Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Е. Иванов, Слабо выпуклые множества и их свойства,
Матем. заметки, 2006, том 79, выпуск 1, 60–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2674>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 10:20:16

УДК 517.982.252+517.978.2

СЛАБО ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА

Г. Е. Иванов

В работе введено понятие слабо выпуклых множеств. Приведены неулучшаемые оценки констант слабой выпуклости суммы и разности множеств. Доказано, что в гильбертовом пространстве гладкость множества эквивалентна слабой выпуклости этого множества и его дополнения. Здесь гладкость множества по определению означает, что на границе множества определено поле векторов единичных внешних нормалей, причем это векторное поле удовлетворяет условию Липшица. Получена теорема о минимаксе для одного класса задач с гладкими лебеговыми множествами целевой функции и сильно выпуклыми ограничениями. В качестве приложения полученных результатов доказана теорема об альтернативе для программных стратегий в линейной дифференциальной игре качества.

Библиография: 4 названия.

Развитая в последние годы теория сильно выпуклых множеств и функций позволила получить определенные условия регулярности в теории экстремальных задач, оптимальном управлении и теории дифференциальных игр [1], [2]. В работах [3], [4] рассмотрены слабо выпуклые функции и, в частности, доказано, что гладкость (условие Липшица для градиента) функции $f(x)$ эквивалентна слабой выпуклости функций $f(x)$ и $-f(x)$.

В настоящей работе введено понятие слабо выпуклых множеств. Приведены неулучшаемые оценки констант слабой выпуклости суммы и разности множеств.

Доказано, что в гильбертовом пространстве гладкость множества эквивалентна слабой выпуклости этого множества и его дополнения. Здесь гладкость множества по определению означает, что на границе множества определено поле векторов единичных внешних нормалей, причем это векторное поле удовлетворяет условию Липшица.

Получена теорема о минимаксе для одного класса задач с гладкими лебеговыми множествами целевой функции и сильно выпуклыми ограничениями. В качестве приложения полученных результатов доказана теорема об альтернативе для программных стратегий в линейной дифференциальной игре качества.

1. Операции над множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы множества $X, Y \subset \mathcal{L}$ (здесь и далее, термин “множество” означает непустое множество). *Геометрическими*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-14053.

суммой и разностью или, что то же самое, суммой и разностью Минковского множеств X и Y называются соответственно множества

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}, \quad X \dot{-} Y = \{z : z + Y \subset X\}.$$

Произведением множества X на число λ называется множество

$$\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}.$$

Непосредственно из определения следует, что геометрическая разность $X \dot{-} Y$ – это пересечение сдвигов множества X на векторы $d \in -Y$:

$$X \dot{-} Y = \bigcap_{d \in -Y} (X + d).$$

Условимся, что в выражениях, не содержащих скобок, геометрические операции сложения, вычитания и умножения на число выполняются слева направо; приоритет имеет операция умножения.

Заметим, что не все аналоги свойств операций сложения, вычитания и умножения чисел справедливы для множеств. Например, в общем случае равенство

$$X \dot{-} Z + Y = X + Y \dot{-} Z$$

не справедливо. Далее будут получены достаточные условия справедливости такого равенства. Кроме того, будет показано, что равенство $X \dot{-} Z + Y = X + Y \dot{-} Z$ означает существование седловой точки для некоторой минимаксной задачи.

Через X^c будем обозначать дополнение множества X :

$$X^c = \{x \in \mathcal{L} : x \notin X\}.$$

Непосредственно из определений вытекают следующие свойства геометрических операций:

- 1) $X + Y = Y + X$;
- 2) $X + (Y + Z) = X + Y + Z$;
- 3) $X \dot{-} (Y + Z) = X \dot{-} Y \dot{-} Z$;
- 4) а) $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$;
 б) $\lambda(X \dot{-} Y) = \lambda X \dot{-} \lambda Y$;
 в) $(\lambda \mu)X = \lambda(\mu X)$;
- 5) $(X + d_1) \dot{-} (Y + d_2) = X \dot{-} Y + d_1 - d_2$ для любых векторов $d_1, d_2 \in \mathcal{L}$;
- 6) а) $X \dot{-} Y + Y \subset X$;
 б) $X \subset X + Y \dot{-} Y$;
 в) $Y \subset X \dot{-} (X \dot{-} Y)$;
- 7) а) если $X \subset Y$, то $\lambda X \subset \lambda Y$;
 б) если $X_1 \subset X_2, Y_1 \subset Y_2$, то $X_1 + Y_1 \subset X_2 + Y_2$;
 в) если $X_1 \subset X_2, Y_1 \supset Y_2$, то $X_1 \dot{-} Y_1 \subset X_2 \dot{-} Y_2$;
- 8) а) $X + (Y \dot{-} Z) \subset X + Y \dot{-} Z$;
 б) $X + (Y \dot{-} Z) \subset Y \dot{-} (Z \dot{-} X)$;
- 9) а) $X \dot{-} Y + Y \dot{-} Y = X \dot{-} Y$;

- б) $X + Y \dot{*} Y + Y = X + Y$;
 в) $X \dot{*} (X \dot{*} (X \dot{*} Y)) = X \dot{*} Y$;
 10) а) $(X \dot{*} Y)^c = -Y + X^c$;
 б) $(X + Y)^c = X^c \dot{*} (-Y)$;
 в) $X^c \dot{*} Y^c = -(Y \dot{*} X)$;
 11) $Y \dot{*} (Y \dot{*} X) = X + (-Y)^c \dot{*} (-Y)^c$;
 12) а) $(X \dot{*} Z) \cap (Y \dot{*} Z) = (X \cap Y) \dot{*} Z$;
 б) $(X \dot{*} Y) \cap (X \dot{*} Z) = X \dot{*} (Y \cup Z)$.

Перечисленные свойства геометрических операций будут свободно использоваться в дальнейшем изложении.

2. Сильно и слабо выпуклые множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в топологическом векторном пространстве $\mathcal{L}$ задано множество X . Через $\text{int } X$, $\text{cl } X$, ∂X будем обозначать соответственно внутренность, замыкание и границу множества X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Через $\langle x, y \rangle$ будем обозначать скалярное произведение элементов x и y гильбертова пространства $\mathcal{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Через $\mathcal{B}_R$ будем обозначать шар радиуса $R \geq 0$ в банаховом пространстве $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{B}_R = \{x \in \mathcal{L} : \|x\| \leq R\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $X \subset \mathcal{L}$ называется *сильно выпуклым с константой* $R > 0$, если $\mathcal{B}_R \dot{*} X \neq \emptyset$ и $\mathcal{B}_R \dot{*} (\mathcal{B}_R \dot{*} X) = X$.

Множество $X \subset \mathcal{L}$ называется *слабо выпуклым с константой* $R > 0$, если $X \neq \mathcal{L}$ и $X + \text{int } \mathcal{B}_R \dot{*} \text{int } \mathcal{B}_R = X$.

Множество $X \subset \mathcal{L}$ называется *сильно (слабо) вогнутым с константой* $R > 0$, если $X \neq \mathcal{L}$ и множество X^c сильно (слабо) выпукло с константой R .

Перечислим некоторые свойства слабо и сильно выпуклых множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{L}$ задано множество X . Пусть $R > 0$. Следующие условия эквивалентны:

- А) множество X сильно выпукло с константой R ;
 В) существует множество $X_1 \subset \mathcal{L}$ такое, что $X = \mathcal{B}_R \dot{*} X_1$;
 С) для любой точки $x \in X^c$ найдется вектор $d \in \mathcal{L}$ такой, что $X \subset d + \mathcal{B}_R$ и $x \notin d + \mathcal{B}_R$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{L}$ задано множество X . Пусть $R > 0$. Следующие условия эквивалентны:

- А) множество X слабо выпукло с константой R ;
 В) $X \neq \mathcal{L}$ и существует множество $X_1 \subset \mathcal{L}$ такое, что $X = X_1 \dot{*} \text{int } \mathcal{B}_R$;
 С) $X \neq \mathcal{L}$ и для любой точки $x \in X^c$ найдется вектор $d \in \mathcal{L}$ такой, что $x \in d + \text{int } \mathcal{B}_R \subset X^c$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{L}$ задано множество X . Пусть $R > 0$. Следующие условия эквивалентны:

- А) множество X слабо вогнуто с константой R ;
- В) $X \neq \mathcal{L}$ и существует множество $X_1 \subset \mathcal{L}$ такое, что $X = X_1 + \text{int } \mathcal{B}_R$;
- С) $X \neq \mathcal{L}$ и для любой точки $x \in X$ найдется вектор $d \in \mathcal{L}$ такой, что $x \in d + \text{int } \mathcal{B}_R \subset X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{L}$ задано множество X . Тогда

- А) если множество X сильно или слабо выпукло с константой $R > 0$, то множество X замкнуто;
- В) если множество X сильно или слабо вогнуто с константой $R > 0$, то множество X открыто.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{L}$ множество X сильно (слабо) выпукло или сильно (слабо) вогнуто с константой $R > 0$. Тогда

- А) для любого вектора $d \in \mathcal{L}$ множество $d + X$ удовлетворяет тому же условию;
- В) для любого числа $\lambda \neq 0$ множество λX соответственно сильно (слабо) выпукло или сильно (слабо) вогнуто с константой $|\lambda|R$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть заданы числа r, R , $0 < r < R$, и множество X в банаховом пространстве. Тогда

- А) если множество X сильно выпукло (вогнуто) с константой r , то множество X сильно выпукло (вогнуто) с константой R ;
- В) если множество X слабо выпукло (вогнуто) с константой R , то множество X слабо выпукло (вогнуто) с константой r .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{L}$ заданы множества X, Y . Тогда

- А) если множество X сильно (слабо) выпукло с константой $R > 0$ и $X \dot{-} Y \neq \emptyset$, то множество $X \dot{-} Y$ сильно (слабо) выпукло с константой R ;
- В) если множество X сильно (слабо) вогнуто с константой $R > 0$ и $X + Y \neq \mathcal{L}$, то множество $X + Y$ сильно (слабо) вогнуто с константой R ;
- С) если множества X, Y сильно (слабо) выпуклы с константой $R > 0$ и $X \cap Y \neq \emptyset$, то множество $X \cap Y$ сильно (слабо) выпукло с константой R ;
- Д) если множества X, Y сильно (слабо) вогнуты с константой $R > 0$ и $X \cup Y \neq \mathcal{L}$, то множество $X \cup Y$ сильно (слабо) вогнуто с константой R .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть в гильбертовом пространстве задано множество X . Пусть $R > 0$. Следующие условия эквивалентны:

- А) множество X сильно выпукло с константой R ;
- В) множество X выпукло, замкнуто и существует выпуклое замкнутое множество X_1 такое, что $X + X_1 = \mathcal{B}_R$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если в гильбертовом пространстве множества X, Y сильно выпуклы с константами $R > 0, r > 0$ соответственно, то множество $X + Y$ сильно выпукло с константой $R + r$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ множество X сильно выпукло с константой $r > 0$. Пусть заданы векторы $p \in \mathcal{H}$, $x \in X$ такие, что $\|p\| = 1$ и $\langle p, x - a \rangle \geq 0$ для любого вектора $a \in X$. Тогда $X \subset x - rp + \mathcal{B}_r$.

Предложения 1–7 следуют непосредственно из определений и свойств геометрических операций с множествами. Доказательство предложений 8–10 можно найти, например, в [1].

ЛЕММА 1. Пусть заданы числа δ, R_1, R_2 и векторы x_0, x_1, x_2 гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Пусть $\|x_1 - x_0\| \leq R_1 + \delta$, $\|x_2 - x_0\| \leq R_2 + \delta$, $\|x_2 - x_1\| \geq R_1 + R_2$. Тогда

$$\|(R_1 + R_2)x_0 - R_1x_2 - R_2x_1\|^2 \leq (R_1 + R_2)(4R_1R_2 + (R_1 + R_2)\delta)\delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы следует, что

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)^2 &\leq \|x_2 - x_1\|^2 = \|(x_0 - x_1) - (x_0 - x_2)\|^2 \\ &= \|x_0 - x_1\|^2 + \|x_0 - x_2\|^2 - 2\langle x_0 - x_1, x_0 - x_2 \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2\langle x_0 - x_1, x_0 - x_2 \rangle &\leq \|x_0 - x_1\|^2 + \|x_0 - x_2\|^2 - (R_1 + R_2)^2 \\ &\leq (R_1 + \delta)^2 + (R_2 + \delta)^2 - (R_1 + R_2)^2 \\ &= -2R_1R_2 + 2(R_1 + R_2)\delta + 2\delta^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|(R_1 + R_2)x_0 - R_1x_2 - R_2x_1\|^2 &= \|R_1(x_0 - x_2) + R_2(x_0 - x_1)\|^2 \\ &= R_1^2\|x_0 - x_2\|^2 + R_2^2\|x_0 - x_1\|^2 + 2R_1R_2\langle x_0 - x_1, x_0 - x_2 \rangle \\ &\leq R_1^2(R_2 + \delta)^2 + R_2^2(R_1 + \delta)^2 + 2R_1R_2(-R_1R_2 + (R_1 + R_2)\delta + \delta^2) \\ &= (R_1 + R_2)(4R_1R_2 + (R_1 + R_2)\delta)\delta. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задано множество A , сильно выпуклое с константой $R_1 > 0$. Пусть заданы вектор $c \in \mathcal{H}$ и число $R_2 > 0$ такие, что $(c + \text{int } \mathcal{B}_{R_2}) \cap A = \emptyset$. Тогда существует вектор $b \in \mathcal{H}$ такой, что $A \subset b + \mathcal{B}_{R_1}$ и $\|b - c\| \geq R_1 + R_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сильной выпуклости множества A следует выпуклость и замкнутость множества A . Поэтому существует вектор $x \in A$ такой, что $\|x - c\| \leq \|a - c\|$ для любого вектора $a \in A$. Из условия $(c + \text{int } \mathcal{B}_{R_2}) \cap A = \emptyset$ следует, что $\|x - c\| \geq R_2$.

Определим вектор $p = (c - x)/\|c - x\|$. Покажем, что

$$\langle p, x - a \rangle \geq 0 \quad \text{для любого вектора } a \in A. \quad (1)$$

Пусть $a \in A$. Так как множество A выпукло и $a \in A$, $x \in A$, то $x + t(a - x) \in A$ для любого $t \in (0; 1)$. Следовательно, для любого $t \in (0; 1)$ справедливо неравенство $\|x - c\| \leq \|x + t(a - x) - c\|$, т.е.

$$\|x - c\|^2 \leq \|x - c\|^2 + 2t\langle x - c, a - x \rangle + t^2\|a - x\|^2.$$

Поэтому $\langle x - c, a - x \rangle \geq 0$, т.е. $\langle p, x - a \rangle \geq 0$. Тем самым, доказано условие (1).

Из условия (1) в силу предложения 10 следует, что $A \subset x - R_1p + \mathcal{B}_{R_1}$. Определим вектор $b = x - R_1p$. Тогда

$$\|b - c\| = \|x - c - R_1p\| = \left\| x - c - R_1 \frac{c - x}{\|c - x\|} \right\| = \|x - c\| + R_1 \geq R_1 + R_2.$$

ЛЕММА 3. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множества X, Y . Пусть множество $\text{int } X$ слабо вогнуто с константой $R > 0$, множество X слабо выпукло с константой $\varrho > 0$, $\text{clint } X = X$. Пусть множество Y сильно выпукло с константой $r \in (0; R)$. Пусть $z \in X \stackrel{*}{\perp} Y$,

$$\sup\{\beta \geq 0 : z + Y + \mathcal{B}_\beta \subset X\} = \gamma < R - r.$$

Тогда $\partial X \cap (z + Y + \mathcal{B}_\gamma) \neq \emptyset$ и существуют числовая последовательность $\{\delta_k\}$ и последовательности $\{b_k\}$, $\{d_k\}$ векторов пространства $\mathcal{H}$ такие, что $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы условия

$$z + Y \subset b_k + \mathcal{B}_r, \quad d_k + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X, \quad \|b_k - d_k\| < R - r - \gamma + \delta_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из слабой выпуклости множества X следует замкнутость X . Отсюда и из определения супремума следует включение

$$z + Y + \mathcal{B}_\gamma \subset X. \quad (2)$$

Из определения супремума также следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено условие $z + Y + \mathcal{B}_{\gamma+1/k} \not\subset X$. Поэтому существует последовательность векторов $\{a_k\}$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$a_k \in (z + Y + \mathcal{B}_{\gamma+1/k}) \cap X^c. \quad (3)$$

Поскольку множество X слабо выпукло с константой ϱ , то для любого $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $c_k \in \mathcal{H}$ такой, что

$$a_k \in c_k + \text{int } \mathcal{B}_\varrho \subset X^c. \quad (4)$$

Из включений (2), (4) следует, что $(c_k + \text{int } \mathcal{B}_\varrho) \cap (z + Y + \mathcal{B}_\gamma) = \emptyset$. В силу пункта А) предложения 5 и предложения 9 множество $z + Y + \mathcal{B}_\gamma$ сильно выпукло с константой $r + \gamma$.

Зафиксируем произвольный номер $k \in \mathbb{N}$ и применим лемму 2 для множества $A = z + Y + \mathcal{B}_\gamma$, вектора $c = c_k$ и чисел $R_1 = r + \gamma$, $R_2 = \varrho$. Получим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $b_k \in \mathcal{H}$ такой, что

$$z + Y + \mathcal{B}_\gamma \subset b_k + \mathcal{B}_{r+\gamma} \quad (5)$$

и $\|b_k - c_k\| \geq \varrho + r + \gamma$.

Из включений (3), (5) следует, что $a_k \in b_k + \mathcal{B}_{r+\gamma+1/k}$. Поэтому

$$\|a_k - b_k\| \leq r + \gamma + \frac{1}{k}.$$

Из включения (4) следует, что $\|a_k - c_k\| < \varrho$. Применим лемму 1 для $x_0 = a_k$, $x_1 = b_k$, $x_2 = c_k$, $R_1 = r + \gamma$, $R_2 = \varrho$, $\delta = 1/k$. Получим, что

$$\|(\varrho + r + \gamma)a_k - (r + \gamma)c_k - \varrho b_k\|^2 \leq (\varrho + r + \gamma) \left(4\varrho(r + \gamma) + (\varrho + r + \gamma) \frac{1}{k} \right) \frac{1}{k}.$$

Следовательно,

$$\|(\varrho + r + \gamma)a_k - (r + \gamma)c_k - \varrho b_k\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Из (3) следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $y_k \in Y$ такой, что $\|z - a_k + y_k\| \leq \gamma + 1/k$. Из (2), (3) следует, что $a_k \notin z + Y + \mathcal{B}_\gamma$. Поэтому

$$\gamma < \|z - a_k + y_k\| \leq \gamma + \frac{1}{k}. \quad (7)$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим вектор

$$\tilde{x}_k = z + y_k - \frac{\gamma}{\|z - a_k + y_k\|}(z - a_k + y_k).$$

Тогда $\tilde{x}_k \in z + Y + \mathcal{B}_\gamma \subset X = \text{cl int } X$. Поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $x_k \in \text{int } X$ такой, что $\|x_k - \tilde{x}_k\| < 1/k$. Заметим, что

$$\tilde{x}_k - a_k = \left(1 - \frac{\gamma}{\|z - a_k + y_k\|}\right)(z - a_k + y_k).$$

Следовательно, $\|\tilde{x}_k - a_k\| = \|z - a_k + y_k\| - \gamma$. Отсюда и из соотношения (7) следует, что $\|\tilde{x}_k - a_k\| \leq 1/k$. Поэтому

$$\|x_k - a_k\| \leq \|x_k - \tilde{x}_k\| + \|\tilde{x}_k - a_k\| < \frac{1}{k} + \frac{1}{k}.$$

Таким образом,

$$\|x_k - a_k\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Из включения $x_k \in \text{int } X$ в силу слабой вогнутости множества $\text{int } X$ с константой R получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $d_k \in \mathcal{H}$ такой, что

$$x_k \in d_k + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X. \quad (9)$$

Из включений (4), (9) следует, что шары $c_k + \text{int } \mathcal{B}_\varrho$ и $d_k + \text{int } \mathcal{B}_R$ не пересекаются. Поэтому $\|d_k - c_k\| \geq R + \varrho$. Из включения (4) следует, что $\|a_k - c_k\| < \varrho$, а значит, $\|x_k - c_k\| < \varrho + \|x_k - a_k\|$. Из включения (9) следует, что $\|x_k - d_k\| < R$. Применим лемму 1 для $x_0 = x_k$, $x_1 = d_k$, $x_2 = c_k$, $\delta = \|x_k - a_k\|$, $R_1 = R$, $R_2 = \varrho$. Получим неравенство

$$\|(R + \varrho)x_k - Rc_k - \varrho d_k\|^2 \leq (R + \varrho)(4R\varrho + (R + \varrho)\|x_k - a_k\|)\|x_k - a_k\|.$$

Отсюда и из соотношения (8) следует, что

$$\|(R + \varrho)x_k - Rc_k - \varrho d_k\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Поскольку

$$\varrho(b_k - d_k) = ((R + \varrho)x_k - Rc_k - \varrho d_k) - ((\varrho + r + \gamma)x_k - \varrho b_k - (r + \gamma)c_k) - (R - r - \gamma)(x_k - c_k),$$

то

$$\varrho \|b_k - d_k\| \leq (R - r - \gamma) \|x_k - c_k\| + \Delta_k,$$

где $\Delta_k = \|(\varrho + r + \gamma)x_k - \varrho b_k - (r + \gamma)c_k\| + \|(R + \varrho)x_k - Rc_k - \varrho d_k\|$. Из соотношений (6), (8) следует, что $\|(\varrho + r + \gamma)x_k - \varrho b_k - (r + \gamma)c_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда и из (10) получаем, что

$$\Delta_k \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Так как в силу включения (4) справедливы неравенства

$$\|x_k - c_k\| \leq \|x_k - a_k\| + \|a_k - c_k\| < \varrho + \|x_k - a_k\|,$$

то $\varrho \|b_k - d_k\| < (R - r - \gamma)(\varrho + \|x_k - a_k\|) + \Delta_k$. Поэтому

$$\|b_k - d_k\| < R - r - \gamma + \delta_k, \quad (12)$$

где

$$\delta_k = \frac{1}{\varrho} ((R - r - \gamma) \|x_k - a_k\| + \Delta_k).$$

Из (8), (11) следует, что $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Из условий (3), (9) следует, что $a_m \notin d_k + \text{int } \mathcal{B}_R$, а значит, $\|a_m - d_k\| \geq R$ для любых $k, m \in \mathbb{N}$. Из включений (3), (5) следует, что $a_m \subset b_k + \mathcal{B}_{r+\gamma+1/m}$. Поэтому $\|a_m - b_k\| \leq r + \gamma + 1/m$ для любых $k, m \in \mathbb{N}$. Применим лемму 1 для $x_0 = b_k$, $x_1 = d_k$, $x_2 = a_m$, $R_1 = R - r - \gamma$, $R_2 = r + \gamma$, $\delta = \max\{\delta_k, 1/m\}$. Получим соотношение $\|Rb_k - (R - r - \gamma)a_m - (r + \gamma)d_k\| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} (R - r - \gamma) \|a_m - a_k\| &\leq \|Rb_k - (R - r - \gamma)a_m - (r + \gamma)d_k\| \\ &+ \|Rb_k - (R - r - \gamma)a_k - (r + \gamma)d_k\| \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому последовательность $\{a_m\}$ фундаментальна. В силу полноты пространства $\mathcal{H}$ последовательность $\{a_m\}$ сходится к некоторому вектору $a \in \mathcal{H}$.

Так как множество $z + Y + \mathcal{B}_\gamma$ сильно выпукло с константой $r + \gamma$, оно замкнуто. Отсюда и из включения (3) следует, что $a \in z + Y + \mathcal{B}_\gamma$. Так как $\|x_k - a\| \leq \|x_k - a_k\| + \|a_k - a\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $x_k \in X$, $a_k \notin X$, то $a \in \partial X$. Поэтому $\partial X \cap (z + Y + \mathcal{B}_\gamma) \neq \emptyset$. Отсюда и из (5), (9), (12) получаем утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 1 (о слабой вогнутости разности множеств). Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множества X, Y . Пусть множество $\text{int } X$ слабо вогнуто с константой $R > 0$, множество X слабо выпукло с константой $\varrho > 0$, $\text{clint } X = X$. Пусть множество Y сильно выпукло с константой $r \in (0; R)$. Тогда

- A) множество $(\text{int } X) \dot{+} Y$ слабо вогнуто с константой $R - r$;
- B) $(\text{int } X) \dot{+} Y = \text{int}(X \dot{+} Y)$;
- C) $\text{clint}(X \dot{+} Y) = X \dot{+} Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) Зафиксируем произвольный вектор $z \in (\text{int } X) \dot{*} Y$. Докажем существование вектора $d \in \mathcal{H}$ такого, что

$$\|z - d\| < R - r \quad \text{и} \quad d + Y + \text{int } \mathcal{B}_{R-r} \subset \text{int } X. \quad (13)$$

Определим число

$$\gamma = \sup\{\beta \geq 0 : z + Y + \mathcal{B}_\beta \subset X\}.$$

Если $\gamma \geq R - r$, то $z + Y + \text{int } \mathcal{B}_{R-r} \subset X$. В этом случае для вектора $d = z$ выполнены условия (13). Поэтому будем предполагать, что $\gamma < R - r$.

В силу леммы 3 справедливо равенство $\partial X \cap (z + Y + \mathcal{B}_\gamma) \neq \emptyset$ и существуют числовая последовательность $\{\delta_k\}$ и последовательности $\{b_k\}$, $\{d_k\}$ векторов пространства $\mathcal{H}$ такие, что $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы условия

$$z + Y \subset b_k + \mathcal{B}_r, \quad d_k + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X, \quad \|b_k - d_k\| < R - r - \gamma + \delta_k.$$

Так как $z \in (\text{int } X) \dot{*} Y$, то $z + Y \subset \text{int } X$, а значит, $\partial X \cap (z + Y) = \emptyset$. Отсюда и из условия $\partial X \cap (z + Y + \mathcal{B}_\gamma) \neq \emptyset$ следует, что $\gamma > 0$.

Отсюда и из неравенства $\|b_k - d_k\| \leq R - r - \gamma + \delta_k$ следует существование номера n такого, что $\|b_n - d_n\| < R - r$. Определим вектор $d = d_n - b_n + z$. Тогда $\|z - d\| = \|b_n - d_n\| < R - r$. Из включений $z + Y \subset b_n + \mathcal{B}_r$, $d_n + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X$ следует, что

$$d + Y + \text{int } \mathcal{B}_{R-r} \subset d + b_n - z + \mathcal{B}_r + \text{int } \mathcal{B}_{R-r} = d_n + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X.$$

Поэтому условие (13) выполнено.

Тем самым, для любого вектора $z \in (\text{int } X) \dot{*} Y$ доказано существование вектора $d \in \mathcal{H}$ такого, что $z \in d + \text{int } \mathcal{B}_{R-r} \subset (\text{int } X) \dot{*} Y$. Отсюда и из предложения 3 следует пункт А) теоремы.

В) Из пункта В) предложения 4 в силу слабой вогнутости множества $(\text{int } X) \dot{*} Y$ следует, что это множество открыто. Отсюда следует, что

$$(\text{int } X) \dot{*} Y = \text{int}((\text{int } X) \dot{*} Y) \subset \text{int}(X \dot{*} Y).$$

Докажем обратное включение: $\text{int}(X \dot{*} Y) \subset (\text{int } X) \dot{*} Y$. Пусть $z \in \text{int}(X \dot{*} Y)$; тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $z + \text{int } \mathcal{B}_\varepsilon \subset X \dot{*} Y$. Следовательно, $z + Y + \text{int } \mathcal{B}_\varepsilon \subset X$. Поэтому $z + Y \subset \text{int } X$, а значит, $z \in (\text{int } X) \dot{*} Y$.

С) Из замкнутости множества X следует замкнутость множества $X \dot{*} Y$. Поэтому

$$\text{cl int}(X \dot{*} Y) \subset \text{cl}(X \dot{*} Y) = X \dot{*} Y.$$

Покажем, что обратное включение $X \dot{*} Y \subset \text{cl int}(X \dot{*} Y)$ также выполнено. Пусть $z \in X \dot{*} Y$. Требуется доказать, что $z \in \text{cl int}(X \dot{*} Y)$. Определим число

$$\gamma = \sup\{\beta \geq 0 : z + Y + \mathcal{B}_\beta \subset X\}.$$

Если $\gamma > 0$, то $z + Y \subset \text{int } X$. Следовательно, $z \in (\text{int } X) \dot{*} Y = \text{int}(X \dot{*} Y) \subset \text{cl int}(X \dot{*} Y)$. Поэтому в случае $\gamma > 0$ включение $z \in \text{cl int}(X \dot{*} Y)$ выполнено. Остается рассмотреть случай $\gamma = 0$.

В силу леммы 3 существуют числовая последовательность $\{\delta_k\}$ и последовательности $\{b_k\}$, $\{d_k\}$ векторов пространства $\mathcal{H}$ такие, что $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы условия

$$z + Y \subset b_k + \mathcal{B}_r, \quad d_k + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X, \quad \|b_k - d_k\| < R - r + \delta_k.$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим вектор

$$f_k = \begin{cases} \frac{\delta_k}{\|d_k - b_k\|}(d_k - b_k), & \text{если } d_k \neq b_k, \\ 0, & \text{если } d_k = b_k. \end{cases}$$

Тогда $\|f_k\| \leq \delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Заметим, что

$$\|b_k - d_k + f_k\| = \|b_k - d_k\| - \delta_k < R - r.$$

Поэтому $b_k + f_k - d_k \in \text{int } \mathcal{B}_{R-r}$. Отсюда и из включений

$$z + Y \subset b_k + \mathcal{B}_r, \quad d_k + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X$$

следует, что

$$z + f_k + Y \subset b_k + f_k + \mathcal{B}_r \subset d_k + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X.$$

Следовательно, $z + f_k \in (\text{int } X) \overset{*}{\cup} Y = \text{int}(X \overset{*}{\cup} Y)$. Поэтому $z \in \text{cl int}(X \overset{*}{\cup} Y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $X = \mathcal{B}_R$, $Y = \mathcal{B}_r$, $0 < r < R$, то $(\text{int } X) \overset{*}{\cup} Y = \text{int } \mathcal{B}_{R-r}$. Этот пример показывает неулучшаемость оценки константы $R - r$ слабой вогнутости множества $(\text{int } X) \overset{*}{\cup} Y$ при условиях, что множество $\text{int } X$ слабо вогнуто с константой R , а множество Y сильно выпукло с константой r .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Согласно теореме 1 константа ρ слабой выпуклости множества X не влияет на константу $R - r$ слабой вогнутости множества $(\text{int } X) \overset{*}{\cup} Y$. Тем не менее, для слабой вогнутости множества $(\text{int } X) \overset{*}{\cup} Y$ слабая выпуклость множества X существенна. Действительно, рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ множества $Y = \mathcal{B}_1$, $X = (\bar{x}_1 + \mathcal{B}_2) \cup (\bar{x}_2 + \mathcal{B}_2)$, где

$$\bar{x}_1 = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \quad \bar{x}_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|,$$

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ — замкнутые шары радиусов 1 и 2 с центром в точке $\bar{0}$. Поскольку множество $\text{int } X$ является объединением двух открытых шаров радиуса 2, согласно пункту D) предложения 7 множество $\text{int } X$ слабо вогнуто с константой $R = 2$. Множество Y сильно выпукло с константой $r = 1$. Покажем, что множество $(\text{int } X) \overset{*}{\cup} Y$ не является слабо выпуклым с константой $R - r = 1$. Определим вектор

$$\bar{x}_3 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\|.$$

Так как множество $\text{int } X$ содержит шар с центром в точке $\bar{x}_3$ и радиусом $\sqrt{3} - 1/2 > 1$, то $\bar{x}_3 \in (\text{int } X) \overset{*}{\cup} Y$. Покажем, что не существует вектора $d \in \mathbb{R}^2$ такого, что $\bar{x}_3 \in d + \text{int } \mathcal{B}_1 \subset (\text{int } X) \overset{*}{\cup} Y$. Предположим, что такой вектор d существует. Тогда $\|\bar{x}_3 - d\| < 1$ и $d + \text{int } \mathcal{B}_2 \subset X$. Из включения $d + \text{int } \mathcal{B}_2 \subset X$ следует, что $d = \bar{x}_1$ или $d = \bar{x}_2$. Но тогда неравенство $\|\bar{x}_3 - d\| < 1$ не выполнено. Поэтому в силу предложения 3 множество $(\text{int } X) \overset{*}{\cup} Y$ не является слабо выпуклым с константой $R - r = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если множество Y является компактом, то, как легко видеть, множество $(\text{int } X) \pm Y$ открыто. Отсюда, повторяя доказательство пункта В) теоремы 1, легко получить равенство $\text{int}(X \pm Y) = (\text{int } X) \pm Y$. Поскольку в конечномерном пространстве сильно выпуклое множество является компактом, в конечномерном пространстве для сильно выпуклого множества Y и произвольного множества X справедливо равенство $\text{int}(X \pm Y) = (\text{int } X) \pm Y$. В бесконечномерном пространстве это равенство в общем случае не справедливо. Действительно, рассмотрим, например, в пространстве ℓ_2 множества

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-2} x_k^2 < 1 \right\}, \quad Y = \mathcal{B}_1.$$

Тогда множество X открыто, $X \pm Y = \{\bar{0}\}$, $\text{int}(X \pm Y) = \emptyset$, $(\text{int } X) \pm Y = \{\bar{0}\}$. Поэтому равенство $\text{int}(X \pm Y) = (\text{int } X) \pm Y$ не выполнено.

ТЕОРЕМА 2 (о слабой выпуклости суммы множеств). Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множества X, Y . Пусть множество X слабо выпукло с константой $R > 0$, множество $\text{int } X$ слабо вогнуто с константой $\varrho > 0$, $\text{cl int } X = X$. Пусть множество Y сильно выпукло с константой $r \in (0; R)$. Тогда

- А) множество $X + Y$ слабо выпукло с константой $R - r$;
- В) $\text{int}(X + Y) = (\text{int } X) + Y$;
- С) $\text{cl int}(X + Y) = X + Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим множества $X_1 = (\text{int } X)^c$, $Y_1 = -Y$. Так как множество X слабо выпукло с константой R , множество $\text{int } X_1 = \text{int}((\text{int } X)^c) = (\text{cl int } X)^c = X^c$ слабо вогнуто с константой R . Из слабой вогнутости множества $\text{int } X$ с константой ϱ следует слабая выпуклость множества X_1 . Так как множество Y сильно выпукло с константой r , множество Y_1 обладает тем же свойством. В силу теоремы 1 множество $(\text{int } X_1) \pm Y_1$ слабо вогнуто с константой $R - r$ и справедливы равенства

$$(\text{int } X_1) \pm Y_1 = \text{int}(X_1 \pm Y_1), \quad \text{cl int}(X_1 \pm Y_1) = X_1 \pm Y_1.$$

Из слабой вогнутости множества $(\text{int } X_1) \pm Y_1 = X^c \pm Y_1$ с константой $R - r$ следует слабая выпуклость множества $(X^c \pm Y_1)^c = X + Y$ с константой $R - r$.

Из равенства $(\text{int } X_1) \pm Y_1 = \text{int}(X_1 \pm Y_1)$ следует, что

$$((\text{int } X_1) \pm Y_1)^c = (\text{int}(X_1 \pm Y_1))^c,$$

т.е. $X + Y = \text{cl}((\text{int } X) + Y)$.

Из равенства $\text{cl int}(X_1 \pm Y_1) = X_1 \pm Y_1$ следует равенство

$$(\text{cl int}(X_1 \pm Y_1))^c = (X_1 \pm Y_1)^c,$$

т.е. $\text{int cl}((\text{int } X) + Y) = (\text{int } X) + Y$.

Отсюда и из равенства $X + Y = \text{cl}((\text{int } X) + Y)$ следует, что $\text{int}(X + Y) = (\text{int } X) + Y$, а значит, $X + Y = \text{cl}((\text{int } X) + Y) = \text{cl int}(X + Y)$.

3. Слабая выпуклость и гладкость множеств.

ЛЕММА 4. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задано множество X такое, что множество $\text{cl } X$ слабо выпукло с константой $R_1 > 0$, а множество $\text{int } X$ слабо вогнуто с константой $R_2 > 0$. Пусть $\text{int cl } X = \text{int } X$, $\text{cl int } X = \text{cl } X$. Тогда для любой граничной точки $x \in \partial X$ существует вектор $p = p(x) \in \mathcal{H}$ такой, что

$$\|p\| = 1, \quad x + R_1 p + \text{int } \mathcal{B}_{R_1} \subset \text{int}(X^c), \quad x - R_2 p + \text{int } \mathcal{B}_{R_2} \subset \text{int } X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \partial X$. Так как $x \in (\text{int } X)^c = (\text{int cl } X)^c = \text{cl}((\text{cl } X)^c)$, для любого $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $x_k \in (\text{cl } X)^c$ такой, что $\|x_k - x\| < 1/k$. Поэтому в силу слабой выпуклости множества $\text{cl } X$ с константой R_1 существует вектор $a_k \in \mathcal{H}$ такой, что $x_k \in a_k + \text{int } \mathcal{B}_{R_1} \subset (\text{cl } X)^c$. Следовательно, $\|a_k - x\| < R_1 + 1/k$.

Аналогично в силу слабой вогнутости множества $\text{int } X$ с константой R_2 и включения $x \in \text{cl } X = \text{cl int } X$ получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует вектор b_n такой, что $b_n + \text{int } \mathcal{B}_{R_2} \subset \text{int } X$ и $\|b_n - x\| < R_2 + 1/n$.

Так как шары $a_k + \text{int } \mathcal{B}_{R_1}$ и $b_n + \text{int } \mathcal{B}_{R_2}$ не пересекаются, то $\|a_k - b_n\| \geq R_1 + R_2$ для любых $k, n \in \mathbb{N}$. Применяя лемму 1 для $x_0 = x$, $x_1 = a_k$, $x_2 = b_n$, $\delta = \max\{1/k, 1/n\}$, получим, что

$$\|(R_1 + R_2)x - R_1 b_n - R_2 a_k\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Отсюда следует, что

$$R_2 \|a_n - a_k\| \leq \|(R_1 + R_2)x - R_1 b_n - R_2 a_n\| + \|(R_1 + R_2)x - R_1 b_n - R_2 a_k\| \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. Поэтому последовательность $\{a_k\}$ фундаментальна. Аналогично доказывается фундаментальность последовательности $\{b_n\}$. В силу полноты пространства $\mathcal{H}$ последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к некоторым векторам a и b соответственно. Обозначим $p = (x - b)/R_2$. Тогда $b = x - R_2 p$. Из соотношения (14) следует, что $(R_1 + R_2)x - R_1 b - R_2 a = 0$. Поэтому $a = x + R_1 p$.

Покажем, что $b + \text{int } \mathcal{B}_{R_2} \subset \text{int } X$. Предположим противное: существует вектор $z \in b + \text{int } \mathcal{B}_{R_2}, z \notin \text{int } X$. Из включения $b_n + \text{int } \mathcal{B}_{R_2} \subset \text{int } X$ следует, что $\|b_n - z\| \geq R_2$. Отсюда и из соотношения $b_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$ следует, что $\|b - z\| \geq R_2$, что противоречит условию $z \in b + \text{int } \mathcal{B}_{R_2}$. Аналогично, из соотношений $a_k + \text{int } \mathcal{B}_{R_1} \subset (\text{cl } X)^c$ и $a_k \rightarrow a$ при $k \rightarrow \infty$ следует, что $a + \text{int } \mathcal{B}_{R_1} \subset \text{int}(X^c)$.

ЛЕММА 5. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задано множество X . Пусть для любой точки $x \in \partial X$ существует вектор $p = p(x) \in \mathcal{H}$ такой, что $\|p\| = 1$, $x + R p + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int}(X^c)$, $x - R p + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X$. Тогда функция $p: \partial X \rightarrow \mathcal{H}$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/R$, т.е. для любых точек $x_1, x_2 \in \partial X$ справедливо неравенство

$$\|p(x_1) - p(x_2)\| \leq \frac{1}{R} \|x_1 - x_2\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, x_2 \in \partial X$. Обозначим $d = x_1 - x_2$, $p_1 = p(x_1)$, $p_2 = p(x_2)$. Так как $(x_1 + Rp_1 + \text{int } \mathcal{B}_R) \cap (x_2 - Rp_2 + \text{int } \mathcal{B}_R) = \emptyset$, то

$$\|Rp_1 + Rp_2 + d\| \geq 2R.$$

Так как $(x_1 - Rp_1 + \text{int } \mathcal{B}_R) \cap (x_2 + Rp_2 + \text{int } \mathcal{B}_R) = \emptyset$, то

$$\|Rp_1 + Rp_2 - d\| \geq 2R.$$

Следовательно,

$$R^2\|p_1 + p_2\|^2 + \|d\|^2 \geq 4R^2 = 2R^2\|p_1\|^2 + 2R^2\|p_2\|^2.$$

Поэтому $\|d\|^2 \geq R^2\|p_1 - p_2\|^2$, а значит,

$$\|p_1 - p_2\| \leq \frac{1}{R}\|x_1 - x_2\|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{L}$ заданы множество X и точка x_0 . *Контингентным конусом (конусом Булигана)* называется множество

$$T_X(x_0) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\delta > 0} \bigcup_{t \in (0; \delta)} \left(\frac{1}{t}(X - x_0) + \mathcal{B}_\varepsilon \right).$$

Непосредственно из определения контингентного конуса следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{L}$ заданы множество X и точка x_0 . Вектор $v \in \mathcal{L}$ принадлежит конусу $T_X(x_0)$ тогда и только тогда, когда существуют числовая последовательность $\{\lambda_k\}$ и последовательность $\{v_k\}$ элементов пространства $\mathcal{L}$ такие, что $\lambda_k \rightarrow 0$, $v_k \rightarrow v$ при $k \rightarrow \infty$ и $\lambda_k > 0$, $x_0 + \lambda_k v_k \in X$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множество X и точка x_0 . Вектор $p_0 \in \mathcal{H}$ называется *единичным вектором внешней нормали* множества X в точке x_0 , если

$$\|p_0\| = 1, \quad T_X(x_0) = \{x \in \mathcal{H} : \langle p_0, x \rangle \leq 0\} \quad \text{и} \quad T_{X^c}(x_0) = \{x \in \mathcal{H} : \langle p_0, x \rangle \geq 0\}.$$

Непосредственно из определения следует, что вектор p_0 является вектором внешней нормали множества X в точке x_0 тогда и только тогда, когда вектор $-p_0$ является вектором внешней нормали множества X^c в точке x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть заданы число $L > 0$ и множество X в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Будем говорить, что множество X является *телесно-гладким с константой L* , если $\partial X \neq \emptyset$ и существует функция $p: \partial X \rightarrow \mathcal{H}$ (мы ее будем называть *полем единичных нормалей* множества X) такая, что

- А) для любой граничной точки $x \in \partial X$ вектор $p(x)$ является единичным вектором внешней нормали множества X в точке x и
- В) функция $p(x)$ удовлетворяет условию Липшица на множестве ∂X с константой L :

$$\|p(x_1) - p(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad \text{для любых } x_1, x_2 \in \partial X.$$

Заметим, что граница телесно-гладкого множества является гладким многообразием коразмерности 1. Однако из того, что граница множества X является гладким многообразием коразмерности 1 еще не следует, что множество X является телесно-гладким. Например, множество $X = \{x \in \mathcal{H} : \|x\| \neq 1\}$ не является телесно-гладким, так как для любой точки $x \in \partial X$ контингентный конус $T_X(x)$ совпадает со всем пространством $\mathcal{H}$, а значит, не существует единичного вектора внешней нормали. Однако граница множества X — это единичная сфера $\partial X = \{x \in \mathcal{H} : \|x\| = 1\}$, которая является гладким многообразием коразмерности 1.

ЛЕММА 6. Пусть числовое множество $X \subset \mathbb{R}$ является телесно-гладким с константой $1/R$, $R > 0$. Пусть p_0 — единичный вектор внешней нормали множества X в точке $x_0 \in \partial X$. Тогда справедливо включение $x_0 - Rp_0 + \text{int } \mathcal{B}_R \subset X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим r_0 как супремум чисел $r > 0$ таких, что $(x_0 - rp_0 - r; x_0 - rp_0 + r) \subset X$. В случае $r_0 \geq R$ имеем

$$x_0 - Rp_0 + \text{int } \mathcal{B}_R = (x_0 - Rp_0 - R; x_0 - Rp_0 + R) \subset (x_0 - r_0 p_0 - r_0; x_0 - r_0 p_0 + r_0) \subset X.$$

Поэтому в данном случае утверждение леммы справедливо.

Покажем, что случай $r_0 < R$ не реализуется. Предположим, что $r_0 < R$. Из определения вектора внешней нормали следует, что $r_0 > 0$. Определим число $x_1 = x_0 - 2r_0 p_0$. Из определения супремума следует, что $x_1 \in \partial X$. Пусть p_1 — единичный вектор внешней нормали множества X в точке x_1 . Из включения $(x_1 + r_0 p_0 - r_0; x_1 + r_0 p_0 + r_0) \subset X$ и определения вектора внешней нормали получаем, что $p_1 = -p_0$. Отсюда следует, что $|p_1 - p_0| = 2|p_0| = 2$. Поскольку множество X является телесно-гладким с константой $1/R$, то

$$|p_1 - p_0| \leq \frac{1}{R}|x_1 - x_0|.$$

Следовательно, $|x_1 - x_0| \geq 2R$, т.е. $r_0 \geq R$, что противоречит предположению $r_0 < R$.

ЛЕММА 7. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ множество X является телесно-гладким с константой $1/R$, $R > 0$. Пусть p_0 — единичный вектор внешней нормали множества X в точке $x_0 \in \partial X$. Тогда справедливо включение

$$(x_0 - Rp_0 + \text{int } \mathcal{B}_R) \cap (x_0 + \mathcal{B}_{R/2}) \subset X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: существует вектор $x_1 \in (x_0 - Rp_0 + \text{int } \mathcal{B}_R) \cap (x_0 + \mathcal{B}_{R/2})$, $x_1 \notin X$.

Если $\mathcal{L}$ — одномерное пространство, то утверждение леммы следует из леммы 6. Иначе существует вектор $\tau_0 \in \mathcal{H}$ такой, что $\|\tau_0\| = 1$, $\langle p_0, \tau_0 \rangle = 0$ и $x_1 - x_0$ является линейной комбинацией векторов τ_0, p_0 . Будем предполагать, что $\langle \tau_0, x_1 - x_0 \rangle \geq 0$. Если это предположение не выполняется, то заменим τ_0 на $-\tau_0$ и оно станет выполняться. Тогда существует число $\alpha \in [0; 2\pi)$ такое, что

$$x_1 - x_0 = \|x_1 - x_0\|(\tau_0 \sin \alpha - p_0 \cos \alpha).$$

Поскольку $x_1 \in x_0 - Rp_0 + \text{int } \mathcal{B}_R$, то $\|x_0 - x_1 - Rp_0\| < R$. Следовательно,

$$\|x_0 - x_1\|^2 < 2R\langle p_0, x_0 - x_1 \rangle,$$

т.е. $\|x_0 - x_1\|^2 < 2R\|x_0 - x_1\| \cos \alpha$. Поэтому $0 < \|x_0 - x_1\| < 2R \cos \alpha$. Из неравенства $\langle \tau_0, x_1 - x_0 \rangle \geq 0$ следует, что $\sin \alpha \geq 0$. Отсюда и из неравенства $0 < \|x_0 - x_1\| < 2R \cos \alpha$ получаем $\alpha \in [0; \pi/2)$.

Определим

$$\psi = \arccos \frac{\|x_0 - x_1\|}{2R} - \alpha.$$

Из неравенства $\|x_0 - x_1\| < 2R \cos \alpha$ следует, что

$$\arccos \frac{\|x_0 - x_1\|}{2R} > \alpha.$$

Поэтому $\psi \in (0; \pi/2)$.

Определим векторы

$$p_1 = p_0 \cos \psi + \tau_0 \sin \psi, \quad \tau_1 = -p_0 \sin \psi + \tau_0 \cos \psi.$$

Заметим, что $\|p_1\| = \|\tau_1\| = 1$, $\langle p_1, \tau_1 \rangle = 0$.

Поскольку

$$\begin{aligned} \|x_0 - x_1 - Rp_1\|^2 - R^2 &= \|x_0 - x_1\|^2 + 2R\langle p_1, x_1 - x_0 \rangle \\ &= \|x_0 - x_1\|^2 + 2R\|x_0 - x_1\|(-\cos \alpha \cos \psi + \sin \alpha \sin \psi) \\ &= \|x_0 - x_1\|^2 - 2R\|x_0 - x_1\| \cos(\alpha + \psi) \\ &= \|x_0 - x_1\|^2 - 2R\|x_0 - x_1\| \frac{\|x_0 - x_1\|}{2R} = 0, \end{aligned}$$

то $\|x_0 - x_1 - Rp_1\| = R$. Отсюда и из того, что вектор $x_0 - x_1 - Rp_1$ является линейной комбинацией векторов τ_1, p_1 следует, что существует $\varphi_1 \in [0; 2\pi)$:

$$x_0 - x_1 - Rp_1 = -Rp_1 \cos \varphi_1 - R\tau_1 \sin \varphi_1.$$

Так как

$$R \sin \varphi_1 = \langle x_1 - x_0, \tau_1 \rangle = \|x_0 - x_1\|(\cos \alpha \sin \psi + \sin \alpha \cos \psi) = \|x_0 - x_1\| \sin(\alpha + \psi) > 0,$$

то $\varphi_1 \in (0; \pi)$. Из условия $x_1 \in x_0 + \mathcal{B}_{R/2}$ следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}R^2 &\geq \|x_1 - x_0\|^2 = \|Rp_1(1 - \cos \varphi_1) + R\tau_1 \sin \varphi_1\|^2 \\ &= R^2(1 - \cos \varphi_1)^2 + R^2 \sin^2 \varphi_1 = R^2(2 - 2 \cos \varphi_1). \end{aligned}$$

Поэтому $\cos \varphi_1 \geq 1 - 1/8 > \sqrt{2}/2$. Отсюда и из включения $\varphi_1 \in (0; \pi)$ получаем $\varphi_1 \in (0; \pi/4)$.

Определим функцию

$$x(\varphi) = x_0 - Rp_1(1 - \cos \varphi) + R\tau_1 \sin \varphi.$$

Из равенства $x_0 - x_1 - Rp_1 = -Rp_1 \cos \varphi_1 - R\tau_1 \sin \varphi_1$ следует, что $x_1 = x(\varphi_1)$. Через φ_2 обозначим инфимум таких $\varphi > 0$, что $x(\varphi) \notin X$. Поскольку $x(\varphi_1) = x_1 \notin X$, то $\varphi_2 \leq \varphi_1$, а значит, $\varphi_2 \in [0; \pi/4)$.

Рассмотрим случай $\varphi_2 = 0$. В этом случае по определению супремума существует последовательность положительных чисел $\{\lambda_k\}$, стремящаяся к нулю и такая, что $x(\lambda_k) \notin X$. Поскольку

$$\frac{1}{R\lambda_k}(x(\lambda_k) - x_0) \rightarrow \tau_1 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

в силу предложения 11 получаем $\tau_1 \in T_{X^e}(x_0)$. Отсюда и из определения вектора внешней нормали следует неравенство $\langle p_0, \tau_1 \rangle \geq 0$. Поэтому $\sin \psi \leq 0$, что противоречит включению $\psi \in (0; \pi/2)$. Полученное противоречие показывает, что $\varphi_2 \neq 0$, т.е. $\varphi_2 \in (0; \pi/4)$.

Обозначим $x_2 = x(\varphi_2)$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим вектор

$$v_k = \frac{2k}{\varphi_2} \left(x_2 - x \left(\varphi_2 - \frac{\varphi_2}{2k} \right) \right), \quad v = x'(\varphi_2).$$

Так как для любого $\varphi \in (0; \varphi_2)$ справедливо включение $x(\varphi) \in X$, то $x(\varphi_2 - \varphi_2/(2k)) \in X$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Из соотношений

$$x_2 - \frac{\varphi_2}{2k} v_k = x \left(\varphi_2 - \frac{\varphi_2}{2k} \right) \in X, \quad v_k \rightarrow v \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

в силу предложения 11 получаем $-v \in T_X(x_2)$. Так как $x_2 \in \partial X$, по условию леммы существует p_2 — единичный вектор внешней нормали множества X в точке x_2 . Из условия $-v \in T_X(x_2)$ следует неравенство $\langle p_2, v \rangle \geq 0$, где

$$v = x'(\varphi_2) = R\tau_1 \cos \varphi_2 - Rp_1 \sin \varphi_2 = R\tau_0 \cos(\varphi_2 + \psi) - Rp_0 \sin(\varphi_2 + \psi).$$

Обозначим через $\overline{p_2}$ ортогональную проекцию вектора p_2 на линейную оболочку векторов τ_0, p_0 . Определим число $\beta \in [-\pi; \pi)$ из условия $\overline{p_2} = (p_0 \cos \beta + \tau_0 \sin \beta) \|\overline{p_2}\|$. Тогда

$$0 \leq \langle p_2, v \rangle = \langle \overline{p_2}, v \rangle = \|\overline{p_2}\| R \sin(\beta - \varphi_2 - \psi).$$

Следовательно, $\sin(\beta - \varphi_2 - \psi) \geq 0$.

Так как поле единичных нормалей удовлетворяет условию Липшица на множестве ∂X с константой $1/R$, то

$$\|p_2 - p_0\| \leq \frac{1}{R} \|x_2 - x_0\|.$$

Следовательно, $R^2 \|p_2 - p_0\|^2 \leq \|x_2 - x_0\|^2$, т.е. $R^2(2 - 2\|\overline{p_2}\| \cos \beta) \leq R^2(2 - 2 \cos \varphi_2)$. Поэтому $\|\overline{p_2}\| \cos \beta \geq \cos \varphi_2$. Отсюда и из условий $\beta \in [-\pi; \pi)$, $\varphi_2 \in [0; \pi/4]$, $\|\overline{p_2}\| \leq 1$ следует неравенство $|\beta| \leq \varphi_2$, а значит, $\beta - \varphi_2 \in [-\pi/2; 0]$. Поэтому в силу условия $\psi \in (0; \pi/2)$ справедливо включение $\beta - \varphi_2 - \psi \in (-\pi; 0)$, что противоречит неравенству $\sin(\beta - \varphi_2 - \psi) \geq 0$.

ЛЕММА 8. Пусть заданы векторы u, v гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и числа $r > 0$, $\delta > 0$ такие, что $r \leq \|u\| \leq r + \delta$, $\|v\| < r$. Тогда существует число $\theta \in (0; 1)$ такое, что для вектора $w = \theta u + (1 - \theta)v$ справедливы неравенства $\|w\| < r$, $\|u - w\|^2 < 2(r + \delta)\delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств $\|v\| < r \leq \|u\|$ следует, что $u \neq v$. Определим число $t_0 = \langle u, u - v \rangle / \|u - v\|^2$, вектор $y = u - t_0(u - v)$ и функцию $x(t) = y + t(u - v)$ при $t \in \mathbb{R}$.

Из соотношений $2\langle u, u - v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 + \|u - v\|^2 > 0$ следует неравенство $t_0 > 0$. Так как $\langle y, u - v \rangle = \langle u, u - v \rangle - t_0\|u - v\|^2 = 0$, то для любого $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\|x(t)\|^2 = \|y\|^2 + t^2\|u - v\|^2. \quad (15)$$

Поскольку $x(t_0 - 1) = y + t_0(u - v) - u + v = v$, то $\|x(t_0 - 1)\|^2 = \|v\|^2 < r^2$. Поэтому согласно (15)

$$\|y\|^2 \leq \|x(t_0 - 1)\|^2 < r^2.$$

Определим число $t_1 = \sqrt{r^2 - \|y\|^2} / \|u - v\|$. Из неравенства $\|y\|^2 < r^2$ следует, что $t_1 > 0$.

Заметим, что

$$\|x(t_1)\|^2 = \|y\|^2 + t_1^2\|u - v\|^2 = r^2.$$

Отсюда и из неравенств $\|v\| < r$, $\|u\| \leq r + \delta$ следуют неравенства

$$\|x(t_1)\|^2 > \|v\|^2 \quad \text{и} \quad \|x(t_1)\|^2 \geq r^2 + \|u\|^2 - (r + \delta)^2 > \|u\|^2 - 2(r + \delta)\delta.$$

Следовательно, в силу непрерывности функции $x(t_1)$ существует число $t_2 \in (0; t_1)$ такое, что

$$\|x(t_2)\|^2 > \|v\|^2 \quad \text{и} \quad \|x(t_2)\|^2 > \|u\|^2 - 2(r + \delta)\delta. \quad (16)$$

Обозначим $w = x(t_2)$. Из равенства (15) следует, что

$$\|w\|^2 = \|y\|^2 + t_2^2\|u - v\|^2 < \|y\|^2 + t_1^2\|u - v\|^2 = \|x(t_1)\|^2 = r^2.$$

Поэтому

$$\|w\| < r. \quad (17)$$

Из соотношений $\|x(t_0)\| = \|u\| \geq r$, $\|x(t_1)\| = r$ и (15) следует, что

$$\|y\|^2 + t_0^2\|u - v\|^2 \geq r^2 = \|y\|^2 + t_1^2\|u - v\|^2.$$

Поэтому $t_0^2 \geq t_1^2$. Отсюда и из неравенств $t_0 > 0$, $t_2 < t_1$ получаем неравенства $t_2 < t_1 < t_0$.

Из неравенства $\|x(t_2)\|^2 > \|v\|^2$ и равенств $x(t_0 - 1) = v$, (15) получаем, что $(t_0 - 1)^2 < t_2^2$. Отсюда и из неравенства $t_2 > 0$ следует неравенство $t_0 - 1 < t_2 < t_0$. Поэтому существует число $\theta \in (0; 1)$ такое, что $t_2 = (1 - \theta)(t_0 - 1) + \theta t_0$, а значит,

$$w = x(t_2) = (1 - \theta)x(t_0 - 1) + \theta x(t_0) = (1 - \theta)v + \theta u. \quad (18)$$

Так как $w = y + t_2(u - v)$, $\langle y, u - v \rangle = 0$, то $\langle w, u - v \rangle = t_2\|u - v\|^2$. Отсюда и из соотношений

$$u - w = u - x(t_2) = u - y - t_2(u - v) = (t_0 - t_2)(u - v)$$

следует, что

$$\langle w, u - w \rangle = (t_0 - t_2)\langle w, u - v \rangle = (t_0 - t_2)t_2\|u - v\|^2 > 0.$$

Поэтому

$$\|u\|^2 = \|w + u - w\|^2 = \|w\|^2 + \|u - w\|^2 + 2\langle w, u - w \rangle > \|w\|^2 + \|u - w\|^2.$$

Отсюда и из неравенства (16) получаем

$$\|u - w\|^2 < \|u\|^2 - \|w\|^2 = \|u\|^2 - \|x(t_2)\|^2 < 2(r + \delta)\delta,$$

что вместе с (17), (18) завершает доказательство.

ЛЕММА 9. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ множество X является телесно-гладким с константой $1/R$, $R > 0$. Пусть заданы векторы $a, x \in \mathcal{H}$ и числа $r \in (0; R)$, $\delta \in (0; r/10]$ такие, что $r \leq \|a - x\| \leq r + \delta$, $x \in \partial X$, $a + \text{int } \mathcal{B}_r \subset X$. Пусть p – единичный вектор внешней нормали множества X в точке x . Тогда

$$\|a + rp - x\| \leq 3\sqrt{r\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы следует, что вектор $-p$ является единичным вектором внешней нормали множества X^c в точке x . Применяя лемму 7 к множеству X^c , получим, что

$$(x + Rp + \text{int } \mathcal{B}_R) \cap (x + \mathcal{B}_{R/2}) \subset X^c.$$

Отсюда и из включения $a + \text{int } \mathcal{B}_r \subset X$ следует, что

$$(x + Rp + \text{int } \mathcal{B}_R) \cap (x + \mathcal{B}_{R/2}) \cap (a + \text{int } \mathcal{B}_r) = \emptyset. \quad (19)$$

Покажем, что

$$(x + Rp + \text{int } \mathcal{B}_R) \cap (a + \text{int } \mathcal{B}_r) = \emptyset. \quad (20)$$

Предположим противное: существует вектор $z \in (x + Rp + \text{int } \mathcal{B}_R) \cap (a + \text{int } \mathcal{B}_r)$. Применим лемму 8 для $u = x - a$, $v = z - a$. В силу этой леммы существует число $\theta \in (0; 1)$ такое, что для вектора $w = \theta u + (1 - \theta)v$ справедливы неравенства $\|w\| < r$ и $\|u - w\|^2 < 2(r + \delta)\delta$.

Обозначим $y = \theta x + (1 - \theta)z$. Так как $z \in x + Rp + \text{int } \mathcal{B}_R$, то $\|x + Rp - z\| < R$. Поэтому

$$\|x + Rp - y\| = \|(1 - \theta)(x + Rp - z) + \theta Rp\| \leq (1 - \theta)\|x + Rp - z\| + \theta R < (1 - \theta)R + \theta R = R.$$

Поскольку

$$y - a = \theta(x - a) + (1 - \theta)(z - a) = \theta u + (1 - \theta)v = w,$$

то $\|y - a\| = \|w\| < r$. Так как $y - x = (y - a) - (x - a) = w - u$, то

$$\|y - x\|^2 = \|u - w\|^2 < 2(r + \delta)\delta.$$

Отсюда и из условий $r \in (0; R)$, $\delta \in (0; r/10]$ следует, что

$$\|y - x\|^2 \leq \frac{11}{50}r^2 < \frac{r^2}{4} < \frac{R^2}{4},$$

а значит, $\|y - x\| < R/2$. Поэтому $y \in (x + Rp + \text{int } \mathcal{B}_R) \cap (x + \mathcal{B}_{R/2}) \cap (a + \text{int } \mathcal{B}_r)$, что противоречит условию (19). Тем самым, доказано условие (20).

Из условия (20) следует, что $\|x + Rp - a\| \geq R + r$. Применим лемму 1 для $x_0 = x$, $x_1 = x + Rp$, $x_2 = a$, $R_1 = R$, $R_2 = r$. Получим неравенство

$$\|(R + r)x - Ra - r(x + Rp)\|^2 \leq (R + r)(4Rr + (R + r)\delta)\delta.$$

Следовательно,

$$R^2\|a + rp - x\|^2 \leq (R + r)(4Rr + (R + r)\delta)\delta \leq 2R\left(4Rr + 2R\frac{r}{10}\right)\delta < 9R^2r\delta.$$

Поэтому $\|a + rp - x\| \leq 3\sqrt{r\delta}$.

ЛЕММА 10. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ множество X является телесно-гладким с константой $1/R$, $R > 0$. Пусть p_0 — единичный вектор внешней нормали множества X в точке $x_0 \in \partial X$. Тогда справедливо включение

$$x_0 - Rp_0 + \text{int } \mathcal{B}_R \subset X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого числа $r > 0$ определим множество

$$G(r) = x_0 - rp_0 + \mathcal{B}_r.$$

Пусть заданы числа $r, \tilde{r}$, $0 < \tilde{r} < r$, и вектор $x \in G(\tilde{r})$. Тогда

$$\|x_0 - rp_0 - x\| \leq \|x_0 - \tilde{r}p_0 - x\| + \|rp_0 - \tilde{r}p_0\| \leq \tilde{r} + r - \tilde{r} = r.$$

Следовательно, $x \in G(r)$. Тем самым, доказана монотонность многозначного отображения $G(r)$: $G(\tilde{r}) \subset G(r)$ при любых $r, \tilde{r}$ таких, что $0 < \tilde{r} < r$.

Через r_0 обозначим супремум таких чисел $r > 0$, что $G(r) \subset X$. Если $r_0 \geq R$, то в силу определения супремума и монотонности $G(r)$ для любого $r \in (0; R)$ справедливо включение $G(r) \subset X$. Так как

$$x_0 - Rp_0 + \text{int } \mathcal{B}_R = \bigcup_{r \in (0; R)} G(r),$$

то в этом случае $x_0 - Rp_0 + \text{int } \mathcal{B}_R \subset X$, т.е. утверждение леммы справедливо.

Для завершения доказательства леммы достаточно показать, что $r_0 \geq R$. Предположим противное: $r_0 < R$.

В силу леммы 7 справедливо включение

$$(x_0 - Rp_0 + \text{int } \mathcal{B}_R) \cap (x_0 + \mathcal{B}_{R/2}) \subset X. \quad (21)$$

Отсюда и из включения $G(R/4) \subset (x_0 - Rp_0 + \text{int } \mathcal{B}_R) \cap (x_0 + \mathcal{B}_{R/2})$ следует, что $G(R/4) \subset X$, а значит, $r_0 \geq R/4 > 0$.

В силу определения супремума получаем, что

$$G\left(r_0 + \frac{1}{k}\right) \not\subset X$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует последовательность векторов $\{z_k\}$ такая, что $z_k \in G(r_0 + 1/k)$ и $z_k \notin X$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Так как $z_k \notin X$ и $x_0 - r_0 p_0 \in X$, на отрезке с концами $x_0 - r_0 p_0$ и z_k найдется точка $x_k \in \partial X$. Поскольку указанный отрезок содержится в шаре $G(r_0 + 1/k)$, то $x_k \in G(r_0 + 1/k)$. Тем самым, доказано существование последовательности векторов $\{x_k\}$ таких, что $x_k \in G(r_0 + 1/k) \cap \partial X$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Обозначим $a_0 = x_0 - r_0 p_0$. Поскольку $x_k \in G(r_0 + 1/k)$, то

$$\left\| x_0 - \left(r_0 + \frac{1}{k} \right) p_0 - x_k \right\| \leq r_0 + \frac{1}{k}.$$

Следовательно,

$$\|a_0 - x_k\| \leq \left\| x_0 - \left(r_0 + \frac{1}{k} \right) p_0 - x_k \right\| + \frac{1}{k} \leq r_0 + \frac{2}{k}.$$

Из неравенства $r_0 > 0$ следует существование номера k_0 такого, что $2/k < r_0/10$ при $k \geq k_0$. В силу определения супремума и монотонности $G(r)$ получаем, что $G(r) \subset X$ при $0 < r < r_0$. Поэтому

$$a_0 + \text{int } \mathcal{B}_{r_0} = \bigcup_{r \in (0; r_0)} G(r) \subset X.$$

Применяя лемму 9 для $a = a_0$, $r = r_0$, $x = x_k$, $\delta = 2/k$, $k \geq k_0$, получаем

$$\|a_0 + r_0 p_k - x_k\| \leq 3\sqrt{\frac{2r_0}{k}} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (22)$$

где p_k — единичные векторы внешних нормалей множества X в точках x_k .

По условию леммы

$$\|p_k - p_0\| \leq \frac{1}{R} \|x_k - x_0\|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|x_k - x_0\| &\leq \|x_k - x_0 + r_0(p_0 - p_k)\| + r_0\|p_k - p_0\| \\ &\leq \|x_k - x_0 + r_0(p_0 - p_k)\| + \frac{r_0}{R} \|x_k - x_0\|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|x_k - x_0\| \leq \frac{R}{R - r_0} \|x_k - x_0 + r_0(p_0 - p_k)\| = \frac{R}{R - r_0} \|x_k - a_0 - r_0 p_k\|.$$

Отсюда и из соотношения (22) следует, что

$$x_k \rightarrow x_0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Так как $r_0 < R$, существует натуральное число $k_1 \geq k_0$ такое, что $r_0 + 1/k_1 < R$. Тогда при $k \geq k_1$ справедливы включения $x_k \in G(r_0 + 1/k) \subset x_0 - R p_0 + \text{int } \mathcal{B}_R$. Из включения $x_k \in \partial X$ следует, что $x_k \notin \text{int } X$. Из условия (21) следует включение

$$(x_0 - R p_0 + \text{int } \mathcal{B}_R) \cap (x_0 + \text{int } \mathcal{B}_{R/2}) \subset \text{int } X.$$

Поэтому $x_k \notin x_0 + \text{int } \mathcal{B}_{R/2}$ при $k \geq k_1$. Следовательно, $\|x_k - x_0\| \geq R/2$ при $k \geq k_1$, что противоречит соотношению (23).

ЛЕММА 11. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ множество X является телесно-гладким с константой $1/R$, $R > 0$. Тогда для любого вектора $x_1 \in \text{int } X$ существует вектор $d \in \mathcal{H}$ такой, что $x_1 \in d + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим число r_0 как супремум таких чисел $r > 0$, что $x_1 + \mathcal{B}_r \subset X$. Тогда

$$x_1 + \text{int } \mathcal{B}_{r_0} = \bigcup_{r \in (0; r_0)} (x + \mathcal{B}_r) \subset X,$$

а значит, $x_1 + \text{int } \mathcal{B}_{r_0} \subset \text{int } X$. Из условия $x_1 \in \text{int } X$ следует, что $r_0 > 0$.

Если $r_0 \geq R$, то $x_1 + \text{int } \mathcal{B}_R \subset x_1 + \text{int } \mathcal{B}_{r_0} \subset \text{int } X$. Тогда утверждение леммы выполнено для вектора $d = x_1$.

Рассмотрим случай $r_0 < R$. Определим число $\delta = r_0/10$. По определению супремума $x + \text{int } \mathcal{B}_{r_0+\delta} \not\subset X$, т.е. существует вектор $z \in x_1 + \text{int } \mathcal{B}_{r_0+\delta}$, $z \notin X$. Так как $x_1 \in X$, $z \notin X$, на отрезке с концами x_1, z существует вектор $x_0 \in \partial X$. При этом $r_0 < \|x_1 - x_0\| \leq \|x_1 - z\| < r_0 + \delta$.

Применим лемму 9 для $x = x_0$, $a = x_1$, $r = r_0$. Получим, что

$$\|x_1 + r_0 p_0 - x_0\| \leq 3\sqrt{r_0 \delta} = \frac{3r_0}{\sqrt{10}} < r_0,$$

где p_0 — единичный вектор внешней нормали множества X в точке x_0 . Поэтому $x_1 \in x_0 - r_0 p_0 + \text{int } \mathcal{B}_{r_0} \subset x_0 - R p_0 + \text{int } \mathcal{B}_R$.

В силу леммы 10 справедливо включение $x_0 - R p_0 + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X$. Полагая $d = x_0 - R p_0$, получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 12. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ множество X является телесно-гладким с константой $1/R$, $R > 0$. Тогда $\text{cl int } X = \text{cl } X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: существует точка $x_0 \in \text{cl } X$, $x_0 \notin \text{cl int } X$. Тогда $x_0 \in \partial X$. В силу леммы 10 найдется вектор $p \in \mathcal{H}$, $\|p\| = 1$, $x_0 - R p + \text{int } \mathcal{B}_R \subset X$, а значит, $x_0 - R p + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X$. Так как $x_0 \in \text{cl}(x_0 - R p + \text{int } \mathcal{B}_R)$, то $x_0 \in \text{cl int } X$, что противоречит условию $x_0 \notin \text{cl int } X$.

ТЕОРЕМА 3 (о связи слабой выпуклости и гладкости множества). Пусть заданы число $R > 0$ и множество X в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Следующие два условия эквивалентны:

- А) множество X является телесно-гладким с константой $1/R$;
- В) множество $\text{cl } X$ слабо выпукло с константой R , множество $\text{int } X$ не пусто и слабо вогнуто с константой R , справедливы равенства

$$\text{int cl } X = \text{int } X, \quad \text{cl int } X = \text{cl } X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть выполнено условие А). Тогда в силу леммы 11 для любого вектора $x \in \text{int } X$ существует вектор $d \in \mathcal{H}$ такой, что $x \in d + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X$. Отсюда в силу предложения 3 следует слабая вогнутость множества $\text{int } X$ с константой R . Аналогично, применение леммы 11 к множеству X^c дает слабую выпуклость множества $\text{cl } X$ с константой R .

Применяя лемму 12 к множествам X и X^c , получаем равенства $\text{cl int } X = \text{cl } X$ и $\text{cl int}(X^c) = \text{cl}(X^c)$, т.е. $\text{int cl } X = \text{int } X$. Тем самым, доказано, что из условия А) следует условие В).

2) Пусть выполнено условие В). Тогда в силу леммы 4 для любой точки $x \in \partial X$ существует вектор $p = p(x) \in \mathcal{H}$ такой, что

$$\|p\| = 1, \quad x + R p + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int}(X^c), \quad x - R p + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int } X. \quad (24)$$

Покажем, что

$$T_X(x) = \{v \in \mathcal{H} : \langle p, v \rangle \leq 0\}. \quad (25)$$

Пусть $v \in \mathcal{H}$, $\langle p, v \rangle \leq 0$. Тогда вектор v принадлежит контингентному конусу шара $x - Rp + \text{int } \mathcal{B}_R$ в точке x . Отсюда и из включения $x - Rp + \text{int } \mathcal{B}_R \subset X$ следует, что $v \in T_X(x)$. Поэтому $\{v \in \mathcal{H} : \langle p, v \rangle \leq 0\} \subset T_X(x)$.

Пусть $v \in \mathcal{H}$, $v \notin \{v \in \mathcal{H} : \langle p, v \rangle \leq 0\}$, т.е. $\langle p, v \rangle > 0$. Тогда вектор v не принадлежит контингентному конусу множества $(x + Rp + \text{int } \mathcal{B}_R)^c$ в точке x . Из включения $x + Rp + \text{int } \mathcal{B}_R \subset \text{int}(X^c)$ следует, что $X \subset (x + Rp + \text{int } \mathcal{B}_R)^c$. Поэтому $v \notin T_X(x)$. Следовательно, $T_X(x) \subset \{v \in \mathcal{H} : \langle p, v \rangle \leq 0\}$. Отсюда и из включения $\{v \in \mathcal{H} : \langle p, v \rangle \leq 0\} \subset T_X(x)$ следует равенство (25).

Проводя аналогичные рассуждения для множества X^c , получим равенство

$$T_{X^c}(x) = \{v \in \mathcal{H} : \langle p, v \rangle \geq 0\}.$$

Поэтому для любого $x \in \partial X$ вектор $p = p(x)$ является единичным вектором внешней нормали множества X в точке x .

Из условий (24) в силу леммы 5 следует, что функция $p: \partial X \rightarrow \mathcal{H}$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/R$. Поэтому выполнено условие А).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть заданы число $R > 0$ и выпуклое множество X в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Следующие условия эквивалентны:

- А) множество X является телесно-гладким с константой $1/R$;
- В) множество $\text{int } X$ не пусто и слабо вогнуто с константой R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество $\text{cl } X$ выпукло и замкнуто, то оно слабо выпукло с любой положительной константой. Из выпуклости множества X и условия $\text{int } X \neq \emptyset$ следуют равенства $\text{int } \text{cl } X = \text{int } X$, $\text{cl } \text{int } X = \text{cl } X$. Отсюда и из теоремы 3 получаем требуемое утверждение.

4. Теорема о минимаксе.

ЛЕММА 13. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множества X, Y . Пусть множество X слабо выпукло с константой $R > 0$, множество Y сильно выпукло с константой $r \in (0; R)$. Тогда $X + Y \overset{*}{=} Y = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество X слабо выпукло с константой R , то

$$X + \text{int } \mathcal{B}_R \overset{*}{=} \text{int } \mathcal{B}_R = X.$$

Поэтому

$$X \subset X + \mathcal{B}_r \overset{*}{=} \mathcal{B}_r \subset X + \mathcal{B}_r + \text{int } \mathcal{B}_{R-r} \overset{*}{=} \text{int } \mathcal{B}_{R-r} \overset{*}{=} \mathcal{B}_r = X + \text{int } \mathcal{B}_R \overset{*}{=} \text{int } \mathcal{B}_R = X.$$

Следовательно, $X + \mathcal{B}_r \overset{*}{=} \mathcal{B}_r = X$. Поскольку множество Y сильно выпукло с константой r , в силу предложения 8 существует множество $Y_1 \subset \mathcal{H}$ такое, что $Y + Y_1 = \mathcal{B}_r$. Поэтому

$$X \subset X + Y \overset{*}{=} Y \subset X + Y + Y_1 \overset{*}{=} Y_1 \overset{*}{=} Y = X + \mathcal{B}_r \overset{*}{=} \mathcal{B}_r = X.$$

Следовательно, $X + Y \overset{*}{=} Y = X$.

ЛЕММА 14. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множества X, Y . Пусть множество X слабо выпукло с константой $R_1 > 0$, множество $\text{int } X$ слабо вогнуто с константой $R_2 > 0$, $X = \text{cl int } X$. Пусть множество Y сильно выпукло с константой R_2 . Тогда $X \dot{*} Y + Y = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $X \dot{*} \mathcal{B}_{R_2} + \mathcal{B}_{R_2} = X$. Если $x \in \text{int } X$, то в силу слабой вогнутости множества $\text{int } X$ с константой R_2 согласно предложению 3 существует вектор $d \in \mathcal{H}$ такой, что $x \in d + \text{int } \mathcal{B}_{R_2} \subset \text{int } X$. Следовательно, $x \in d + \mathcal{B}_{R_2} \subset \text{cl int } X = X$. Если $x \in \partial X$, то в силу леммы 4 существует вектор $p \in \mathcal{H}$ такой, что $\|p\| = 1$ и $x - R_2 p + \text{int } \mathcal{B}_{R_2} \subset \text{int } X$. Обозначим $d = x - R_2 p$. Тогда $x \in d + \mathcal{B}_{R_2} \subset \text{cl int } X = X$. Итак, мы доказали, что для любого вектора $x \in X$ существует вектор $d \in \mathcal{H}$ такой, что $x \in d + \mathcal{B}_{R_2} \subset X$. Из условия $d + \mathcal{B}_{R_2} \subset X$ следует, что $d \in X \dot{*} \mathcal{B}_{R_2}$. Поэтому для любого $x \in X$ справедливо включение $x \in X \dot{*} \mathcal{B}_{R_2} + \mathcal{B}_{R_2}$. Следовательно, $X \subset X \dot{*} \mathcal{B}_{R_2} + \mathcal{B}_{R_2}$. А значит, $X \dot{*} \mathcal{B}_{R_2} + \mathcal{B}_{R_2} = X$.

Поскольку множество Y сильно выпукло с константой R_2 , в силу предложения 8 существует множество $Y_1 \subset \mathcal{H}$ такое, что $Y + Y_1 = \mathcal{B}_{R_2}$. Поэтому

$$X \dot{*} Y + Y \subset X = X \dot{*} \mathcal{B}_{R_2} + \mathcal{B}_{R_2} = X \dot{*} Y \dot{*} Y_1 + Y_1 + Y \subset X \dot{*} Y + Y.$$

Следовательно, $X \dot{*} Y + Y = X$.

ТЕОРЕМА 4 (о перестановочности геометрических операций). Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множества X, Y, Z . Пусть множество X слабо выпукло с константой $R_1 > 0$, множество $\text{int } X$ слабо вогнуто с константой $R_2 > 0$, $X = \text{cl int } X$. Пусть множество Y сильно выпукло с константой $r_1 \in (0; R_1)$, множество Z сильно выпукло с константой $r_2 \in (0; R_2)$. Тогда

$$X + Y \dot{*} Z = X \dot{*} Z + Y.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим натуральное число n из условия $r_2/n < R_1 - r_1$. Для любого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ определим множество $Z_k = \frac{k}{n} Z$. Покажем, что для любого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ справедливо равенство

$$X \dot{*} Z_k + Y = X + Y \dot{*} Z_k. \quad (26)$$

При $k = 0$ равенство (26) справедливо. Пусть равенство (26) справедливо при $k = s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Покажем, что равенство (26) справедливо при $k = s+1$.

В силу пункта А) предложения 7 множество $X \dot{*} Z_{s+1}$ слабо выпукло с константой R_1 . Согласно пункту В) предложения 5 множество Z_{s+1} сильно выпукло с константой $((s+1)/n)r_2 \leq r_2$. Поэтому множество Z_{s+1} сильно выпукло с константой r_2 . Отсюда и из теоремы 1 следует, что множество $\text{int}(X \dot{*} Z_{s+1})$ слабо вогнуто с константой $R_2 - r_2$ и выполнено равенство $X \dot{*} Z_{s+1} = \text{cl int}(X \dot{*} Z_{s+1})$. Отсюда в силу теоремы 2 получаем, что множество $W = X \dot{*} Z_{s+1} + Y$ слабо выпукло с константой $R_1 - r_1$. Поскольку в силу пункта В) предложения 5 множество $Z_1 = \frac{1}{n} Z$ сильно выпукло с константой $r_2/n < R_1 - r_1$, в силу леммы 13 справедливо равенство $W + Z_1 \dot{*} Z_1 = W$, т.е.

$$X \dot{*} Z_{s+1} + Y + Z_1 \dot{*} Z_1 = X \dot{*} Z_{s+1} + Y. \quad (27)$$

Согласно пункту А) предложения 7 множество $X \dot{*} Z_s$ слабо выпукло с константой R_1 . Из теоремы 1 следует, что множество $\text{int}(X \dot{*} Z_s)$ слабо вогнуто с константой $R_2 -$

$(s/n)r_2 \geq (1/n)r_2$ и выполнено равенство $X \dot{*} Z_s = \text{cl int}(X \dot{*} Z_s)$. Отсюда и из сильной выпуклости множества Z_1 с константой $(1/n)r_2$ согласно лемме 14 получаем равенство $X \dot{*} Z_s \dot{*} Z_1 + Z_1 = X \dot{*} Z_s$. Следовательно,

$$X \dot{*} Z_s + Y \dot{*} Z_1 = X \dot{*} Z_s \dot{*} Z_1 + Z_1 + Y \dot{*} Z_1 = X \dot{*} Z_{s+1} + Y + Z_1 \dot{*} Z_1.$$

Отсюда и из равенства (27) получаем равенство

$$X \dot{*} Z_s + Y \dot{*} Z_1 = X \dot{*} Z_{s+1} + Y.$$

Поскольку равенство (26) выполняется при $k = s$, то $X \dot{*} Z_s + Y = X + Y \dot{*} Z_s$. Следовательно,

$$X + Y \dot{*} Z_{s+1} = X + Y \dot{*} Z_s \dot{*} Z_1 = X \dot{*} Z_s + Y \dot{*} Z_1 = X \dot{*} Z_{s+1} + Y,$$

т.е. равенство (26) выполняется при $k = s + 1$. По индукции получаем справедливость равенства (26) для любого $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Применяя равенство (26) для $k = n$, получаем требуемое утверждение.

Заметим, что требование $r_1 < R_1$ в условиях теоремы 4 нельзя заменить на неравенство $r_1 \leq R_1$. Пусть, например, $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, $X = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$, $Y = Z = [0; 1]$. Тогда множество $Y = Z$ сильно выпукло с константой $r_1 = r_2 = 1$, множество X слабо выпукло с константой $R_1 = 1$, множество $\text{int } X$ слабо вогнуто с любой положительной константой R_2 . Так как $X + Y = \mathbb{R}$, $X + Y \dot{*} Z = \mathbb{R}$, $X \dot{*} Z = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, $X \dot{*} Z + Y = X$, равенство $X + Y \dot{*} Z = X \dot{*} Z + Y$ не выполняется.

ЛЕММА 15. Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы множества X, P, Q и функция $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть для любого вектора $x_0 \in X$ достигается минимум по $u \in P$ функции

$$u \mapsto \sup_{v \in Q} f(x_0 - u + v).$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

А) для любого $x_0 \in X$ справедливо равенство

$$\sup_{v \in Q} \inf_{u \in P} f(x_0 - u + v) = \inf_{u \in P} \sup_{v \in Q} f(x_0 - u + v);$$

В) для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$(M_\lambda + P \dot{*} Q) \cap X = (M_\lambda \dot{*} Q + P) \cap X,$$

где M_λ — лебегово множество функции f : $M_\lambda = \{x \in \mathcal{L} : f(x) \leq \lambda\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что условие В) не выполнено. Тогда, поскольку включение $M_\lambda \pm Q + P \subset M_\lambda + P \pm Q$ справедливо всегда, существует вектор $x_0 \in X$ такой, что $x_0 \in M_\lambda + P \pm Q$ и $x_0 \notin M_\lambda \pm Q + P$. Поэтому для любого вектора $v \in Q$ существует вектор $u \in P$ такой, что $x_0 - u + v \in M_\lambda$, и для любого вектора $u \in P$ существует вектор $v \in Q$ такой, что $x_0 - u + v \notin M_\lambda$. Следовательно, для любого вектора $v \in Q$ справедливо неравенство

$$\inf_{u \in P} f(x_0 - u + v) \leq \lambda$$

и для любого вектора $u \in P$ справедливо неравенство

$$\sup_{v \in Q} f(x_0 - u + v) > \lambda.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{v \in Q} \inf_{u \in P} f(x_0 - u + v) \leq \lambda$$

и, поскольку достигается

$$\min_{u \in P} \left(\sup_{v \in Q} f(x_0 - u + v) \right),$$

то

$$\inf_{u \in P} \sup_{v \in Q} f(x_0 - u + v) > \lambda.$$

Поэтому условие А) не выполнено.

2) Теперь предположим, что условие А) не выполнено. Тогда, поскольку неравенство

$$\sup_{v \in Q} \inf_{u \in P} f(x_0 - u + v) \leq \inf_{u \in P} \sup_{v \in Q} f(x_0 - u + v)$$

выполнено всегда, существует вектор $x_0 \in X$ и число λ такие, что

$$\sup_{v \in Q} \inf_{u \in P} f(x_0 - u + v) < \lambda < \inf_{u \in P} \sup_{v \in Q} f(x_0 - u + v).$$

Поэтому для любого вектора $v \in Q$ существует вектор $u \in P$ такой, что $f(x_0 - u + v) < \lambda$, и для любого вектора $v \in Q$ существует вектор $u \in P$ такой, что $f(x_0 - u + v) > \lambda$. Следовательно, $x_0 \in M_\lambda + P \pm Q$ и $x_0 \notin M_\lambda \pm Q + P$. Это означает, что условие В) не выполнено.

Из теорем 3, 4 и леммы 15 следует

ТЕОРЕМА 5 (о минимаксе). Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множества X, P, Q и функция $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть для любого вектора $x_0 \in X$ достигается минимум по $u \in P$ функции

$$u \mapsto \sup_{v \in Q} f(x_0 - u + v).$$

Пусть для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ лебегово множество $M_\lambda = \{x \in \mathcal{H} : f(x) \leq \lambda\}$ замкнуто и является телесно-гладким с константой $1/R$, $R > 0$. Пусть множества P, Q сильно выпуклы с константой $r \in (0; R)$. Тогда для любого вектора $x_0 \in \mathcal{H}$ справедливо равенство

$$\sup_{v \in Q} \inf_{u \in P} f(x_0 - u + v) = \inf_{u \in P} \sup_{v \in Q} f(x_0 - u + v). \quad (28)$$

Если в выражении (28) инфимум и супремум достигаются, то равенство (28) означает существование седловой точки в рассматриваемой минимаксной задаче.

5. Теорема об альтернативе для дифференциальных игр. Рассмотрим дифференциальную игру

$$\frac{dx}{dt} = v(t) - u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (29)$$

на отрезке времени $t \in [0; T]$ с терминальным множеством $M \subset \mathbb{R}^n$, где $x(t), u(t), v(t) \in \mathbb{R}^n$, $x(t)$ – фазовый вектор системы, $u(t)$ – управление игрока-преследователя, $v(t)$ – управление игрока-убегающего. Управления игроков подчиняются геометрическим ограничениям:

$$u(t) \in P(t), \quad v(t) \in Q(t) \quad \text{при почти всех } t \in [0; T], \quad (30)$$

где P, Q – заданные многозначные отображения, значениями которых являются множества $P(t) \subset \mathbb{R}^n, Q(t) \subset \mathbb{R}^n$.

Цель игрока-преследователя состоит в приведении фазового вектора в конечный момент времени на терминальное множество: $x(T) \in M$. Цель игрока-убегающего – противоположная: $x(T) \notin M$.

Если при некоторой реализации игры выполнилось условие $x(T) \in M$, то будем говорить, что *произошла поимка*. В противном случае будем говорить, что *произошло уклонение*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Через $\mathcal{U}$ будем обозначать множество допустимых программных стратегий игрока-преследователя, состоящее из всех интегрируемых по Лебегу функций $u: [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $u(t) \in P(t)$ при почти всех $t \in [0; T]$. Через $\mathcal{V}$ будем обозначать множество допустимых программных стратегий игрока-убегающего, состоящее из всех интегрируемых по Лебегу функций $v: [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $v(t) \in Q(t)$ при почти всех $t \in [0; T]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть заданы $u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}, x_0 \in \mathbb{R}^n$. Через $x_T(u, v)$ обозначим значение фазового вектора в конечный момент времени T при заданных управлениях игроков u, v и заданном начальном значении фазового вектора x_0 :

$$x_T(u, v) = x_0 - \int_0^T u(t) dt + \int_0^T v(t) dt.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть на отрезке $[a; b]$ задано многозначное отображение X , значениями которого являются множества $X(t) \subset \mathbb{R}^n$. Интегралом Аумана $\int_a^b X(t) dt$ называется множество векторов $\int_a^b x(t) dt$, где x – интегрируемые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $x(t) \in X(t)$ почти всюду на $[a; b]$.

ТЕОРЕМА 6 (об альтернативе). Пусть в дифференциальной игре (29), (30) терминальное множество M замкнуто и является телесно-гладким с константой $1/R, R > 0$. Пусть интегралы Аумана

$$P_0 = \int_0^T P(t) dt \quad \text{и} \quad Q_0 = \int_0^T Q(t) dt$$

являются сильно выпуклыми множествами с константой $r \in (0; R)$. Тогда для любого вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ выполнено одно и только одно из условий: либо

- А) существует программная стратегия игрока-преследователя $u \in \mathcal{U}$ такая, что для любой программной стратегии игрока-убегающего $v \in \mathcal{V}$ происходит поимка: $x_T(u, v) \in M$, либо

В) существует программная стратегия игрока-убегающего $v \in \mathcal{V}$ такая, что для любой программной стратегии игрока-преследователя $u \in \mathcal{U}$ происходит уклонение: $x_T(u, v) \notin M$.

А именно, если $x_0 \in M \dot{*} Q_0 + P_0$, то выполняется условие А), иначе выполняется условие В).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $x_0 \in M \dot{*} Q_0 + P_0$. В этом случае существует вектор $u_0 \in P_0$ такой, что $x_0 \in M \dot{*} Q_0 + u_0$. Поэтому $x_0 - u_0 + Q_0 \subset M$. Следовательно, для любого вектора $v_0 \in Q_0$ справедливо включение $x_0 - u_0 + v_0 \in M$. Отсюда и из определения интеграла Аумана следует, что существует стратегия $u \in \mathcal{U}$ такая, что для любой стратегии $v \in \mathcal{V}$ происходит поимка:

$$x_T(u, v) = x_0 - \int_0^T u(t) dt + \int_0^T v(t) dt \in M.$$

Рассмотрим обратный случай: $x_0 \notin M \dot{*} Q_0 + P_0$. В силу теоремы 3 множество M является слабо выпуклым с константой R , множество $\text{int } M$ является слабо вогнутым с константой R и $\text{cl int } M = \text{cl } M$. Поэтому согласно теореме 4 справедливо равенство $M \dot{*} Q_0 + P_0 = M + P_0 \dot{*} Q_0$. Следовательно, в рассматриваемом случае выполнено условие $x_0 \notin M + P_0 \dot{*} Q_0$. Поэтому $x_0 + Q_0 \not\subset M + P_0$. Это означает, что существует вектор $v_0 \in Q_0$ такой, что для любого вектора $u_0 \in P_0$ справедливо условие $x_0 + v_0 - u_0 \notin M$. Иными словами, существует стратегия $v \in \mathcal{V}$ такая, что для любой стратегии $u \in \mathcal{U}$ происходит уклонение: $x_T(u, v) \notin M$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.
- [2] Иванов Г. Е., Половинкин Е. С. О сильно выпуклых линейных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1641–1648.
- [3] Иванов Г. Е. Непрерывность оптимальных управлений в дифференциальных играх и некоторые свойства слабо и сильно выпуклых функций // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 816–839.
- [4] Иванов Г. Е. Гладкость и выпуклость маргинальных функций // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. Сб. научных трудов. М.: Московский физико-технический институт, 1999. С. 79–92.

Московский физико-технический институт
E-mail: givanov@math.mipt.ru

Поступило
16.01.2004