплексное банахово пространство, $\text{End } X$ – алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Нами рассматриваются два типа полугрупп распределений, определяемых следующим образом.

Через $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ (соответственно $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$) обозначим пространство Шварца бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций, заданных на $\mathbb{R}_+$ (на $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty)$) и имеющих компактный носитель. Пространство Шварца $\mathcal{D}_+ \in \{\mathcal{D}(\mathbb{R}_+), \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)\}$, совпадающее с одним из введенных пространств, является топологической алгеброй с операцией умножения, определяемой сверткой Лапласа

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s) ds, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

функций $f, g \in \mathcal{D}_+$.

Последовательность функций (φ_n) из $\mathcal{D}_+$ называется *сходящейся* к $\varphi \in \mathcal{D}_+$, если

- 1) существует компакт $K \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ такой, что $\text{supp } \varphi_n \subset K, n \in \mathbb{N}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in K} |\varphi_n^{(i)}(t) - \varphi^{(i)}(t)| = 0$ для всех $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00141.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Непрерывный гомоморфизм алгебр $\mathcal{F}: \mathcal{D}_+ \rightarrow \text{End } X$ (т.е. $\mathcal{F}$ – линейный непрерывный оператор и $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ для всех $f, g \in \mathcal{D}_+$) называется *полугруппой распределений* на $\mathbb{R}_+$, если $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, и соответственно на $\overline{\mathbb{R}}_+$, если $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Отметим, что гомоморфизм $\mathcal{F}: \mathcal{D}_+ \rightarrow \text{End } X$ называется *непрерывным*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\varphi_n) = 0$$

для любой последовательности функций (φ_n) из $\mathcal{D}_+$, сходящейся к нулевой функции. Таким образом, линейный непрерывный оператор $\mathcal{F}: \mathcal{D}_+ \rightarrow \text{End } X$ является операторнозначным *распределением* в общепринятом смысле (см., например, [1]–[3]).

В дальнейшем под *полугруппой* операторов понимается сильно непрерывная операторнозначная функция $T: J \rightarrow \text{End } X$, где $J \in \{\mathbb{R}_+, \overline{\mathbb{R}}_+\}$, для которой

$$T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in J.$$

Полугруппа $T: J \rightarrow \text{End } X$ называется *вырожденной*, если ее ядро

$$\text{Ker } T = \bigcap_{t \in J} \text{Ker } T(t)$$

ненулевое.

Если $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ – полугруппа линейных операторов, то отображение $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \text{End } X$, определенное формулой

$$\mathcal{F}(\varphi)x = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)x \, ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+), \quad x \in X, \quad (1.1)$$

является полугруппой распределений на $\mathbb{R}_+$. Однако такое распределение не всегда можно расширить на алгебру $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Расширение допустимо, если, например, $T: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \text{End } X$ – полугруппа на $\overline{\mathbb{R}}_+$ (возможно, вырожденная). В этом случае та же формула (1.1) для $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ определяет гомоморфизм $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) \rightarrow \text{End } X$.

Если $\mathcal{F}: \mathcal{D}_+ \rightarrow \text{End } X$ – полугруппа распределений, то замкнутые подпространства $\text{Ker } \mathcal{F} = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{D}_+} \text{Ker } \mathcal{F}(\varphi)$, $\overline{\text{Im } \mathcal{F}}$, где $\overline{\text{Im } \mathcal{F}}$ – замыкание линейного подпространства $\text{Im } \mathcal{F} = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{D}_+} \text{Im } \mathcal{F}(\varphi)$ ($\text{Im } A$ – образ линейного оператора A), называются *ядром* и *образом* полугруппы распределений $\mathcal{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Впервые определение полугруппы распределений было дано Лионсом [1]. Как правило, полугруппой распределений называют (см. также [2], [3]) отображение $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \text{End } X$ на $\mathbb{R}_+$ (в смысле определения 1.1), причем предполагаются выполненными следующие три дополнительных условия:

- 1) $\text{Ker } \mathcal{F} = \{0\}$ (невыврожденность $\mathcal{F}$);
- 2) $\overline{\text{Im } \mathcal{F}} = X$ (плотность образа $\mathcal{F}$);
- 3) для любого вектора $x_0 \in \text{Im } \mathcal{F}$ существует непрерывная функция $x: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow X$ такая, что

$$x(0) = x_0 \quad \text{и} \quad \mathcal{F}(\varphi)x_0 = \int_0^\infty \varphi(s)x(s) \, ds$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$.

Для полугруппы распределений из замечания 1.1 естественным образом определяется *генератор*, который является линейным оператором [1]–[3]. Если же ядро $\text{Ker } \mathcal{F}$ ненулевое, то ее генератором будет линейное отношение на банаховом пространстве X . Понятие генератора для этого случая будет введено в п. 3 (см. определение 3.4).

В п. 2 дается сводка используемых здесь понятий и некоторых результатов из статьи авторов [4] (см. также монографии [5], [6]). Результаты из [4] используются также в начале п. 3.

2. Некоторые сведения из теории линейных отношений. *Линейным отношением* на банаховом пространстве X назовем любое линейное подпространство $\mathcal{A} \subset X \times X$. Совокупность всех замкнутых линейных отношений на X обозначим через $LR(X)$.

Подпространство

$$D(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid \exists y \in X \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\}$$

называется *областью определения* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$. Через $\mathcal{A}x$, где $x \in D(\mathcal{A})$, обозначается множество $\{y \in X \mid (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Подпространства

$$\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}) \mid (x, 0) \in \mathcal{A}\} \quad \text{и} \quad \text{Im } \mathcal{A} = \bigcup_{x \in D(\mathcal{A})} \mathcal{A}x$$

называются соответственно *ядром* и *образом* линейного (этот термин будет иногда опускаться) отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$. Отметим, что $\mathcal{A}x = y + \mathcal{A}0$ для всех $y \in \mathcal{A}x$.

Если $\mathcal{A} \in LR(X)$, то обратное отношение $\mathcal{A}^{-1} \in LR(X)$ определяется равенством

$$\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in \mathcal{A}\}.$$

Суммой двух отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(X)$ называется линейное подпространство из $X \times X$ вида

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x, y) \in X \times X \mid x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}), y \in \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\}.$$

Значит, $D(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$, и под $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ понимается алгебраическая сумма двух множеств $\mathcal{A}x, \mathcal{B}x$. *Произведением* отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(X)$ называется линейное подпространство

$$\mathcal{B}\mathcal{A} = \{(x, z) \in X \times X \mid \exists y \in D(\mathcal{B}) \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}, (y, z) \in \mathcal{B}\}.$$

Каждое отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ является *графиком* многозначного отображения $\tilde{\mathcal{A}}: D(\tilde{\mathcal{A}}) \subset X \rightarrow 2^X$, где $D(\tilde{\mathcal{A}}) = D(\mathcal{A})$ и $\tilde{\mathcal{A}}x = \mathcal{A}x$ для всех $x \in D(\mathcal{A})$. В дальнейшем они отождествляются, и для их обозначения используется один и тот же символ $\mathcal{A}$. Таким образом, множество $LO(X)$ линейных замкнутых операторов можно считать включенным в $LR(X)$. Итак, $\text{End } X \subset LO(X) \subset LR(X)$.

Сопряженное к $\mathcal{A} \in LR(X)$ отношение $\mathcal{A}^* \in LR(X^*)$, где X^* – сопряженное к X банахово пространство, определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}^* = \{(\xi, \eta) \in X^* \times X^* \mid \xi(y) = \eta(x) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Отношение $\mathcal{A}$ из $LR(X)$ назовем *непрерывно обратимым*, если $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } X$, т.е. $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$ и $\text{Im } \mathcal{A} = X$. *Резольвентным множеством* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \text{End } X$. *Спектром* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.

Отметим, что множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто, спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ замкнут.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Отображение

$$R(\cdot, \mathcal{A}): \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } X, \quad R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}),$$

называется *резольвентой* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$.

Резольвента отношения $\mathcal{A}$ является псевдорезольвентой в общепринятом смысле (см., например, [7, § 4.8]), причем

$$\mathcal{A}^m 0 = \text{Ker } R(\lambda_0, \mathcal{A})^m, \quad D(\mathcal{A}^m) = \text{Im } R(\lambda_0, \mathcal{A})^m \quad \forall \lambda_0 \in \rho(\mathcal{A}), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Если $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, то $\lambda \in \rho(\mathcal{A}^*)$ и $R(\lambda, \mathcal{A}^*) = R(\lambda, \mathcal{A})^*$.

Во избежание проблем, связанных с возможной пустотой спектра отношения, далее используется

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Расширенным спектром* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется подмножество $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ из расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которое совпадает с $\sigma(\mathcal{A})$, если $\mathcal{A} \in \text{End } X$. Если $\mathcal{A} \notin \text{End } X$ (т.е. когда $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \neq X$ либо $\mathcal{A}0 \neq \{0\}$), то полагаем $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) \cup \{\infty\}$. Множество $\tilde{\rho}(\mathcal{A}) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ называется *расширенным резольвентным множеством* отношения $\mathcal{A}$.

Справедлива (см. [4])

ТЕОРЕМА 2.1. Если $\mathcal{A} \in LR(X)$, то расширенный спектр $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1})$ обратного к $\mathcal{A}$ отношения $\mathcal{A}^{-1} \in LR(X)$ характеризуется соотношением

$$\tilde{\sigma}(\mathcal{A}^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \tilde{\sigma}(\mathcal{A})\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если $\mathcal{A} \in LR(X)$, то $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}) = \{\infty\}$ тогда и только тогда, когда $B = \mathcal{A}^{-1} \in \text{End } X$ – квазинильпотентный оператор. При этом

$$(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} = - \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i B^{i+1}.$$

В частности, резольвента отношения $\mathcal{A}$ является многочленом, если B – нильпотентный оператор.

Оператор $B \in \text{End } X$ назовем *перестановочным с отношением* $\mathcal{A} \in LR(X)$, если

$$(Bx, By) \in \mathcal{A} \quad \forall (x, y) \in \mathcal{A}.$$

Линейное подпространство $X_0 \subset X$ называется *инвариантным* относительно отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$, если

$$\mathcal{A}x_0 \cap X_0 \neq \{0\} \quad \forall x_0 \in D(\mathcal{A}) \cap X_0.$$

Сужением отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ на инвариантное подпространство X_0 называется линейное отношение вида $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright (X_0 \times X_0) \in LR(X)$. Для него будет использоваться обозначение $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright X_0$.

Если $X = X_0 \oplus X_1$ — прямая сумма двух инвариантных относительно $\mathcal{A} \in LR(X)$ подпространств и $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright X_0$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \upharpoonright X_1$, то будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ является *прямой суммой отношений* $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$, и использовать запись $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$.

Отметим, что если $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ и в разложении $X = X_0 \oplus X_1$ подпространства X_0, X_1 инвариантны относительно всех операторов $R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, то они инвариантны относительно $\mathcal{A}$, и тогда $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}_0) \cup \sigma(\mathcal{A}_1)$, причем $R(\lambda, \mathcal{A}_i) = R(\lambda, \mathcal{A}) \upharpoonright X_i$, $i = 0, 1$.

3. Полу группа распределений с сингулярностью в нуле. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$. Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \tag{3.1}$$

для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{A}x(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{3.2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Решением задачи (3.1), (3.2) называется дифференцируемая функция $x: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow X$ такая, что выполнено условие (3.1), $x(t) \in D(\mathcal{A})$ для всех $t \geq 0$ и выполнено включение (3.2). *Фазовым пространством* дифференциального включения (3.2) называется замыкание в X подпространства начальных условий вида (3.1), для которых существует решение задачи (3.1), (3.2). Обозначим фазовое пространство через $\Phi(\mathcal{A})$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X) \setminus LO(X)$, т.е. $\mathcal{A}0 \neq \{0\}$. Существуют такие числа $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{N}$, что имеет место включение

$$\mathbb{C}_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \geq \omega\} \subset \rho(\mathcal{A}) \tag{3.3}$$

и для всех $\lambda \in \mathbb{C}_\omega$ справедливы оценки

$$\|(R(\lambda, \mathcal{A}))^{mn}\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{mn}} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Справедлива (см. [4])

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть для отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ выполнено предположение 3.1 и векторы из подпространства $\mathcal{A}^m 0 \subset X$ разделяют векторы из подпространства $(\mathcal{A}^*)^m 0 \subset X^*$. Тогда банахово подпространство X допускает разложение в прямую сумму

$$X = X_0 \oplus X_\infty \quad (3.5)$$

двух замкнутых инвариантных относительно $\mathcal{A}$ подпространств X_0, X_∞ и справедливо соответствующее разложение отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_\infty. \quad (3.6)$$

В этом разложении $\mathcal{A}_0 = A_0 \in LO(X_0)$ – линейный оператор, являющийся инфинитезимальным оператором некоторой сильно непрерывной полугруппы операторов $T_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X_0$, $\tilde{\sigma}(\mathcal{A}_\infty) = \{\infty\}$ и $\mathcal{A}_\infty^{-1}$ – нильпотентный оператор из алгебры $\text{End } X_\infty$, причем $\mathcal{A}_\infty^{-m} = 0$. Фазовое пространство $\Phi(\mathcal{A})$ совпадает с X_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) \rightarrow \text{End } X$ – полугруппа распределений. Она называется *регулярной* в точке $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$, если существуют сильно непрерывная полугруппа операторов $T: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \text{End } X$ и окрестность V_0 точки t_0 такие, что все операторы $\mathcal{F}(\varphi)$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ с носителем $\text{supp } \varphi \subset V_0$, определяются формулой

$$\mathcal{F}(\varphi)x = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)x ds. \quad (3.7)$$

Дополнение к множеству регулярных точек назовем *сингулярным* множеством полугруппы распределений $\mathcal{F}$ и обозначим $\text{sing } \mathcal{F}$.

Отметим, что если $0 \notin \text{sing } \mathcal{F}$, то $\text{sing } \mathcal{F} = \emptyset$, и в этом случае $\mathcal{F}$ определяется формулой (3.7) по некоторой полугруппе операторов $T: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \text{End } X$.

Далее будут изучаться полугруппы распределений с $\text{sing } \mathcal{F} = \{0\}$. Класс полугрупп с сингулярностью в нуле обозначим через $DS(0)$.

ЛЕММА 3.1. Для того чтобы операторнозначное распределение $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) \rightarrow \text{End } X$ с носителем $\text{supp } \mathcal{F} = \{0\}$ являлось полугруппой распределений, необходимо и достаточно, чтобы оно допускало представление вида

$$\mathcal{F}(\varphi) = \sum_{i=0}^{m-2} \varphi^{(i)}(0)B^{i+1}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+), \quad (3.8)$$

где $B \in \text{End } X$ – нильпотентный оператор индекса нильпотентности m (т.е. $B^m = 0$, $B^{m-1} \neq 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Распределение $\mathcal{F}$ с $\text{supp } \mathcal{F} = \{0\}$ порядка сингулярности не выше $m - 2$ представимо в виде (см., например, [8])

$$\mathcal{F}(\varphi) = \sum_{i=0}^{m-2} \varphi^{(i)}(0)C_i, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+),$$

где $C_i, 0 \leq i \leq m-2$, – некоторые операторы из алгебры $\text{End } X$. Поскольку $\text{supp } \mathcal{F} = \{0\}$, то гомоморфизм $\mathcal{F}$ допускает естественное расширение до гомоморфизма (обозначаемого тем же символом) алгебры $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ всех бесконечно дифференцируемых на $\overline{\mathbb{R}}_+$ функций. Следовательно, он определен на функции Хэвисайда $\theta(t) \equiv 1$ на $\overline{\mathbb{R}}_+$ и на всех функциях

$$\theta_k = \underbrace{\theta * \dots * \theta}_{k \text{ сомножителей}}, \quad \theta_k(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \quad t \geq 0, \quad k \geq 2.$$

Тогда из равенств $\theta_k^{(i)}(0) = 0$ для $i \neq k$, $\theta_k^{(k)}(0) = 1$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\theta) &= C_0 = B, & \mathcal{F}(\theta_k) &= \theta_k^{(k)}(0)C_k = C_k = \mathcal{F}(\theta)^{k+1} = B^{k+1}, \quad 1 \leq i \leq m-2, \\ \mathcal{F}(\theta_k) &= 0, & k &\geq m-1. \end{aligned}$$

Таким образом, гомоморфизм $\mathcal{F}$ имеет вид (3.8).

Достаточность. Пусть гомоморфизм $\mathcal{F}$ порядка сингулярности не выше $m-2$ имеет вид (3.8). Значит, $B \in \text{End } X$ – нильпотентный оператор индекса нильпотентности m . Для любых функций $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ верны равенства

$$(\varphi * \psi)(0) = 0, \quad (\varphi * \psi)^{(k)}(0) = \sum_{j=0}^{k-1} \varphi^{(k-1-j)}(0)\psi^{(j)}(0), \quad k \geq 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-2} (\varphi * \psi)^{(i)}(0)B^{i+1} &= \varphi(0)\psi(0)B^2 + (\varphi'(0)\psi(0) + \varphi(0)\psi'(0))B^3 + \dots \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-3} \varphi^{(m-3-j)}(0)\psi^{(j)}(0)B^{m-1} \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \varphi^{(i)}(0)B^{i+1} \cdot \sum_{j=0}^{m-2} \psi^{(j)}(0)B^{j+1}, \end{aligned}$$

т.е. $\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi)$. Наконец, отметим, что $\text{sing } \mathcal{F} = \{0\} \iff B \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Полуруппу распределений $\mathcal{F} \in DS(0)$ назовем *разложимой*, если она представима в виде

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_\infty, \quad (3.9)$$

где $\mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_0$ – полуруппы распределений со свойствами:

- 1) $\text{supp } \mathcal{F}_\infty = \{0\}$;
- 2) $\text{sing } \mathcal{F}_0 = \emptyset$;
- 3) $\mathcal{F}_\infty(\varphi)\mathcal{F}_0(\psi) = 0$ для всех $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

ЛЕММА 3.2. Если полугруппа $\mathcal{F} \in DS(0)$ разложима, то она имеет вид

$$\mathcal{F}(\varphi)x = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)x ds + \sum_{i=0}^{m-2} \varphi^{(i)}(0)B^{i+1}x, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+), \quad x \in X, \quad (3.10)$$

где $B \in \text{End } X$ – нильпотентный оператор индекса нильпотентности $m \in \mathbb{N}$ и $T: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \text{End } X$ – полугруппа операторов. При этом $P = T(0)$ – проектор, подпространства

$$X_0 = \text{Im } P, \quad X_\infty = \text{Ker } P \quad (3.11)$$

инвариантны относительно операторов $\mathcal{F}(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, оператора B , и сужение B на подпространство X_0 является нулевым оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определение 3.3 влечет представление распределения $\mathcal{F}$ в форме (3.9). Так как $\text{supp } \mathcal{F}_\infty = \{0\}$, то из леммы 3.1 следует, что распределение $\mathcal{F}_\infty$ имеет вид (3.8) с нильпотентным оператором $B \neq 0$ индекса нильпотентности m . Поскольку $\text{sing } \mathcal{F}_0 = \emptyset$, то распределение $\mathcal{F}_0$ определяется формулой (3.7) по некоторой сильно непрерывной полугруппе $T: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \text{End } X$. Тогда $P = T(0)$ – проектор. Положим $X_0 = \text{Im } P$ и $X_\infty = \text{Ker } P$. Из формул (3.8), (3.9) вытекает, что операторы $\mathcal{F}(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, перестановочны с операторами $T(t)$, $t \geq 0$ (и, значит, с P), и с оператором B . Это означает, что подпространства X_0 , X_∞ инвариантны относительно операторов $\mathcal{F}(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, и, в частности, относительно оператора B . Из свойства 3) определения 3.3 получаем, что B – нулевой оператор на подпространстве X_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) \rightarrow \text{End } X$ – полугруппа распределений. Множество $\mathcal{A}$ упорядоченных пар $(x, y) \in X \times X$, где $x \in \overline{\text{Im } \mathcal{F}}$, для которых при всех $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ выполнено равенство

$$\varphi(0)x + \mathcal{F}(\varphi')x = -\mathcal{F}(\varphi)y, \quad (3.12)$$

называется генератором полугруппы распределений $\mathcal{F}$.

Непосредственно из определения 3.4 следует, что генератор $\mathcal{A}$ полугруппы распределений $\mathcal{F}$ является замкнутым линейным отношением на X , т.е. $\mathcal{A} \in LR(X)$.

ЛЕММА 3.3. Если полугруппа распределений $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) \rightarrow \text{End } X$ определена формулой (3.8), где $B \in \text{End } X$ – нильпотентный оператор индекса m , то ее генератор $\mathcal{A}$ имеет вид $\mathcal{A} = -B^{-1} \in LR(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 3.4 следует найти совокупность пар $(x, y) \in X \times X$, где $x \in \overline{\text{Im } \mathcal{F}}$, удовлетворяющих равенству

$$\varphi(0)x + \sum_{i=1}^{m-1} \varphi^{(i)}(0)B^i x = - \sum_{i=0}^{m-2} \varphi^{(i)}(0)B^{i+1}y \quad (3.13)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Из формулы (3.8) следует, что $\text{Im } \mathcal{F} = \text{Im } B$, и поэтому достаточно установить, что равенствам (3.13) удовлетворяют только упорядоченные пары вида $(-By, y)$, $y \in X$.

Если $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ такова, что $\varphi(0) = 1$ и $\varphi^{(i)}(0) = 0$, $1 \leq i \leq m-1$, то из (3.13) следует, что $x = -By$. Обратно, если $x = -By$, то равенства (3.13) выполнены для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Значит, генератор $\mathcal{A}$ полугруппы распределений $\mathcal{F}$ совпадает с отношением $-B^{-1}$.

ЛЕММА 3.4. Если полу группа распределений $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) \rightarrow \text{End } X$ определена формулой (3.7) и $P = T(0) \neq I$, то $\overline{\text{Im } \mathcal{F}} = \text{Im } \mathcal{F} = \text{Im } P = X_0$, и генератором распределения $\mathcal{F}$ является линейное отношение $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ с областью определения $D(\mathcal{A})$, совпадающей с областью определения $D(A_0)$ инфинитезимального оператора (см. [7]) $A_0: D(A_0) \subset X_0 \rightarrow X_0$ сужения $T_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X_0$ полу группы T на X_0 и $\mathcal{A}x = A_0x + X_\infty$, $x \in D(A_0)$, где X_0, X_∞ определены равенствами (3.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\text{Im } \mathcal{F} = \overline{\text{Im } \mathcal{F}} = \text{Im } P = X_0$. Согласно определению 3.4 отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ состоит из пар векторов $(x, y) \in X \times X$, где $x \in X_0$, для которых имеют место равенства

$$\varphi(0)x + \int_0^\infty \varphi'(s)T(s)x \, ds = - \int_0^\infty \varphi(s)T(s)y \, ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+). \quad (3.14)$$

Поскольку $x \in X_0$, то из (3.14) следует, что $\mathcal{A}$ состоит из таких пар $(x, y) \in X \times X$, что $y_0 = Py$ и выполнены равенства

$$\varphi(0)x + \int_0^\infty \varphi'(s)T_0(s)x \, ds = - \int_0^\infty \varphi(s)T_0(s)y_0 \, ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+). \quad (3.15)$$

Следовательно, $y = y_0 + y_\infty$, где y_∞ – любой вектор из подпространства $X_\infty = \text{Ker } P$.

Из (3.15) следует, что если $\varphi(0) = 1$, то $x \in D(A_0)$ (т.е. $x_0(t) = T(t)x$, $t \geq 0$, – непрерывно дифференцируемая функция), и интегрирование по частям интеграла

$$\int_0^\infty \varphi'(s)T_0(s)x \, ds$$

приводит к равенствам (3.15), где $y_0 = A_0x$. Следовательно,

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in X \times X \mid x \in D(A_0), y \in A_0x + X_\infty\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если $T: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \text{End } X$ – полу группа класса C_0 , то генератор полу группы распределений вида (3.7) совпадает с инфинитезимальным оператором полу группы T .

ЛЕММА 3.5. Пусть банахово пространство X допускает разложение в прямую сумму $X = X_1 \oplus X_2$ двух замкнутых подпространств X_1, X_2 , инвариантных относительно операторов $\mathcal{F}(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, полу группы распределений $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) \rightarrow \text{End } X$, и пусть $\mathcal{F}_i: \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) \rightarrow \text{End } X_i$, $i = 1, 2$, – полу группы распределений, являющиеся сужениями $\mathcal{F}$ на X_i (т.е. $\mathcal{F}_i(\varphi) = \mathcal{F}(\varphi) \upharpoonright X_i$, $i = 1, 2$). Тогда подпространства X_i , $i = 1, 2$, инвариантны относительно генератора $\mathcal{A}$ полу группы распределений $\mathcal{F}$, и $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_i$ – генератор полу группы распределений $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $P_1 \in \text{End } X$ проектор, осуществляющий разложение $X = X_1 \oplus X_2$ пространства X , т.е. $\text{Im } P_1 = X_1$, $\text{Ker } P_1 = X_2 = \text{Im } P_2$, где $P_2 = I - P_1$ – дополнительный проектор. Применяя к обеим частям равенства (3.12) проекторы P_i , $i = 1, 2$, получаем

$$\varphi(0)x_i + \mathcal{F}_i(\varphi')x_i = -\mathcal{F}_i(\varphi)y_i, \quad i = 1, 2,$$

где $x_i = P_i x$, $y_i = P_i y$, $i = 1, 2$. Из этих равенств следует, что если $x \in D(\mathcal{A}) \cap X_i$, $y \in \mathcal{A}x$, то $(x, P_i y) \in X_i$, $i = 1, 2$, т.е. X_i , $i = 1, 2$, – инвариантные для $\mathcal{A}$ подпространства. Ясно, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Для того чтобы линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ являлось генератором некоторой разложимой полугруппы распределений с сингулярностью в нуле $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) \rightarrow \text{End } X$, необходимо и достаточно, чтобы для отношения $\mathcal{A}$ выполнялось предположение 3.1 и векторы из подпространства $\mathcal{A}^m 0 \subset X$ разделяли функционалы из подпространства $(\mathcal{A}^*)^m 0 \subset X^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $\mathcal{A}$ – генератор разложимой полугруппы распределений $\mathcal{F}: \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) \rightarrow \text{End } X$ из $DS(0)$. Согласно лемме 3.2 полугруппа $\mathcal{F}$ представима в виде (3.10), и поэтому из лемм 3.2–3.5 следует, что X есть прямая сумма инвариантных относительно $\mathcal{A}$ подпространств X_0 и X_∞ (см. формулы (3.11)), отношение $\mathcal{A}$ представимо в виде (3.6), где $A_0: D(A_0) \subset X_0 \rightarrow X_0$ – производящий оператор полугруппы $T_0: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \text{End } X_0$, $T_0(t) = T(t) \upharpoonright X_0$, $t \geq 0$, класса C_0 , и $\mathcal{A}_\infty = -B_\infty^{-1}$, где $B_\infty = B \upharpoonright X_\infty$ – сужение нильпотентного оператора B на X_∞ . Поскольку резольвента $R(\cdot, A_0)$ оператора A_0 удовлетворяет условиям теоремы Хилле–Йосида [8, теорема 5.5], то существуют такие числа $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, что $\mathbb{C}_\omega \subset \rho(A_0)$ и для всех $\lambda \in \mathbb{C}_\omega$ справедливы оценки

$$\|(R(\lambda, A_0))^n\| \leq \frac{M}{(\text{Re } \lambda - \omega)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.16)$$

Из следствия 2.1 теоремы 2.1 получаем, что резольвента отношения $\mathcal{A}_\infty \in LR(X_\infty)$ представима в виде

$$R(\lambda, \mathcal{A}_\infty) = B_\infty \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i-1} \lambda^i B_\infty^i, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

и, значит, $R(\lambda, \mathcal{A}_\infty)^m = 0$. Отсюда вытекает, что $\mathbb{C}_\omega \subset \rho(A_0)$, и резольвента отношения $\mathcal{A}$ представима в виде

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = R(\lambda, A_0) \oplus R(\lambda, \mathcal{A}_\infty), \quad \lambda \in \mathbb{C}_\omega.$$

Следовательно,

$$R(\lambda, \mathcal{A})^{mn} = R(\lambda, A_0)^{mn} \oplus 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_\omega, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.17)$$

и поэтому из оценок (3.16) получаем, что верны соотношения (3.4) из предположения 3.1. При этом $\mathcal{A}^m 0 = \text{Ker } R(\lambda, \mathcal{A})^m = X_\infty$, $\lambda \in \mathbb{C}_\omega$.

Для резольвенты сопряженного к $\mathcal{A}$ отношения $\mathcal{A}^*$ из равенств (3.17) следует представление

$$R(\lambda, \mathcal{A}^*)^{mn} = R(\lambda, A_0^*)^{mn} \oplus 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_\omega, \quad n \in \mathbb{N},$$

относительно разложения

$$X^* = (X^*)_0 \oplus (X^*)_\infty,$$

осуществляемого проектором P^* , где $P = T(0)$, т.е. $(X^*)_0 = \text{Im } P^*$, $(X^*)_\infty = \text{Ker } P^*$. Поскольку $(X^*)_\infty = \text{Ker } R(\lambda, \mathcal{A}^*)^m = (\mathcal{A}^*)^m 0$, то в силу теоремы Хана–Банаха о продолжении функционалов (см. [7, теорема 2.7.2 и ее следствия]) векторы из подпространства $X_\infty = \mathcal{A}^m 0 \subset X$ разделяют функционалы из подпространства $(X^*)_\infty = (\mathcal{A}^*)^m 0 \subset X^*$.

Достаточность. Если для отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ выполнены условия теоремы, то из теоремы 3.1 (см. также [4, теорема 4.4]) следует, что банахово подпространство X допускает прямое разложение вида (3.5), где X_0, X_∞ – замкнутые инвариантные относительно $\mathcal{A}$ подпространства, и отношение $\mathcal{A}$ представимо в виде (3.6). Тогда из лемм 3.2–3.5 следует, что $\mathcal{A}$ – генератор разложимой полугруппы распределений $\mathcal{F}$ вида (3.10), где полугруппа $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ представима (относительно разложения (3.5)) в виде $T(t) = T_0(t) \oplus 0, t \geq 0$, A_0 – инфинитезимальный оператор C_0 – полугруппы T_0 и $B = 0 \oplus B_\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Векторы из подпространства $X_\infty = \mathcal{A}^m 0 \subset X$ разделяют функционалы из подпространства $(X^*)_\infty = (\mathcal{A}^*)^m 0 \subset X^*$ (для отношения $\mathcal{A}$, удовлетворяющего предположению 3.1), если выполнено одно из следующих условий:

- 1) банахово пространство X рефлексивно;
- 2) оператор $R(\lambda_0, \mathcal{A})$ слабо компактен при некотором $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ (и, значит, при любом $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$);
- 3) $\dim \mathcal{A}^m 0 = \dim (\mathcal{A}^*)^m 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если $\mathcal{F} \in DS(0)$ – разложимая полугруппа распределений вида (3.10), то из лемм 3.3, 3.4 следует, что резольвента ее генератора $\mathcal{A}$ представима в форме

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = R(\lambda, A_0) \oplus (\lambda I + B^{-1})^{-1} = R(\lambda, A_0) \oplus \sum_{i=0}^{m-2} (-1)^i \lambda^i B^{i+1}, \quad (3.18)$$

где $A_0 \in LO(X_0)$ – инфинитезимальный оператор некоторой полугруппы операторов $T_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X_0$ класса C_0 .

4. Об ограниченных решениях дифференциальных включений. В этом пункте всюду считается, что линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2, т.е. для него выполнено предположение 3.1, и векторы из подпространства $\mathcal{A}^m 0 \subset X$ разделяют функционалы из подпространства $(\mathcal{A}^*)^m 0 \subset X^*$.

Символом $C_b(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X и с нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|, \quad x \in C_b(\mathbb{R}, X).$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ через $C_b^{(k)}(\mathbb{R}, X)$ обозначим подпространство k раз непрерывно дифференцируемых функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$ с k -й производной из $C_b(\mathbb{R}, X)$ и с нормой

$$\|x\|_k = \|x\| + \|x^{(k)}\|, \quad x \in C_b^{(k)}(\mathbb{R}, X).$$

Символом $AP(\mathbb{R}, X)$ обозначим подпространство почти периодических функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$ (см. [9]).

Рассмотрим дифференциальное включение вида

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{A}x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

где $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$. *Ограниченным решением* включения (4.1) назовем функцию $x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}, X)$ такую, что $x(t) \in D(\mathcal{A})$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющую при всех $t \in \mathbb{R}$ дифференциальному включению (4.1), т.е.

$$(x(t), \dot{x}(t) - f(t)) \in \mathcal{A}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Из теоремы 3.1 и сделанных нами предположений об отношении $\mathcal{A}$ следует, что банахово подпространство X и отношение $\mathcal{A}$ допускают разложение вида (3.5), (3.6) с указанными в теореме 3.1 свойствами для оператора $A_0 \in LO(X_0)$ и отношения $\mathcal{A}_\infty \in LR(X_\infty)$.

Пусть $P \in \text{End } X$ – проектор, осуществляющий разложение (3.5) пространства X . Этот проектор перестановочен с $\mathcal{A}$, т.е. $(Px, Py) \in \mathcal{A}$ для всех $(x, y) \in \mathcal{A}$, причем $Px \in D(A_0)$ для всех $x \in D(\mathcal{A})$ и $Py = A_0Px$. Таким образом, функция $x_0(t) = Px(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является ограниченным решением дифференциального уравнения

$$\dot{y}(t) = A_0y(t) + f_0(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.1_0)$$

где $f_0(t) = Pf(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $f_0 \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}, X_0)$, если $x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}, X)$ – ограниченное решение дифференциального включения (4.1). Функция $x_\infty(t) = P_\infty x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $P_\infty = I - P$, принадлежит пространству $C_b(\mathbb{R}, X_\infty)$ и является решением дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathcal{A}_\infty y(t) + f_\infty(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $f_\infty(t) = P_\infty f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $f_\infty \in C_b^{(m-2)}(\mathbb{R}, X_\infty)$. Функция x_∞ , в свою очередь, является решением (см. [4, лемма 7.1]) дифференциального уравнения

$$B_\infty \dot{y}(t) = y(t) + B_\infty f_\infty(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.1_\infty)$$

где $B_\infty = \mathcal{A}_\infty^{-1} \in \text{End } X_\infty$ – нильпотентный оператор индекса нильпотентности m . Таким образом, задача об ограниченных решениях дифференциального включения (4.1) в наших предположениях свелась к задаче об ограниченных решениях системы дифференциальных уравнений (4.1₀), (4.1_∞).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Функцию $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ назовем *обобщенным решением* дифференциального включения (4.1), если

- 1) $x_0(t) = \int_0^t Px(\tau) d\tau \in D(A_0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$;
- 2) для функции $x_0: \mathbb{R} \rightarrow X_0$ выполнены соотношения

$$Px(t) = A_0 x_0(t) + \int_0^t f(\tau) d\tau + Px(0);$$

- 3) функция $x_\infty(t) = P_\infty x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является решением дифференциального уравнения (4.1 $_\infty$).

Отметим, что условие 2) из определения 4.1 на функцию $x_0: \mathbb{R} \rightarrow X_0$ можно заменить (см. [10]) эквивалентным условием, что она удовлетворяет равенствам

$$x_0(t) = T_0(t)x_0(s) - \int_s^t T_0(t-\tau)f(\tau) d\tau$$

для всех $s \leq t$ из $\mathbb{R}$. Здесь $T_0: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X_0$ – полугруппа класса C_0 , инфинитезимальным оператором которой служит оператор A_0 .

ТЕОРЕМА 4.1. Для того чтобы дифференциальное включение (4.1) имело единственное ограниченное обобщенное решение для любой функции f из подпространства

$$C_{b,m} = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) \mid P_\infty x \in C_b^{(m-2)}(\mathbb{R}, X_\infty)\}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset, \quad (4.3)$$

где $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ – единичная окружность. Если выполнено условие (4.3), то обобщенное решение $\tilde{x}$ дифференциального включения (4.1) представимо в виде

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_0(t-s)Pf(s)ds - \sum_{i=0}^{m-2} B_\infty^{i+1}(P_\infty f)^{(i)}(t). \quad (4.4)$$

Функция $\mathcal{G}_0: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X_0$ в (4.4) определяется равенствами

$$\mathcal{G}_0(s) = \begin{cases} T(s)P_0, & s \geq 0, \\ -T(s)P'_0, & s < 0, \end{cases}$$

где $P_0 \in \text{End } X_0$ – проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\sigma_0 = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_0) : |\lambda| < 1\}$ оператора $T_0(1) = T(1) \upharpoonright X_0$, I_0 – единица в алгебре $\text{End } X_0$, $P'_0 = I_0 - P_0$, операторы $T(s)P'_0$, $s < 0$, являются нулевыми на $X_{0,0} = P_0 X_0$ и обратными к $T(-s)P'_0 \in \text{End } X'_0$ на $X'_0 = P'_0 X_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Поскольку $C_{b,m}(\mathbb{R}, X)$ содержит подпространство $C_b(\mathbb{R}, X_0)$, то дифференциальное уравнение (4.1₀) имеет единственное ограниченное обобщенное решение для любой функции $f_0 \in C_b(\mathbb{R}, X_0)$. Из следствия теоремы 6 статьи [11] следует, что условие (4.3) является необходимым и достаточным для однозначной разрешимости уравнения (4.1₀) в классе обобщенных ограниченных решений для любой функции $f_0 \in C_b(\mathbb{R}, X_0)$. Поэтому решение x_0 уравнения (4.1₀) может быть представлено в виде (см. [9], [11])

$$x_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_0(t-s)f_0(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Так как $B_{\infty}f_{\infty} \in C_b^{(m-2)}(\mathbb{R}, X_{\infty})$, то непосредственная проверка показывает, что уравнение (4.1_∞) имеет единственное решение вида

$$x_{\infty}(t) = - \sum_{i=0}^{m-2} B_{\infty}^{i+1} f_{\infty}^{(i)}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Это решение единственно, ибо каждое ограниченное решение $x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}, X_{\infty})$ однородного дифференциального уравнения

$$B_{\infty}\dot{y}(t) = y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.7)$$

является нулевым. Докажем это. Пусть φ – любая функция с компактным носителем из банаховой алгебры $L_1(\mathbb{R})$ суммируемых на $\mathbb{R}$ комплекснозначных функций со сверткой функций в качестве операции умножения. Применяя к обеим частям уравнения (4.7) оператор свертки с функцией φ , получаем, что функция $x_1 = \varphi * x \in C_b(\mathbb{R}, X_{\infty})$ бесконечно дифференцируема и является решением уравнения (4.7). Следовательно, $x_1(t) = B_{\infty}^m x_1^{(m)}(t) \equiv 0$. Ввиду произвольности выбора функции φ из алгебры $L_1(\mathbb{R})$ получаем, что $x = 0$.

Функция $\tilde{x} = x_0 + x_{\infty}$, очевидно, является единственным решением дифференциального включения (4.1), причем из формул (4.5) и (4.6) следует представление решения $\tilde{x}$ вида (4.4).

Достаточность. Как уже отмечалось, условие (4.3) является достаточным для однозначной разрешимости дифференциального уравнения (4.1₀). Однозначная разрешимость дифференциального уравнения (4.7) была установлена выше. Таким образом, однозначно разрешимо и дифференциальное включение (4.1).

В силу теоремы об отображении спектра инфинитезимального оператора полугруппы класса C_0 (см. [7, гл. 16]) условие (4.3) влечет выполнение условия

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap (i\mathbb{R}) = \emptyset, \quad (4.8)$$

причем резольвента оператора A_0 ограничена на мнимой оси $i\mathbb{R}$. Ввиду наличия разложений (3.5), (3.6) и нильпотентности оператора B_{∞} будет выполнено условие

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, \mathcal{A})^m\| < \infty. \quad (4.9)$$

Оно эквивалентно условию ограниченности на $i\mathbb{R}$ резольвенты оператора A_0 . Поэтому ввиду теоремы Герхарда [12, гл. 4] выполнение условий (4.8) и (4.9) влечет выполнение условия (4.3), если X – гильбертово пространство. Условие (4.3) выполнено также в случае, когда $\mathcal{A}$ – секториальное линейное отношение (см. определение из [4]) и выполнены условия (4.8) и (4.9). Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$ и выполнено одно из условий:

- 1) X – гильбертово пространство;
- 2) $\mathcal{A}$ – секторальное линейное отношение.

Тогда дифференциальное включение (4.1) имеет единственное ограниченное обобщенное решение из $C_b(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in C_{b,m}(X)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (4.8) и (4.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если выполнены условия теоремы 4.1 и $f \in AP(\mathbb{R}, X)$ во включении (4.1), то и решение x этого включения будет почти периодической функцией.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lions J.-L. Les semi-groupes distributions // Portugal. Math. 1960. V. 19. P. 141–164.
- [2] Ushijima T. On the strong continuity of distribution semi-groups // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I. 1970. V. 17. P. 363–372.
- [3] Мельникова И. В., Филингов А. И. Интегрированные полугруппы и C -полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач // УМН. 1994. Т. 49. № 6. С. 111–150.
- [4] Баскаков А. Г., Чернышов К. И. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 11. С. 3–42.
- [5] Cross R. Multivalued Linear Operators. New York: M. Dekker, 1998.
- [6] Favini A., Yagi A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. Pure Applied Math. Ser. Monographs Textbooks. V. 215. New York: M. Dekker, 1998.
- [7] Хилле Е., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
- [8] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
- [9] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [10] Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser-Verlag, 2001.
- [11] Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. № 3. С. 1–11.
- [12] Engel K.-J., Nagel R. One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Graduate Texts in Math. V. 194: Springer-Verlag, 2000.

(А. Г. Баскаков) Воронежский государственный университет
(К. И. Чернышов) Воронежская государственная лесотехническая академия
E-mail: pmmmmio@main.vsu.ru, mmio@amm.vsu.ru, chern@vsau.ru

Поступило
28.05.2004