Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Яковлев, Модельный подход к нестандартному анализу в рамках аксиоматической теории множеств, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 1, 134–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2675>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 18:37:12

УДК 510.223

МОДЕЛЬНЫЙ ПОДХОД К НЕСТАНДАРТНОМУ АНАЛИЗУ В РАМКАХ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

И. В. Яковлев

В данной заметке модельный подход к нестандартному анализу развит на основе аксиоматической теории множеств Цермело–Френкеля с атомами. Дано обоснование традиционного рассмотрения стандартной суперструктуры V в качестве первичного объекта нестандартного анализа. Получены теоретико-множественные аксиомы для нестандартной системы $*V$.

Библиография: 9 названий.

Введение. Теория нестандартных методов анализа использует два альтернативных подхода: модельный и аксиоматический. Модельный подход (МП) к нестандартному анализу [1]–[3] устанавливает с помощью метода ультрапроизведений ряд фактов, которые принимаются в качестве аксиом нестандартной теории множеств [4], [5], однако сам по себе он излагается с позиций наивной теории множеств. При этом характерной чертой МП служит наличие бесконечного множества индивидов, или атомов – объектов, которые не содержат элементов и множествами не являются. Идея использования теоретико-множественной аксиоматики, включающей атомы, в качестве основы МП была высказана В. Ф. Яковлевым [6]. Настоящая заметка посвящена реализации МП в рамках теории множеств Цермело–Френкеля с атомами (ZFCA).

Основным объектом МП является суперструктура

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$$

над множеством атомов V_0 [1]. В традиционной схеме изложения МП суперструктура V рассматривается как первичный и, в некотором смысле, “максимальный” объект теории. Так, в качестве множеств фигурируют лишь элементы V , отличные от атомов, и отношение $\in$ определяется только на элементах V . С точки зрения ZFCA, однако, суперструктура является собственной частью универсума всех атомов и множеств. Тем не менее, приводимые в данной заметке построения обосновывают принятие именно ее в качестве стандартной алгебраической системы для формального языка ZFCA. В результате ограничения “большого” универсума не все аксиомы ZFCA будут истинны в полученной системе; аксиомы, остающиеся истинными, переносятся в нестандартную систему $*V$ и составляют там базовый набор утверждений о внутренних атомах и множествах. Абсолютность основных теоретико-множественных формул и операций позволяет единым образом доказать все наиболее важные свойства нестандартных образов множеств, отношений и функций.

1. Теория ZFCA. Алфавит языка ZFCA есть алфавит языка ZFC, дополненный константой A для множества атомов. С целью сокращения записи формул мы используем прописные латинские буквы X, Y для имен только множеств. Так, для формулы $\varphi(x)$

$$\forall X \varphi(X) \Leftrightarrow \forall x(x \notin A \rightarrow \varphi(x)), \quad \exists X \varphi(X) \Leftrightarrow \exists x(x \notin A \wedge \varphi(x))$$

(запись слева от знака $\Leftrightarrow$ есть обозначение для выражения справа).

Вводятся классы $\mathbb{A} \Leftrightarrow \{x \mid x = x\}$ (универсум всех атомов и множеств), $\mathbb{M} \Leftrightarrow \{x \mid x \notin A\}$ (класс множеств), $\emptyset \Leftrightarrow \{x \mid x \neq x\}$. Теоретико-множественные операции определяются так же, как в [7]. Отметим, что

$$y \subset x \Leftrightarrow x \in \mathbb{M} \wedge y \in \mathbb{M} \wedge \forall z(z \in y \rightarrow z \in x).$$

Ниже следуют аксиомы ZFCA. Некоторые аксиомы приводимого списка могут быть выведены из остальных; вопрос о независимости системы аксиом не является в данном случае принципиальным.

(A0) Аксиома атомов [7]. $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \neq \emptyset \wedge \forall y(y \notin x))$.

Отсюда $\emptyset \in \mathbb{M}$ и $x \in \mathbb{M} \wedge \forall y(y \notin x) \rightarrow x = \emptyset$.

(A1) Аксиома объемности. $\forall X \forall Y(X \subset Y \wedge Y \subset X \rightarrow X = Y)$.

Равенство атомов интерпретируется как совпадение элементов множества, являющегося интерпретацией константы A .

(A2) Аксиома пары. $\forall x \forall y(\{x, y\} \in \mathbb{M})$.

(A3) Аксиома выделения (схема). $\forall \vec{y} \forall X(\{x \in X \mid \varphi(x, \vec{y})\} \in \mathbb{M})$.

Здесь используются обозначения, принятые в [7]. Подстановка вместо X имени атома дает истинное $\emptyset \in \mathbb{M}$. Данная аксиома влечет $x \cap y \in \mathbb{M}$ и $x \setminus y \in \mathbb{M}$ для всех x, y .

(A4) Аксиома объединения. $\forall X(\cup X \in \mathbb{M})$.

При $x \in A$ имеем $\cup x = \emptyset \in \mathbb{M}$.

(A5) Аксиома степени. $\forall X(\mathcal{P}(X) \in \mathbb{M})$.

При $x \in A$ имеем $\mathcal{P}(x) = \emptyset \in \mathbb{M}$.

(A6) Аксиома подстановки (схема). $\forall \vec{z}(\forall x \exists! y \varphi(x, y, \vec{z}) \rightarrow \forall X(\{y \mid \exists x \in X \varphi(x, y, \vec{z})\} \in \mathbb{M}))$.

(A7) Аксиома бесконечности. $\exists X(\emptyset \in X \wedge \forall x \in X(x \cup \{x\} \in X))$.

(A8) Аксиома регулярности. $\forall X \neq \emptyset \exists x \in X(x \cap X = \emptyset)$.

Всякая $\in$ -убывающая последовательность обрывается на пустом множестве или атоме.

(А9) АКСИОМА ВЫБОРА. $\forall X (X \neq \emptyset \wedge X \cap A = \emptyset \wedge \forall Y \in X (Y \neq \emptyset) \rightarrow \exists f (f - \text{функция выбора на } X))$.

Универсум ZFCA имеет вид

$$A = \bigcup_{\alpha \in \text{On}} A_\alpha, \quad A_0 = A, \quad A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \mathcal{P}(A_\alpha), \quad A_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} A_\alpha \quad (1)$$

(On – класс всех ординалов, λ всегда обозначает бесконечный предельный ординал). Каждое A_α транзитивно [7]. Для всякого x его ранг $\text{rank}(x)$ есть наименьший ординал α такой, что $x \in A_\alpha$.

2. Ультростепень. Стандартной интерпретацией константы A служит бесконечное множество S , конкретный выбор которого определяется областью приложений нестандартных методов. Тогда в соответствии с (1) получаем стандартный универсум

$$\mathbb{V} = \bigcup_{\alpha \in \text{On}} V_\alpha, \quad V_0 = S, \quad V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \mathcal{P}(V_\alpha), \quad V_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha,$$

и стандартную суперструктуру, которая отвечает первому бесконечному ординалу ω :

$$V \simeq V_\omega = \bigcup_{n \in \omega} V_n.$$

Посредством $a, \vec{a}, b, \vec{b}$ всегда обозначаются элементы V .

Пусть $\mathcal{D}$ – счетно-неполный ультрафильтр на бесконечном множестве I (счетная неполнота ультрафильтра обеспечивает насыщенность ультростепени [8], что необходимо для приложений нестандартного анализа). При $f, g \in \mathbb{V}^I$ полагаем [7]:

$$\begin{aligned} f \sim g &\Leftrightarrow f_i = g_i \text{ п.в.} \Leftrightarrow \{i \in I \mid f_i = g_i\} \in \mathcal{D}, \\ [f] &\Leftrightarrow \{u \mid u \sim f \wedge \forall v (v \sim f \rightarrow \text{rank}(u) \leq \text{rank}(v))\}, \\ \mathbb{U} &\Leftrightarrow \{[f] \mid f \in \mathbb{V}^I\}, \\ [f] \in \mathcal{D} [g] &\Leftrightarrow f_i \in g_i \text{ п.в.} \end{aligned}$$

Пусть $U_\alpha \Leftrightarrow \{[f] \mid f_i \in V_\alpha \text{ п.в.}\}$; $U_\alpha \subset U_\beta$ при $\alpha < \beta$. Так как всякая функция $f \in \mathbb{V}^I$ является множеством, то

$$\mathbb{U} = \bigcup_{\alpha \in \text{On}} U_\alpha.$$

В частности,

$$U \Leftrightarrow \bigcup_{n \in \omega} U_n$$

– ограниченная ультростепень суперструктуры V . Вследствие счетной неполноты ультрафильтра строение ультростепени отличается от теоретико-множественного универсума.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. (i) $U_\omega \setminus U \neq \emptyset$.

(ii) Ультростепень содержит бесконечную $\in \mathcal{D}$ -убывающую последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{D}$ счетно-неполон, существуют попарно непересекающиеся множества $E_n \subset I$ такие, что $E_n \notin \mathcal{D}$ для всех $n \in \omega$ и

$$\bigcup_{n \in \omega} E_n = I.$$

Положим

$$a_0 \in S, \quad a_{n+1} = \{a_n\} \quad (2)$$

и определим функцию g на I следующим образом:

$$g_i = a_n \quad \text{при } i \in E_n. \quad (3)$$

Тогда $g_i \in V_\omega$ для всех $i \in I$, однако неверно, что $g_i \in V_n$ п.в. для некоторого n . Следовательно, $[g] \in U_\omega \setminus U$, что доказывает (i). Для доказательства (ii) определим оператор R , действующий на построенную функцию g :

$$(Rg)_i = \begin{cases} a_0, & \text{если } i \in E_0; \\ a_n, & \text{если } i \in E_{n+1}. \end{cases} \quad (4)$$

Тогда $[g] \ni [Rg] \ni [R^2g] \ni \dots$ Утверждение доказано.

3. Нестандартная система. Полагая в качестве (нестандартной) интерпретации константы A множество U_0 , получим нестандартный универсум

$$\mathbb{W} = \bigcup_{\alpha \in \text{On}} W_\alpha, \quad W_0 = U_0, \quad W_{\alpha+1} = W_\alpha \cup \mathcal{P}(W_\alpha), \quad W_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} W_\alpha,$$

и соответствующую суперструктуру

$$W \rightleftharpoons W_\omega = \bigcup_{n \in \omega} W_n.$$

Поуровневое изоморфное вложение $* : U \rightarrow W$ дается функцией Мостовского:

$$\begin{aligned} * & \text{ тождественна на } U_0, \\ *f & \rightleftharpoons *[f] = \{ *u \mid [u] \in \mathcal{D} [f] \} \text{ при } [f] \in U \setminus U_0; \end{aligned}$$

ввиду тождественности на атомах этот изоморфизм является единственным [9]. Образ U есть нестандартная система $*V = \{ *f \mid [f] \in U \}$. Посредством $*a, *\vec{a}, *b, *\vec{b}$ всегда обозначаются стандартные элементы $*V$, построенные из соответствующих элементов V .

Факты, отмеченные в утверждении 1, не позволяют продолжить $*$ -отображение за уровень ω .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Не существует изоморфного вложения U_ω в $\mathbb{W}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем $\{a_n\}_{n \in \omega}$, g и R , определенные в (2)–(4). Определим также оператор T :

$$(Tg)_i = a_{n+1} \quad \text{при } i \in E_n.$$

Тогда $[T^m R^m g] = [g]$ для всякого натурального m . Предположим, что существует изоморфное вложение $\circ : U_\omega \rightarrow \mathbb{W}$ (вместо $\circ[f]$ пишем $\circ f$). Очевидно, $\circ g \notin W_n$ при всех $n \in \omega$; значит, $\text{rank}(\circ g) = \lambda + m$ для некоторого натурального $m \neq 0$. Тогда $\circ(R^m g) \in W_\lambda$, т.е. $\circ(R^m g) \in W_\alpha$ для некоторого $\alpha < \lambda$, и $\circ g = \circ(T^m R^m g) \in W_{\alpha+m}$ – в противоречии с определением ранга, ибо $\alpha + m < \lambda + m$. Утверждение доказано.

Таким образом, изоморфное отображение из $\mathbb{U}$ в $\mathbb{W}$ можно определить лишь до уровня U_ω , т.е. лишь для ограниченной ультрарастерпени U . Данное обстоятельство и вынуждает с самого начала рассматривать в качестве стандартной системы суперструктуры V . Одновременно возникает требование ограниченности кванторов (действие каждого квантора в формуле должно быть ограничено множеством – элементом суперструктуры A_ω), которое необходимо для доказательства “ограниченного” варианта теоремы Лося [1] и, как следствие, принципа переноса:

$$V \models \varphi(\vec{a}) \leftrightarrow *V \models \varphi(*\vec{a}) \quad (5)$$

для формулы $\varphi(\vec{x})$ с ограниченными кванторами.

Условие ограниченности кванторов можно частично ослабить в следующем случае. Пусть $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ – формула с ограниченными кванторами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Имеем $V \models \forall \vec{x} \varphi(\vec{x}, \vec{b}) \leftrightarrow *V \models \forall \vec{x} \varphi(\vec{x}, *\vec{b})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V \models \varphi(\vec{a}, \vec{b})$ для всякого $\vec{a}$. Возьмем произвольное $*\vec{f}$. Тогда $V \models \varphi(\vec{f}_i, \vec{b})$ для всех $i \in I$. По теореме Лося имеем $*V \models \varphi(*\vec{f}, *\vec{b})$. Обратно, пусть $*V \models \varphi(*\vec{f}, *\vec{b})$ для всех $*\vec{f}$. Тогда для любого $\vec{a}$ истинно $*V \models \varphi(*\vec{a}, *\vec{b})$ и, следовательно, $V \models \varphi(\vec{a}, \vec{b})$. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. Имеем $V \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, \vec{b}) \leftrightarrow *V \models \exists \vec{x} \varphi(\vec{x}, *\vec{b})$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $*V \models \varphi(*\vec{a}, *\vec{b})$ для любого стандартного $*\vec{a}$, то $*V \models \forall \vec{x} \varphi(\vec{x}, *\vec{b})$.

Последнее есть принцип переноса Нельсона [4].

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Система $*V$ транзитивна и замкнута относительно взятия неупорядоченных пар.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Транзитивность $*V$ следует из определения отображения $*$. Далее, положим

$$k = \max(\text{rank}(x) + 1, \text{rank}(y) + 1),$$

$$\varphi(x, y) \Leftarrow \exists z (z = \{x, y\}) \Leftarrow \exists z \forall t \in z (t = x \vee t = y).$$

Квантор существования в формуле φ ограничен множеством A_k . Суперструктура V замкнута относительно взятия неупорядоченных пар: $V \models \forall x \forall y \varphi(x, y)$. Тогда утверждение 3 дает $*V \models \forall x \forall y \varphi(x, y)$. Утверждение доказано.

Формулу $\varphi(\vec{x})$ называем *абсолютной*, если она абсолютна для V и $*V$ [7]. Для абсолютной формулы $\varphi(\vec{x})$ ввиду (5) имеем $\varphi(\vec{a}) \leftrightarrow \varphi(*\vec{a})$. Абсолютность формул [7] $x \subset y$, $\text{rel}(x)$, $\text{fnc}(x)$, $\text{trans}(x)$, $\text{ord}(x)$ тогда дает

$$a \subset b \leftrightarrow *a \subset *b, \text{rel}(a) \leftrightarrow \text{rel}(*a), \text{fnc}(a) \leftrightarrow \text{fnc}(*a),$$

$$\text{trans}(a) \leftrightarrow \text{trans}(*a), \text{ord}(a) \leftrightarrow \text{ord}(*a).$$

Операцию $O(\vec{x}) = \{y \mid \varphi(\vec{x}, y)\}$, определяемую формулой $\varphi(\vec{x}, y)$, называем абсолютной, если она абсолютна для V и $*V$ [7]. Положим $*O^V(\vec{a}) = O^{*V}(*\vec{a})$; в случае $O^V(\vec{a}) \in V$ это совпадает с уже определенным $*$ -отображением (данная процедура аналогична распространению отображения $*$ на “определимые подмножества” суперструктуры V , приводимому в [1]). Если O абсолютна, то $*O(\vec{a}) = O(*\vec{a})$. Поскольку V и $*V$ транзитивны и замкнуты относительно взятия неупорядоченных пар, абсолютны операции [7] $\emptyset, \{x, y\}, x \cup y, x \cap y, x \setminus y, \bigcup x, x \times y, \text{dom}(x), \text{rng}(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} * \emptyset &= \emptyset, * \{a, b\} = \{*a, *b\}, \\ *(a \cup b) &= *a \cup *b, *(a \cap b) = *a \cap *b, *(a \setminus b) = *a \setminus *b, \\ * \bigcup a &= \bigcup *a, *(a \times b) = *a \times *b, \\ *\text{dom}(a) &= \text{dom}(*a), *\text{rng}(a) = \text{rng}(*a). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что если r – отношение на a , то $*r$ – отношение на $*a$; если f – функция из a в b , то $*f$ – функция из $*a$ в $*b$, причем $*(f(a)) = *f(*a)$.

Операция $\mathcal{P}$ является абсолютной для V . В самом деле,

$$\mathcal{P}^V(a) = \{b \in V \mid b \subset a\} = \mathcal{P}(a) \cap V = \mathcal{P}(a),$$

так как $\mathcal{P}(a) \subset V$. В то же время $\mathcal{P}$ не абсолютна для $*V$, ибо

$$\mathcal{P}^{*V}(*f) = \mathcal{P}(*f) \cap *V \neq \mathcal{P}(*f)$$

(“внутренняя” степень внутреннего множества $*f$ состоит из всех его внутренних подмножеств).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Суперструктура V удовлетворяет аксиомам A0, A1, A2, A3, A4, A5, A8, A9. Аксиомы A6 и A7 не выполняются в V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (A0) Ввиду абсолютности атомарных формул и $\emptyset$ имеем

$$\begin{aligned} V \models (A0) &\leftrightarrow V \models \forall x(x \in S \leftrightarrow x \neq \emptyset \wedge \forall y(y \notin x)) \\ &\leftrightarrow \forall x \in V(x \in S \leftrightarrow x \neq \emptyset \wedge \forall y \in V(y \notin x)). \end{aligned} \quad (6)$$

Последнее истинно в силу аксиомы атомов.

(A1) Ввиду абсолютности формулы $x \subset y$ имеем

$$\begin{aligned} V \models (A1) &\leftrightarrow V \models \forall X \forall Y (X \subset Y \wedge Y \subset X \rightarrow X = Y) \\ &\leftrightarrow \forall X \in V \forall Y \in V (X \subset Y \wedge Y \subset X \rightarrow X = Y). \end{aligned} \quad (7)$$

Последнее истинно в силу аксиомы объемности.

(A2) Очевидно, так как V замкнуто относительно взятия неупорядоченных пар.

(A3) Имеем

$$\begin{aligned} V \models (A3) &\leftrightarrow V \models \forall \vec{y} \forall X \exists Y (Y = \{x \in X \mid \varphi(x, \vec{y})\}) \\ &\leftrightarrow \forall \vec{y} \in V \forall X \in V \exists Y \in V (Y = \{x \in V \mid x \in X \wedge V \models \varphi(x, \vec{y})\}) \\ &\leftrightarrow \forall \vec{y} \in V \forall X \in V \exists Y \in V (Y = \{x \in X \mid V \models \varphi(x, \vec{y})\}). \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее получено с учетом транзитивности V . Множество Y в (8) есть подмножество множества X . Если $X \in V$, то $X \subset V_n$ для некоторого $n \in \omega$; тогда $Y \subset V_n$ и $Y \in V$. Тем самым (8) истинно.

(A4) Ввиду абсолютности операции $\cup$ имеем

$$\begin{aligned} V \models (A4) &\leftrightarrow V \models \forall X \exists Y (Y = \cup X) \\ &\leftrightarrow \forall X \in V \exists Y \in V (Y = \cup X). \end{aligned} \quad (9)$$

Если $X \in V_1$, то $Y = \cup X = \emptyset \in V$. Если $X \in V_n$, $n \geq 2$, то $Y \in V_{n-1}$, и потому $Y \in V$. Тем самым (9) истинно.

(A5) Ввиду абсолютности для V операции $\mathcal{P}$ имеем

$$\begin{aligned} V \models (A5) &\leftrightarrow V \models \forall X \exists Y (Y = \mathcal{P}(X)) \\ &\leftrightarrow \forall X \in V \exists Y \in V (Y = \mathcal{P}(X)). \end{aligned} \quad (10)$$

Последнее истинно.

(A6) Поскольку S бесконечно, можно считать, что $\omega \subset S$, так что $\omega \in V$. Однако последовательность (2) – функциональный образ ω – не является элементом V .

(A7) Не выполняется в V очевидным образом.

(A8) Так как формула $\exists x \in X (x \cap X = \emptyset)$ абсолютна, то

$$V \models (A8) \leftrightarrow \forall X \in V (X \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in X (x \cap X = \emptyset)). \quad (11)$$

Последнее истинно в силу аксиомы регулярности.

(A9) Ввиду абсолютности $\text{fnc}(x)$ и $\text{dom}(x)$ имеем

$$\begin{aligned} V \models (A9) &\leftrightarrow \forall X \in V (X \neq \emptyset \wedge X \cap S = \emptyset \wedge \forall Y \in X (Y \neq \emptyset) \\ &\rightarrow \exists f \in V (\text{fnc}(f) \wedge \text{dom}(f) = X \wedge \forall Y \in X (f(Y) \in Y))). \end{aligned} \quad (12)$$

Последнее истинно. В самом деле, пусть $X \in V_n$, $n \geq 2$, и f есть функция выбора на X . Тогда $f = \{(Y, f(Y)) \mid Y \in X\} \in V_{n+2}$, так что $f \in V$.

Утверждение доказано.

Согласно утверждению 3 выражения (6)–(12) могут быть перенесены в $*V$ (кванторы существования в (8)–(10), (12) ограничены соответствующим уровнем суперструктуры V). Утверждение 4 позволяет добавить аксиому пары. В результате получаем

$$\begin{aligned} * (A0) : & \forall x \in *V (x \in *S \leftrightarrow x \neq \emptyset \wedge \forall y \in *V (y \notin x)), \\ * (A1) : & \forall X \in *V \forall Y \in *V (X \subset Y \wedge Y \subset X \rightarrow X = Y), \\ * (A2) : & \forall x \in *V \forall y \in *V (\{x, y\} \in *V), \\ * (A3) : & \forall \vec{y} \in *V \forall X \in *V (\{x \in X \mid *V \models \varphi(x, \vec{y})\} \in *V), \\ * (A4) : & \forall X \in *V (\cup X \in *V), \\ * (A5) : & \forall X \in *V (\mathcal{P}(X) \cap *V \in *V), \\ * (A8) : & \forall X \in *V (X \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in X (x \cap X = \emptyset)), \\ * (A9) : & \forall X \in *V (X \neq \emptyset \wedge X \cap *S = \emptyset \wedge \forall Y \in X (Y \neq \emptyset) \\ & \rightarrow \exists f \in *V (f - \text{функция выбора на } X)). \end{aligned}$$

Выражения $*(A0)$ – $*(A5)$, $*(A8)$, $*(A9)$ играют роль теоретико-множественных аксиом для нестандартной системы $*V$. Отметим, что важный для приложений принцип внутреннего определения (или теорема о внутренних множествах) [1, с. 69] есть в данном случае просто аксиома $*(A3)$ (ср. также с [2, с. 33]).

Данная работа посвящается памяти Вячеслава Федоровича Яковлева.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Девис М. Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980.
- [2] Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990.
- [3] Loeb P., Wolff M. P. H. (ed.) Nonstandard Analysis for the Working Mathematician. Dordrecht: Kluwer, 2000.
- [4] Nelson E. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. № 6. P. 1165–1198.
- [5] Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Инфинитезимальный анализ. Ч. 1. Новосибирск: Изд-во ИМ, 2001.
- [6] Яковлев В. Ф. Расширенный универсум для систем с минимальными структурами // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 1. С. 103–105.
- [7] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
- [8] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.
- [9] Маккай М. Допустимые множества и бесконечная логика // Справочная книга по математической логике. Ч. 1. М.: Наука, 1982. С. 235–288.

Московский государственный институт электроники и математики
E-mail: yiv@online.ru

Поступило
12.04.2004
Исправленный вариант
25.10.2004