Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Мышкис, Авторегулируемый импульсный точечный
подогрев конечной среды, *Матем. заметки*, 2006, том 79,
выпуск 1, 102–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:34:37

УДК 517.977.56

АВТОРЕГУЛИРУЕМЫЙ ИМПУЛЬСНЫЙ ТОЧЕЧНЫЙ ПОДОГРЕВ КОНЕЧНОЙ СРЕДЫ

А. Д. Мышкис

Рассматривается конечная теплопроводящая среда, на границе которой поддерживается нулевая температура, причем одна и та же порция тепла поступает в определенной точке в момент, когда в этой точке температура снижается до заданного уровня. Доказаны существование и единственность, с точностью до произвольного сдвига во времени, периодического режима, имеющего единственный тепловой импульс на каждом периоде. Эффективный алгоритм построения этого режима указан, если средой служит n -мерный шар, подогреваемый в его центре, или если средой служит отрезок, подогреваемый в какой-либо его точке.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. В статье [1] рассмотрен процесс охлаждения стержня, на концах которого поддерживается нулевая температура, причем в моменты, когда общее количество тепла в стержне достигает заданного значения, происходит мгновенная подкачка тепла в стержень по всей его длине. Таким образом, моменты тепловых импульсов не заданы заранее, а определяются самим процессом. В упомянутой статье получены условия существования и единственности в данной ситуации асимптотически устойчивых простых (см. ниже) периодических режимов. Надо отметить, что статья [1] имеет, в основном, методический характер, так как и критерий переключения (общее количество тепла в стержне), и подкачка тепла по всей длине стержня не вполне естественны.

В статье [2] рассматривалась более естественная ситуация. Здесь стержень считался бесконечным, критерием служила температура в какой-либо его фиксированной точке, и считалось, что стержню сообщается определенная порция тепла в этой точке, когда температура в ней достигает определенного значения. Конечно, в такой ситуации периодические режимы невозможны, так что рассматриваются только свойства последовательности моментов импульсов. Асимптотическое выражение для этой последовательности было затем получено в совместной работе китайских математиков Yen-Mei J. Chen, Yunshyong Chow и June Hsieh.

В настоящей статье рассматривается случай, когда среда, в которой распространяется тепло и на границе которой поддерживается нулевая температура, ограниченная, а закон подачи тепловых импульсов такой же, как в [2]. В общей ситуации доказаны существование и единственность, с точностью до произвольного сдвига во времени, *простого периодического режима*, т.е. имеющего ровно один импульс на каждом своем периоде. Эффективный алгоритм построения этого режима, указан в двух случаях: когда

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00665, и Фонда фундаментальных исследований Министерства транспорта РФ.

средой служит n -мерный шар, подогреваемый в его центре, и когда средой служит отрезок (прямолинейный стержень), подогреваемый в какой-либо его точке.

2. Общая схема построения периодического решения. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, – ограниченная (открытая) область, $x_0 \in G$ – произвольная фиксированная точка, в которой будут производиться импульсный нагрев и измеряться температура. Обозначим через $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty$ последовательность всех собственных значений оператора $U \mapsto -\Delta U$ в G (Δ – лапласиан) с краевым условием $U|_{\partial G} = 0$, а через $\{U_j\}$ – последовательность соответствующих ортонормированных собственных функций. Отметим, что достижение граничного условия понимается, вообще говоря, лишь в обобщенном смысле; для достижения его в обычном смысле достаточно, например, чтобы каждой точки ∂G можно было коснуться конусом, целиком расположенным вне G .

Для произвольной функции $U \in L_2(G)$ имеет место разложение $U = \sum_{j=1}^{\infty} c_j U_j$, где $c_j = \int_G U U_j dG$ ($\forall j \in \mathbb{N}$), а сходимость понимается в смысле $L_2(G)$. Если же U – обобщенная функция с носителем, принадлежащим G , то справедливы аналогичные формулы, но сходимость понимается в смысле теории обобщенных функций. Отсюда, в частности, вытекает разложение импульсной функции

$$h\delta(x - x_0) = h \sum_{j=1}^{\infty} U_j(x_0) U_j(x), \quad h = \text{const} > 0, \quad (1)$$

которая добавляется к распределенной температуре, когда она в точке x_0 достигает заданного критического значения u_c .

Так как в рассматриваемой ситуации периодический процесс невозможен без наличия импульсов и так как в силу автономности задачи процесс допускает произвольный сдвиг во времени, то примем, что в момент $t = 0$ температура в точке x_0 принимает критическое значение: $u(x, 0) = u_c$. Записав разложение

$$u(x, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j U_j(x), \quad x \in G \quad (2)$$

и учитывая условие критичности момента времени

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j U_j(x_0) = u_c, \quad (3)$$

получаем в силу формулы (1)

$$u(x, 0^+) = \sum_{j=1}^{\infty} [c_j + h U_j(x_0)] U_j(x).$$

Приняв это выражение за начальное распределение температуры, находим закон этого распределения до следующего момента $t = T$ импульсного подогрева:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} [c_j + h U_j(x_0)] U_j(x) e^{-\lambda_j t}, \quad x \in G, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

где a – коэффициент температуропроводности, который считается заданным.

Если мы хотим получать простое периодическое решение, то полученное выражение должно при $t = T$ совпасть с выражением (2). Отсюда

$$c_j + hU_j(x_0)e^{-a\lambda_j T} = c_j,$$

и потому

$$c_j = \frac{hU_j(x_0)e^{-a\lambda_j T}}{1 - e^{-a\lambda_j T}} = \frac{hU_j(x_0)}{e^{a\lambda_j T} - 1} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Подставив это выражение в формулы (3) и (4), приходим к равенствам

$$h \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j^2(x_0)}{e^{a\lambda_j T} - 1} = u_c, \quad (5)$$

$$u(x, t) = h \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j(x_0)e^{-a\lambda_j T}}{1 - e^{-a\lambda_j T}} U_j(x), \quad x \in G, \quad 0 < t \leq T. \quad (6)$$

Если рассматривать члены ряда (5) как функции $T \in (0, \infty)$, то мы получаем ряд из непрерывных убывающих функций, равномерно сходящийся на любом интервале $[\tau, \infty)$, $\tau \in (0, \infty)$, причем все эти функции стремятся к бесконечности при $T \rightarrow 0$ и к нулю при $T \rightarrow \infty$. Поэтому и вся левая часть формулы (5) представляет собой непрерывную убывающую функцию $T \in (0, \infty)$, стремящуюся к бесконечности при $T \rightarrow 0$ и к нулю при $T \rightarrow \infty$. Отсюда сразу следует

ТЕОРЕМА 1. *При заданных h и u_c существует одно и только одно простое периодическое решение поставленной задачи об авторегулируемом импульсном точечном подогреве. Период этого решения определяется с помощью формулы (5), а само решение на своем периоде определяется формулой (6).*

Отметим, что формула (5) однозначно определяет любую из трех величин h , u_c и T , если две другие заданы.

3. Пример I: подогрев шара в его центре. В этом примере в силу теоремы 1 решение задачи о периодическом авторегулируемом импульсном подогреве должно быть центрально-симметричным, т.е. при заданных значениях параметров зависеть только от $r := |x|$. Поэтому и во всех разложениях должны участвовать только центрально-симметричные собственные функции.

Выражение лапласиана Δ для центрально-симметричной функции $r \mapsto U(r)$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, имеет вид

$$\Delta U(r) = U''(r) + \frac{n-1}{r} U'(r),$$

и потому задача о нахождении центрально-симметричных собственных функций для оператора $-\Delta$ в шаре радиуса R имеет вид

$$rU''(r) + (n-1)U'(r) + \lambda rU(r) = 0, \quad U(r) = 0.$$

С помощью подстановки $U(r) = r^{1-n/2}V(r)$ нетрудно проверить, что совокупность собственных значений и соответствующих нормированных собственных функций такова:

$$\lambda_j = \left(\frac{\mu_{n/2-1,j}}{R} \right)^2, \quad U_j(r) = r^{1-n/2} \frac{J_{n/2-1}(\sqrt{\lambda_j} r)}{\sqrt{\sigma_{n-1}/2R} |J_{n/2}(\sqrt{\lambda_j} R)|}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Здесь и далее J_p – это функция Бесселя I рода порядка p , μ_j – ее j -й положительный нуль, а $\sigma_p = 2\pi^{(p+1)/2}/\Gamma((p+1)/2)$ – площадь единичной p -мерной сферы ($\sigma_0 = 2$, $\sigma_1 = 2\pi$ и т.д.). Применяемые здесь и далее свойства функции Бесселя можно найти, например, в [3].

Воспользовавшись асимптотическим выражением

$$J_p(z) \sim \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^p, \quad z \rightarrow 0,$$

и формулой для σ_{n-1} , после простых преобразований получаем предельное выражение

$$U_j(0) = \frac{\lambda_j^{(n-2)/4}}{2^{(n-2)/2} \pi^{n/4} R \sqrt{\Gamma(n/2)} |J_{n/2}(\sqrt{\lambda_j} R)|}. \quad (7)$$

Подставив его в формулу (5), получаем уравнение для определения периода T простого периодического авторегулируемого подогрева шара в его центре с помощью импульса интенсивности h

$$\frac{h}{2^{n-2} \pi^{n/2} R^2 \Gamma(n/2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^{(n-2)-1}}{J_{n/2}^2(\sqrt{\lambda_j} R) (e^{a\lambda_j T} - 1)} = u_c. \quad (8)$$

Закон изменения температуры при этом подогреве можно получать с помощью подстановки выражения (7) в формулу (6).

Отметим, в частности, случай $n = 1$, когда, шар превращается в отрезок длины $2R$, подогреваемый импульсами из своего центра. Так как

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

из приведенных выше общих формул получаем

$$\mu_{1/2,j} = \frac{2j-1}{2} \pi, \quad \lambda_j = \left(\frac{2j-1}{2R} \pi \right)^2, \quad U_j(r) = \frac{1}{\sqrt{R}} \cos \frac{2j-1}{2R} \pi r.$$

Уравнение (8) для определения периода T приобретает вид

$$\frac{h}{R} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{e^{a((2j-1)\pi/(2R))^2 T} - 1} = u_c. \quad (9)$$

4. Пример II: подогрев прямолинейного стержня. Пусть прямолинейный отрезок $[-l, l]$, $0 < l < \infty$, подвергается импульсному подогреву в точке $x_0 \in [0, l]$. Здесь задача о нахождении собственных функций для оператора $-\Delta$ имеет вид

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad -l \leq x \leq l, \quad u(\pm l) = 0.$$

Поэтому все собственные значения и соответствующие им нормированные собственные функции получаются по формулам

$$\lambda_j = \left(\frac{j\pi}{2l}\right)^2, \quad U_j(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{j\pi(x+l)}{2l}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Из общей формулы (5) получаем уравнение для нахождения периода правильных периодических колебаний температуры при авторегулируемом точечном импульсном подогреве

$$\frac{h}{l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin^2[j\pi(x_0+l)/(2l)]}{e^{a[j\pi/(2l)]^2 T} - 1} = u_c.$$

Нетрудно проверить, что это уравнение для $x_0 = 0$ совпадает с уравнением (9) при $r = l$.

5. Несколько замечаний. Естественно ожидать, что построенные простые периодические режимы асимптотически устойчивы относительно возмущения начальных условий. Однако это пока не доказано, даже при $n = 1$ и подогреве в центре стержня. Не исключено, что этот вопрос может быть связан с неким общим утверждением о поведении разрывных автономных систем в бесконечномерном пространстве.

Другое замечание относится к условию простоты периодического режима. Вопрос о существовании и свойствах непростых периодических режимов пока остается открытым. Возможно, что он связан с проблемой бифуркации циклов (см. [4]) в бесконечномерном пространстве.

Наконец, представляет интерес управление процессом авторегулирования с помощью измерения температуры не в той точке, в которой подается тепловой импульс. Здесь некоторая трудность состоит в немонотонном характере изменения температуры в точке наблюдения между моментами последовательных импульсов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мышкис А. Д. Процесс теплопроводности с авторегулируемой импульсной поддержкой // Автоматика и телемеханика. 1995. № 2. С. 35–43.
- [2] Myshkis A. D. On a recurrently defined sequence // J. Differential Equations Appl. 1997. V. 3. № 1. P. 89–91.
- [3] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949.
- [4] Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986.