Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Корпачева, М. М. Сорокина, О критических ω -
веерных формациях конечных групп, *Матем. заметки*,
2006, том 79, выпуск 1, 87–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2676>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:28:30

УДК 512.542

О КРИТИЧЕСКИХ ω -ВЕЕРНЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

М. А. Корпачева, М. М. Сорокина

Рассматриваются только конечные группы. Пусть ω – непустое подмножество множества всех простых чисел P , $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ и $\delta: P \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$ – функции. Формация, состоящая из всех таких групп G , для которых $G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$, называется ω -веерной формацией с направлением δ . Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп; ω -веерная формация $\mathfrak{F}$ с направлением δ называется $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$ -критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные ω -веерные подформации с направлением δ из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержатся. В статье приводится описание строения $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$ -критических формаций.

Библиография: 10 названий.

Общая проблема изучения $\mathfrak{H}_\theta$ -критических формаций, где $\mathfrak{H}$ – класс групп, θ – некоторая непустая совокупность формаций, впервые была поставлена Л. А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп в 1978 г. [1]. В серии работ (см., например, [2]) А. Н. Скибой получено решение этой проблемы в случае, когда θ – совокупность всех локальных формаций. Исследованием критических ω -локальных формаций занимались А. Н. Скиба, В. М. Селькин, И. Н. Сафонова и др. (см., например, [3], [4]). В 1999 г. В. А. Ведерниковым введена в рассмотрение концепция частичной веерности, которая представляет новый функциональный подход к исследованию формаций конечных групп [5], [6]. При этом локальные формации представляют один из видов веерных формаций. В настоящей работе приводится описание критических ω -веерных формаций конечных групп, тем самым решается вышеуказанная задача Шеметкова для частично веерных формаций.

Рассматриваются только конечные группы. Основные определения и обозначения можно найти в [5]–[9]. Приведем лишь некоторые из них. Запись $G = [A]B$ означает, что группа G есть полупрямое произведение своих подгрупп A и B , где A – нормальная подгруппа группы G . *Монолитической группой* называется группа, имеющая единственную минимальную нормальную подгруппу (монолит) [10]. Пусть P – множество всех простых чисел, ω – непустое подмножество множества P , $\mathfrak{G}_\omega$ – класс всех ω -групп, т.е. таких групп G , что $\pi(G) \subseteq \omega$, где $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G ; $\mathfrak{G}_{q'}$ – класс всех q' -групп; $\mathfrak{G}_{cp}$ – класс всех групп, у которых каждый главный p -фактор централен. Через $\mathfrak{G}_{Z'_p}$ обозначают класс всех Z'_p -групп, т.е. таких групп G , что $K(G) \cap (Z_p) = \emptyset$, где $K(G)$ – класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G , (Z_p) – класс групп, порожденный простой p -группой Z_p . Через $\mathfrak{H}\mathfrak{F}$ обозначается произведение формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, т.е. $\mathfrak{H}\mathfrak{F} = (G : G^\mathfrak{F} \in \mathfrak{H})$ [7].

Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , где $\mathfrak{F}$ – непустая формация групп; через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$ -радикал группы G , где $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга [7]; $F_{cr}(G)$ – $\mathfrak{S}_{cr}$ -радикал группы G , $O_p(G)$ – $\mathfrak{N}_p$ -радикал группы G , $O_{Z'_p, Z_p}(G)$ – $\mathfrak{S}_{Z'_p} \mathfrak{N}_p$ -радикал группы G ; $F_p(G)$ – $\mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{N}_p$ -радикал группы G .

Функции $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, $g: \mathbf{P} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, $\delta: \mathbf{P} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ называются соответственно ωF -функцией, $\mathbf{P}F$ -функцией и $\mathbf{P}FR$ -функцией. Формация $\omega F(f, \delta) = (G: G/O_{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G))$ называется ω -веерной формацией с ω -спутником f и с направлением δ ; формация $F(g, \delta) = (G: G/G_{\delta(p)} \in g(p) \text{ для всех } p \in \pi(G))$ называется веерной формацией со спутником g и с направлением δ [5].

Направление δ ω -веерной формации называется b -направлением, если $\delta(q) \mathfrak{N}_q = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbf{P}$; p -направлением, если $\mathfrak{S}_{q'} \delta(q) = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbf{P}$; r -направлением, если $\mathfrak{S}_{Z'_q} \delta(q) = \delta(q)$ для любого $q \in \mathbf{P}$. Направление δ называется $x_1 x_2 \dots x_n$ -направлением, если δ является x_i -направлением для любого $i = 1, \dots, n$. Через δ_0 обозначается направление ω -полной формации, т.е. $\delta_0(p) = \mathfrak{S}'_p$ для всех $p \in \mathbf{P}$; через δ_1 обозначается направление ω -локальной формации, т.е. $\delta_1(p) = \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \mathbf{P}$; через δ_2 обозначается направление ω -специальной формации, т.е. $\delta_2(p) = \mathfrak{S}_{Z'_p} \mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \mathbf{P}$; через δ_3 обозначается направление ω -центральной формации, т.е. $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cr}$ для всех $p \in \mathbf{P}$ [6].

Пусть ψ_1 и ψ_2 – произвольные ωF -функции ($\mathbf{P}F$ -функции, $\mathbf{P}FR$ -функции). Говорят, что $\psi_1 \leq \psi_2$, если $\psi_1(p) \subseteq \psi_2(p)$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для всех $p \in \mathbf{P}$) [5].

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество групп. Тогда $(\mathfrak{X})$ – класс групп, порожденный $\mathfrak{X}$; $\omega F(\mathfrak{X}, \delta)$ – ω -веерная формация с направлением δ , порожденная множеством $\mathfrak{X}$; $\mathbf{P}F(\mathfrak{X}, \delta)$ – веерная формация с направлением δ , порожденная множеством $\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп. Следуя [2], ω -веерную формацию $\mathfrak{F}$ с направлением δ назовем $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$ -критической формацией, или иначе, минимальной ω -веерной не $\mathfrak{H}$ -формацией с направлением δ , если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные ω -веерные подформации с направлением δ из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержатся. Аналогично определяются $\mathfrak{H}_{\delta}$ -критические формации (минимальные веерные не $\mathfrak{H}$ -формации с направлением δ).

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая ω -веерная формация с br -направлением δ таким, что $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, h – ее максимальный внутренний ω -спутник, f – минимальный ω -спутник ω -веерной формации $\mathfrak{F}$ с направлением δ . Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G – монолитическая группа из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)$ -критической, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')$ -критической формацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$ -критическая формация. Тогда $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G является монолитической группой с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$. Согласно теореме 5 [5] $f(\omega') = \text{form}(G/O_{\omega}(G))$, $f(p) = \text{form}(G/G_{\delta(p)})$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Поскольку δ является br -направлением, то по теореме 6 [6] $h(\omega') = \mathfrak{H}$ и для любого $p \in \omega$ справедливо $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p h_1(p)$, где h_1 – произвольный внутренний ω -спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\pi(P) \subseteq \omega$. Предположим, что $|\pi(P)| > 1$. Так как δ – r -направление и $P \in \mathfrak{S}_{Z'_p}$, по лемме 1 [6] $G/G_{\delta(p)} \cong (G/P)/(G_{\delta(p)}/P) = (G/P)/(G/P)_{\delta(p)} \in h(p)$.

Поскольку $P \subseteq O_\omega(G)$, то $G/O_\omega(G) \cong (G/P)/(O_\omega(G)/P) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$. Согласно лемме 2 [6] $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Таким образом, $|\pi(P)| = 1$. Пусть $p \in \pi(P)$. Покажем, что формация $f(p)$ является $h(p)$ -критической. Рассмотрим случай, когда $h(p) = \emptyset$. Покажем, что $Z_p \notin \mathfrak{H}$. Пусть h_2 – минимальный ω -спутник формации $\mathfrak{H}$. Допустим, что $p \in \pi(\mathfrak{H})$. Тогда по теореме 5 [5] $h_2(p) \neq \emptyset$ и поэтому $h(p) = \mathfrak{N}_p h_2(p) \neq \emptyset$. Противоречие. Следовательно, $p \notin \pi(\mathfrak{H})$ и $Z_p \notin \mathfrak{H}$. Так как $p \in \pi(G) \cap \omega$, то $f(p) \neq \emptyset$. Ввиду леммы 7 [6] $Z_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $Z_p \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ и $G = Z_p$. Отметим, что $\Phi(Z_p) = 1$. Поскольку δ является b -направлением, то $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $Z_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)$. Тогда $(Z_p)_{\delta(p)} = Z_p$ и $f(p) = \text{form}(Z_p/(Z_p)_{\delta(p)}) = (1)$. Тем самым установлено, что формация $f(p)$ является $h(p)$ -критической.

Пусть теперь $h(p) \neq \emptyset$. Предположим, что $f(p) \subseteq h(p)$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/G_{\delta(p)} \in f(p) \subseteq h(p)$. Кроме того, $G/P \in \mathfrak{H}$. Далее, из $\pi(P) \subseteq \omega$ следует, что $P \subseteq O_\omega(G)$ и $G/O_\omega(G) \cong (G/P)/(O_\omega(G)/P) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$. Ввиду леммы 2 [6] $G \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому $f(p) \not\subseteq h(p)$. Пусть $\mathfrak{M}$ – собственная подформация из $f(p)$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq h(p)$ и M – группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus h(p)$. Тогда M является монолитической группой с монолитом $R = M^{h(p)}$. Допустим, что $R \subseteq O_p(M)$. Тогда $M \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$, что невозможно. Следовательно, $O_p(M) = 1$ и по лемме 18.8 [8] существует точный неприводимый $F_p[M]$ -модуль K . Пусть $T = [K]M$. Тогда группа T монолитична с монолитом $K = C_T(K)$. Покажем, что $T_{\delta(p)} = K$. Поскольку $K \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$, то $K \subseteq T_{\delta(p)}$. С другой стороны, $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ и $T_{\delta_3(p)} = F_{cp}(T) \subseteq C_T(K) = K$. Так как $\delta \leq \delta_3$, то $T_{\delta(p)} \subseteq F_{cp}(T)$, и значит, $T_{\delta(p)} \subseteq K$. Следовательно, $T_{\delta(p)} = K$. Так как $T/K \cong M \in \mathfrak{M}$, то ввиду леммы 7 [6] $T \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\omega F(T, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\omega F(T, \delta) = \mathfrak{F}$, то $f(p) = \text{form}(T/T_{\delta(p)}) = \text{form}(T/K) = \text{form } M \subseteq \mathfrak{M}$, что невозможно. Поэтому $\omega F(T, \delta) \subset \mathfrak{F}$ и $\omega F(T, \delta) \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $M \cong T/K = T/T_{\delta(p)} \in h(p)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq h(p)$ и формация $f(p)$ является $h(p)$ -критической. Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Пусть N – группа минимального порядка из $f(p) \setminus h(p)$. Тогда группа N является монолитической. Как и выше, нетрудно показать, что $O_p(N) = 1$. Используя лемму 18.8 [8], построим группу $B = [L]N$, где L – точный неприводимый $F_p[N]$ -модуль, причем B – монолитическая группа и $C_B(L) = L$. Как и выше, $B_{\delta(p)} = L$. Кроме того, $B \in \mathfrak{N}_p f(p)$ и поэтому $\omega F(B, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\omega F(B, \delta) \subset \mathfrak{F}$, то $B \in \mathfrak{H}$ и $N \cong B/L = B/B_{\delta(p)} \in h(p)$, что невозможно. Следовательно, $\omega F(B, \delta) = \mathfrak{F}$ и в качестве группы G можно выбрать группу B , причем $\Phi(B) = 1$.

Пусть $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Покажем, что $f(\omega') - h(\omega')$ -критическая формация. Так как $P \not\subseteq O_\omega(G)$, то $O_\omega(G) = 1$ и $f(\omega') = \text{form}(G/O_\omega(G)) = \text{form } G \not\subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Пусть $\mathfrak{M}$ – собственная подформация из $f(\omega')$ и $\mathfrak{M}_1 = \omega F(\mathfrak{M}, \delta)$. Из $\mathfrak{M} \subset f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$ получаем $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$. Тогда $f(\omega') = \text{form}(M/O_\omega(M) : M \in \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$, и $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$ и формация $f(\omega')$ является $h(\omega')$ -критической.

Достаточность. Поскольку $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная ω -верная подформация с направлением диз $\mathfrak{F}$ и b – ее минимальный ω -спутник. По следствию 5.1 [5] $b \leq f$. Покажем, что $b \leq h$. Пусть $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Тогда $b(p) = \emptyset \subseteq h(p)$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G)$. Рассмотрим случай, когда $p \in (\pi(G) \cap \omega) \setminus \pi(P)$. Так как $P \in \mathfrak{G}_{Z'_p} \subseteq \mathfrak{G}_{Z'_p} \delta(p) = \delta(p)$, ввиду леммы 1 [6]

$$b(p) \subseteq f(p) = \text{form}(G/G_{\delta(p)}) = \text{form}((G/P)/(G_{\delta(p)}/P))$$

$$= \text{form}((G/P)/(G/P)_{\delta(p)}) \subseteq h(p).$$

Таким образом, $b(p) \subseteq h(p)$. Пусть $p \in \pi(P)$. Если P – неабелева pd -группа, то $P \in \mathfrak{G}_{Z'_p}$ и по лемме 1 [6] $b(p) \subseteq f(p) = \text{form}(G/G_{\delta(p)}) = \text{form}((G/P)/(G/P)_{\delta(p)}) \subseteq h(p)$. Таким образом, $b(p) \subseteq h(p)$. Пусть P – абелева p -группа. Покажем, что $G_{\delta(p)} = P$. С одной стороны, $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $P \subseteq G_{\delta(p)}$. С другой стороны, $P = F_{cp}(G)$. Действительно, допустим, что $F_{cp}(G) \cap L = L_1 \neq 1$. Тогда $L_1 \subseteq C_G(P)$ и $N_G(L_1) = G$, что ввиду монолитичности группы G невозможно. Следовательно, $L_1 = 1$ и $P = F_{cp}(G)$. Так как $\delta \leq \delta_3$, то $G_{\delta(p)} \subseteq F_{cp}(G) = P$. Таким образом, $G_{\delta(p)} = P$. Допустим, что $b(p) = f(p)$. Тогда $G/P = G/G_{\delta(p)} \in f(p) = b(p)$ и по лемме 7 [6] $G \in \mathfrak{N}_p b(p) \subseteq \mathfrak{B}$. Противоречие. Поэтому $b(p) \subset f(p)$, и в силу $h(p)$ -критичности $f(p)$ имеем $b(p) \subseteq h(p)$.

Покажем, что $b(\omega') \subseteq h(\omega')$. Если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $P \subseteq O_\omega(G)$ и $b(\omega') \subseteq f(\omega') = \text{form}(G/O_\omega(G)) = \text{form}(G/P)/(O_\omega(G)/P) \subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Пусть $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Предположим, что $b(\omega') = f(\omega')$. Так как $P \not\subseteq O_\omega(G)$, то $G \in \text{form } G = \text{form}(G/O_\omega(G)) = f(\omega') = b(\omega') \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $b(\omega') \subset f(\omega')$ и поэтому $b(\omega') \subseteq h(\omega')$. Таким образом, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым установлено, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$ -критической. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая веерная формация с br -направлением δ таким, что $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, h – ее максимальный внутренний спутник, f – минимальный спутник веерной формации $\mathfrak{F}$ с направлением δ . Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_\delta$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathbf{PF}(G, \delta)$, где G – монолитическая группа из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^\delta$ таким, что $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)$ -критической.

Напомним, что формационно критическая группа G называется f -базисной группой, если формация $\text{form } G$ содержит единственную максимальную подформацию. Формационно критическую группу G назовем $\omega\delta$ -базисной (δ -базисной), если формация $\omega F(G, \delta)$ ($\mathbf{PF}(G, \delta)$) содержит единственную максимальную ω -веерную (веерную) подформацию с направлением δ . Максимальной θ -подформацией θ -формации $\mathfrak{F}$ называется такая собственная θ -подформация $\mathfrak{M}$ θ -формации $\mathfrak{F}$, что для любой θ -формации $\mathfrak{B}$, удовлетворяющей включению $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$, имеет место равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$, где θ – некоторая совокупность формаций.

ЛЕММА 2. Пусть $G = [P]H$ – монолитическая группа с монолитом $P = C_G(P)$, где P – p -группа, $p \in \omega$, H – f -базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $\text{form } H$. Тогда G является $\omega\delta$ -базисной группой, где δ – b -направление такое, что $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – минимальный ω -спутник формации $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, h – такая ωF -функция, что $h(\omega') = \text{form}(G/O_\omega(G))$, $h(q) = \text{form}(G/G_{\delta(q)})$ для всех $q \in (\pi(G) \cap \omega) \setminus \{p\}$, $h(p) = \mathfrak{M}$, $h(q) = \emptyset$, если $q \in \omega \setminus \pi(G)$, и $\mathfrak{H} = \omega F(h, \delta)$. По теореме 5 [5] $f(\omega') = \text{form}(G/O_\omega(G))$, $f(p) = \text{form}(G/G_{\delta(p)})$ для всех $p \in \pi(G) \cap \omega$, $f(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Пусть $q = p$. Так как δ – b -направление, то $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)$. Тогда $P \subseteq G_{\delta(p)}$. С другой стороны, $G_{\delta(p)} \subseteq F_{cp}(G) \subseteq C_G(P) = P$. Таким образом, $G_{\delta(p)} = P$ и $h(p) = \mathfrak{M} \subset \text{form } H = \text{form}(G/P) = \text{form}(G/G_{\delta(p)}) = f(p)$. Поэтому, $h \leq f$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ω -веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{B}$ – собственная ω -веерная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$ и b –

ее минимальный ω -спутник. По следствию 5.1 [5] $b \leq f$. Пусть $q = p$. Предположим, что $b(p) = f(p)$. Тогда $G/P \in b(p)$. Так как $P \in \mathfrak{N}_p$, по лемме 7 [6] $G \in \mathfrak{N}_p b(p) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Поэтому, $b(p) \subset f(p) = \text{form } H$ и $b(p) \subseteq \mathfrak{M} = h(p)$. Следовательно, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H}$ – единственная максимальная ω -верная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$. Согласно теореме 53.44 [10] группа G является формационно критической. Тем самым установлено, что G – $\omega\delta$ -базисная группа. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $G = [P]H$ – монолитическая группа с монолитом $P = C_G(P)$, где P – p -группа, H – f -базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $\text{form } H$. Тогда G является δ -базисной группой, где δ – b -направление такое, что $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая ω -верная формация с br -направлением δ таким, что $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, h – ее максимальный внутренний ω -спутник, f – минимальный ω -спутник ω -верной формации $\mathfrak{F}$ с направлением δ . Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}\omega\delta$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G – такая $\omega\delta$ -базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:

- 1) $G = P$ – группа простого порядка $p \in \omega$;
- 2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, $p \in \omega$, H – f -базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $\text{form } H$ содержится в $h(p)$;
- 3) G – f -базисная группа, $\pi(P) \not\subseteq \omega$, $P = G^{h(\omega')}$ и максимальная подформация из $\text{form } G$ содержится в $h(\omega')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть f – минимальный ω -спутник формации $\mathfrak{F}$. По лемме 1 $\mathfrak{F} = \omega F(G, \delta)$, где G – монолитическая группа из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)$ -критической, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то формация $f(\omega')$ является $h(\omega')$ -критической. По теореме 5 [5] $f(\omega') = \text{form}(G/O_\omega(G))$, $f(p) = \text{form}(G/G_{\delta(p)})$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Согласно теореме 6 [6] $h(\omega') = \mathfrak{H}$ и для любого $p \in \omega$ справедливо $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p h_1(p)$, где h_1 – произвольный внутренний ω -спутник формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\pi(P) \subseteq \omega$ и $p \in \pi(P)$. Предположим, что P – неабелева pd -группа. Тогда $P \in \mathfrak{G}_{Z'_p}$. Так как δ является r -направлением, то $\mathfrak{G}_{Z'_p} \delta(p) = \delta(p)$ и по лемме 1 [6] $G/G_{\delta(p)} \cong (G/P)/(G/P)_{\delta(p)} \in h(p)$. Пусть $q \in (\pi(G) \cap \omega) \setminus \pi(P)$. Тогда $P \in \mathfrak{G}_{Z'_q}$ и ввиду леммы 1 [6] $G/G_{\delta(q)} \cong (G/P)/(G/P)_{\delta(q)} \in h(q)$. Так как $\pi(P) \subseteq \omega$, то $P \subseteq O_\omega(G)$ и $G/O_\omega(G) \cong (G/P)/(O_\omega(G)/P) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Поэтому P – абелева p -группа. Рассмотрим случай, когда $p \notin \pi(\mathfrak{H})$. Так как $p \in \pi(G) \cap \omega$, то $f(p) \neq \emptyset$ и согласно лемме 7 [6] $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $P \notin \mathfrak{H}$, то $P \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ и поэтому $G = P$ – группа простого порядка $p \in \omega$.

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$. Как отмечено выше, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Проверим, что $\mathfrak{N}_p$ – ω -верная формация с направлением δ . Пусть $\mathfrak{T} = \omega F(t, \delta)$, где $t(p) = (1)$, $t(q) = \emptyset$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $t(\omega') = \mathfrak{N}_p$. Покажем, что $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{T}$. С одной стороны, если $A \in \mathfrak{N}_p$, то ввиду равенства $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ имеем $A \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)$, и значит, $A/A_{\delta(p)} = 1 \in t(p)$. Кроме того $A/O_\omega(A) \in \mathfrak{N}_p = t(\omega')$. Следовательно, $A \in \mathfrak{T}$, и поэтому $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{T}$. Допустим, что $\mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{T}$ и B – группа минимального порядка из $\mathfrak{T} \setminus \mathfrak{N}_p$. Тогда группа B монолитична с монолитом $C = B^{\mathfrak{N}_p}$. Если найдется такое число $q \in (\omega \cap \pi(B)) \setminus \{p\}$, то из

$B \in \mathfrak{T}$ получим $B/B_{\delta(q)} \in t(q) = \emptyset$, что невозможно. Следовательно, $\pi(B) \cap \omega = \{p\}$. Предположим, что $C \not\subseteq O_\omega(B)$. Тогда из $B \in \mathfrak{T}$ получим $B \cong B/O_\omega(B) \in t(\omega') = \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Поэтому $C \subseteq O_\omega(B)$, и значит, $\pi(C) \subseteq \omega \cap \pi(B) = \{p\}$. Из $C \in \mathfrak{N}_p$ и $B/C \in \mathfrak{N}_p$ следует, что $B \in \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{T}$. Поскольку $\mathfrak{N}_p$ – ω -верная формация с направлением δ и $P \in \mathfrak{N}_p$, то $\mathfrak{F} = \omega F(P, \delta) \subseteq \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$.

Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ обладает единственной максимальной ω -верной подформацией с направлением δ . Пусть $\mathfrak{F}_1 \neq \emptyset$ – собственная ω -верная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$, f_1 – ее минимальный ω -спутник. Тогда $\pi(\mathfrak{F}_1) \subseteq \pi(\mathfrak{F}) = \{p\}$. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F}_1) = \{p\}$. Тогда $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f_1(p) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Противоречие. Следовательно, $\pi(\mathfrak{F}_1) = \emptyset$ и $\mathfrak{F}_1 = (1)$ – единственная максимальная ω -верная подформация с направлением δ из $\mathfrak{F}$. Согласно следствию 51.34 [10] группа G является критической, а следовательно, и формационно критической. Таким образом, $G = P$ – $\omega\delta$ -базисная группа, и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1).

Пусть $p \in \pi(\mathfrak{H})$ и H – группа минимального порядка из $f(p) \setminus h(p)$. Тогда H – монолитическая группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$. Если $O_p(H) \neq 1$, то $Q \subseteq O_p(H)$ и $H \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Противоречие. Поэтому $O_p(H) = 1$ и ввиду леммы 18.8 [18], существует точный неприводимый $F_p[H]$ -модуль T . Пусть $R = [T]H$. Тогда группа R монолитична с монолитом $T = C_R(T)$. Согласно лемме 7 [6] $R \in \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\omega F(R, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\omega F(R, \delta) \subset \mathfrak{F}$, то $R \in \mathfrak{H}$ и $R/R_{\delta(p)} \in h(p)$. Покажем, что $T = R_{\delta(p)}$. Так как $T \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$, то $T \subseteq R_{\delta(p)}$. Из $\delta \leq \delta_3$ следует, что $R_{\delta(p)} \subseteq F_{cp}(R) \subseteq C_R(T) = T$. Таким образом, $T = R_{\delta(p)}$ и поэтому $R/R_{\delta(p)} = R/T \cong H \in h(p)$, что невозможно. Следовательно, $\omega F(R, \delta) = \mathfrak{F}$ и в качестве группы G можно выбрать группу R .

Покажем, что H – f -базисная группа. Пусть $\mathfrak{X}$ – множество всех тех собственных секций группы H , которые принадлежат формации $\text{form } H = f(p)$. В силу выбора группы H справедливо включение $\mathfrak{X} \subseteq h(p)$. Поэтому $H \notin \text{form } \mathfrak{X}$ и H является формационно критической группой. По лемме 3.3 [8] формация $f(p)$ обладает максимальными подформациями. Допустим, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – различные максимальные подформации из $f(p)$. Тогда $\mathfrak{M}_1 \subseteq h(p)$ и $\mathfrak{M}_2 \subseteq h(p)$, а следовательно, и $\mathfrak{C} = \text{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subseteq h(p)$. Так как $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – максимальные подформации из $f(p)$, то $\mathfrak{C} = f(p) \subseteq h(p)$, что невозможно. Следовательно, формация $\text{form } H$ обладает единственной максимальной подформацией и поэтому H является f -базисной группой. Ввиду леммы 2 группа R является $\omega\delta$ -базисной. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Пусть $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Тогда $f(\omega') = \text{form}(G/O_\omega(G)) = \text{form } G$. Так как $h(\omega') = \mathfrak{H}$, то формация $f(\omega')$ является $\mathfrak{H}$ -критической. Пусть S – группа минимального порядка из $f(\omega') \setminus \mathfrak{H}$. Тогда S – монолитическая группа с монолитом $L = S^{\mathfrak{H}}$. Так как $f(\omega') = \text{form } S \subseteq \mathfrak{F}$, то $S \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Из того, что $S \in \mathfrak{F}$, следует, что $\omega F(S, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $S \notin \mathfrak{H}$, то $\omega F(S, \delta) \not\subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\omega F(S, \delta) = \mathfrak{F}$. Кроме того, можем считать, что $\pi(L) \not\subseteq \omega$.

Покажем, что S – f -базисная группа. Пусть $\mathfrak{X}$ – множество всех тех собственных секций группы S , которые принадлежат формации $\text{form } S$. Тогда $S \notin \text{form } \mathfrak{X}$ и S является формационно критической группой. По лемме 3.3 [8] формация $\text{form } S$ обладает максимальными подформациями. Допустим, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – различные максимальные подформации из $\text{form } S$. Тогда $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому $f(\omega') = \text{form } S = \text{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $\text{form } S$ обладает единственной

максимальной подформацией и S является f -базисной группой. Ввиду теоремы 5 и следствия 5.1 [5] формация $\omega F(S, \delta) = \mathfrak{F}$ содержит лишь конечное множество ω -верных подформаций с направлением δ . Допустим, что $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – различные максимальные ω -верные подформации с направлением δ из $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} = \omega F((\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2), \delta) \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$ и S является $\omega\delta$ -базисной группой. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3).

Достаточность. Пусть G – группа типа 1). Покажем, что $f(p)$ является $h(p)$ -критической формацией. Так как $G \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$, то $G = G_{\delta(p)}$ и $f(p) = (1)$. Если $p \in \pi(\mathfrak{H})$, то по лемме 7 [6] $G \in \mathfrak{N}_p h(p) \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $p \notin \pi(\mathfrak{H})$ и в силу строения h , получим $h(p) = \emptyset$. По лемме 1 $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$ -критической формацией.

Пусть G – группа типа 2). Так как $G_{\delta(p)} = P$, то $f(p) = \text{form}(G/P) = \text{form } H \not\subseteq h(p)$. Поскольку единственная максимальная подформация из $\text{form } H = f(p)$ содержится в $h(p)$, формация $f(p)$ является $h(p)$ -критической. По лемме 1 формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$ -критической.

Пусть G – группа типа 3). Тогда $f(\omega') = \text{form } G \not\subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Так как единственная максимальная подформация из $\text{form } G$ содержится в $h(\omega')$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')$ -критической формацией. По лемме 1 $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$ -критическая формация. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая верная формация с br -направлением δ таким, что $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$, h – ее максимальный внутренний спутник, f – минимальный спутник верной формации $\mathfrak{F}$ с направлением δ . Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_\delta$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathbf{PF}(G, \delta)$, где G – такая δ -базисная группа с монолитом $P = G^\delta$, что выполняется одно из условий:

- 1) $G = P$ – группа простого порядка p ;
- 2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, H – f -базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $\text{form } H$ содержится в $h(p)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая ω -центральная формация, h – ее максимальный внутренний ω -спутник; ω -центральная формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega Z}$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \omega ZF(G)$, где G – такая ωZ -базисная группа с монолитом $P = G^\delta$, что выполняется одно из условий:

- 1) $G = P$ – группа простого порядка $p \in \omega$;
- 2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, $p \in \omega$, H – f -базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $\text{form } H$ содержится в $h(p)$;
- 3) G – f -базисная группа: $\pi(P) \not\subseteq \omega$, $P = G^{h(\omega')}$ и максимальная подформация из $\text{form } G$ содержится в $h(\omega')$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая центральная формация, h – ее максимальный внутренний спутник. Центральная формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_Z$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = ZF(G)$, где G – такая Z -базисная группа с монолитом $P = G^\delta$, что выполняется одно из условий:

- 1) $G = P$ – группа простого порядка p ;
- 2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, H – f -базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $\text{form } H$ содержится в $h(p)$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая ω -специальная формация, h – ее максимальный внутренний ω -спутник; ω -специальная формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega S}$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \omega SF(G)$, где G – такая ωS -базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:

- 1) $G = P$ – группа простого порядка $p \in \omega$;
- 2) $G = [P]H$, где $P = O_p(G)$ – p -группа, $p \in \omega$, H – f -базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $\text{form } H$ содержится в $h(p)$;
- 3) G – f -базисная группа: $\pi(P) \not\subseteq \omega$, $P = G^{h(\omega')}$ и максимальная подформация из $\text{form } G$ содержится в $h(\omega')$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая специальная формация, h – ее максимальный внутренний спутник. Специальная формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_S$ -критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = SF(G)$, где G – такая S -базисная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:

- 1) $G = P$ – группа простого порядка p ;
- 2) $G = [P]H$, где $P = O_p(G)$ – p -группа, H – f -базисная группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$ и максимальная подформация из $\text{form } H$ содержится в $h(p)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шеметков Л. А. Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. Киев: Наукова думка, 1980. С. 37–50.
- [2] Скиба А. Н. О критических формациях // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: ИМ АН Украины, 1993. С. 250–268.
- [3] Селькин В. М., Скиба А. Н. О $\mathfrak{H}_{\Theta\omega}$ -критических формациях // Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1999. Вып. 14. С. 127–131.
- [4] Сафонова И. Н. О минимальных ω -локальных не $\mathfrak{H}$ -формациях // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матем. навук. 1999. №2. С. 23–27.
- [5] Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω -всерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 1. С. 43–60.
- [6] Ведерников В. А. О новых типах ω -всерных формаций конечных групп // Укр. матем. конгресс. Алг. і теор. чисел. Праці. Киев, 2002. С. 36–45.
- [7] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
- [8] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1978.
- [9] Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
- [10] Нейман Х. Многообразия групп. М.: Мир, 1969.

Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского
E-mail: blse@rol.ru

Поступило
18.05.2004
Исправленный вариант
10.02.2005