Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Нестеренко, Об одном тождестве Малера, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 1, 107–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2679>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:05:27

УДК 517.5+511.36

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ МАЛЕРА

Ю. В. Нестеренко

Доказываются представления некоторых кратных интегралов, зависящих от комплексного параметра z , в виде многочленов от z и $\ln(1-z)$. Подобные тождества впервые использовал К. Малер в связи с доказательствами некоторых результатов теории трансцендентных чисел.

Библиография: 13 названий.

Введение. В настоящей статье рассматриваются некоторые свойства функций, задаваемых интегралами

$$F(z) = \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^m \frac{x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_i \cdots x_m)^{c_i}} dx_1 \cdots dx_m, \quad (1)$$

где a_i, b_i, c_i – фиксированные действительные числа. Будет предполагаться, что z – комплексное число, $|z| < 1$, и $0 < a_i < b_i$. Это обеспечивает сходимость. Интегралы такого вида используются в теории трансцендентных чисел для конструкции совместных диофантовых приближений к значениям гипергеометрических функций, в частности, логарифмической функции и бинома. С их помощью получаются также совместные приближения к значениям полилогарифмов и так называемых обобщенных полилогарифмов.

Пусть $\bar{s} = (s_1, \dots, s_m)$ – вектор с целыми положительными координатами. *Обобщенными полилогарифмами* будем называть функции, задаваемые следующими кратными рядами:

$$\text{Li}_{\bar{s}}(z) = \sum_{n_1 > \dots > n_m \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \cdots n_m^{s_m}}, \quad \text{Le}_{\bar{s}}(z) = \sum_{n_1 \geq \dots \geq n_m \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \cdots n_m^{s_m}}.$$

При $m = 1$ таким способом получаются классические полилогарифмы. Свойства обобщенных полилогарифмов изучались в статьях различных авторов (см. [1] для дальнейших ссылок). Функции каждого из семейств Li и Le линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, а линейные пространства над $\mathbb{Q}$, порождаемые этими семействами, совпадают. Явные

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00359.

формулы, выражающие функции одного семейства через функции другого, указаны в [2, предложения 2 и 3].

При целых значениях параметров a_i, b_i, c_i интегралы вида (1), умноженные на некоторую степень переменной z , представляются в виде линейной комбинации обобщенных полилогарифмов с полиномиальными от z коэффициентами. Приведем некоторые примеры.

ПРИМЕР 1. В работе В. Н. Сорокина [3] для доказательства иррациональности числа $\zeta(3)$ при любом целом неотрицательном n устанавливается тождество

$$\begin{aligned} z^{2n+1} \int_{[0,1]^3} \frac{\prod_{i=1}^3 x_i^n (1-x_i)^n}{(1-zx_2x_3)^{n+1}(1-zx_1x_2x_3)^{n+1}} dx_1 dx_2 dx_3 \\ = A_0(z) + A_1(z) \operatorname{Le}_1(z) + A_2(z) \operatorname{Le}_{1,1}(z) + A_3(z) \operatorname{Le}_{2,1}(z), \end{aligned}$$

где $A_i(z)$ – многочлены с рациональными коэффициентами степени не выше n . При этом интеграл сходится в точке $z = 1$, и выполняются равенства $A_1(1) = A_2(1) = 0$. Поскольку $\operatorname{Le}_{2,1}(1) = 2\zeta(3)$, таким способом получаются рациональные приближения Апери к $\zeta(3)$.

ПРИМЕР 2. Для оценки меры трансцендентности числа π^2 Сорокин в работе [4] доказывает, что

$$\begin{aligned} z^{(r+1)(n+1)-1} \int_{[0,1]^{2r}} \prod_{i=1}^r \frac{x_{2i-1}^{i(n+1)-1} (1-x_{2i-1})^n x_{2i}^{i(n+1)-1} (1-x_{2i})^n}{(1-zx_{2i-1}x_{2i} \cdots x_{2r-1}x_{2r})^{n+1}} dx_1 \cdots dx_{2r} \\ = A_0(z) + \sum_{i=1}^r (A_i(z) \operatorname{Li}_{\{2\}_i}(z) + B_i(z) \operatorname{Li}_{1\{2\}_{i-1}}(z)), \end{aligned}$$

где $\{2\}_i = (2, \dots, 2) \in \mathbb{Z}^i$, $A_i(z), B_i(z)$ – многочлены с рациональными коэффициентами степени не выше n . При этом также выполняются равенства $B_i(1) = 0$.

ПРИМЕР 3. В случае

$$c_2 = \dots = c_m = 0, \quad 1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m < b_m \leq \dots \leq b_1, \quad a_1 \leq c_1 \leq \sum_{i=1}^m (b_i - a_i)$$

имеет место представление

$$\begin{aligned} z^{b_1-1} \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_1 \cdots x_m)^{c_1}} dx_1 \cdots dx_m \\ = A_0(z) + A_1(z) \operatorname{Li}_1(z) + \dots + A_m(z) \operatorname{Li}_m(z), \end{aligned}$$

где $A_k(z)$ – многочлены от z с рациональными коэффициентами, причем $\deg A_i(z) \leq b_1 - a_i - 1$, $1 \leq i \leq m$, $\deg A_0(z) \leq b_1 - a_1 - 1$ (см. [5]). При специальном выборе $c_1 = (2r+1)n+2$, $a_i = rn+1$, $b_i = (r+1)n+2$, где r – некоторое целое число, $1 \leq 2r+1 \leq m$, это тождество использовалось Т. Ривоалем в работе [6] для доказательства бесконечности множества иррациональных чисел в последовательности $\zeta(2k+1)$, $k = 1, 2, \dots$.

ПРИМЕР 4. Следующее тождество найдено С. А. Злобиным [7]. Если параметры a_i, b_i, c_i – целые положительные числа с условиями

$$a_i < b_i, \quad \sum_{j=m-i+1}^m (b_j - a_j - c_j) \geq 0, \quad b_i \leq a_{i-1} + c_i$$

при всех возможных значениях индекса i , то

$$z^{b-1}F(z) = A_0(z) + \sum_{k=1}^m A_k(z) \operatorname{Le}_{\{1\}_k}(z),$$

где $b = \max b_j$ и $A_k(z)$ – многочлены с рациональными коэффициентами, степени которых оцениваются некоторыми величинами, зависящими от параметров a_i, b_i, c_i .

ПРИМЕР 5. Злобину принадлежит общий результат (см. [8], [7]). Пусть a_i, b_i, c_i – неотрицательные целые числа с условиями

$$b_i > a_i > 0, \quad \sum_{i=k}^m (b_i - a_i - c_i) \geq 0, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Обозначим $a = \min a_i$, $b = \max b_i$. В этих условиях функция $z^{b-1}F(z)$ может быть представлена в виде линейной формы от 1 и обобщенных полилогарифмов $\operatorname{Le}_{\bar{s}}(z)$, $\bar{s} = (s_1, \dots, s_l)$, где l не превосходит количества положительных чисел среди c_i , и выполняется неравенство $s_1 + \dots + s_l \leq m$. Коэффициенты этой линейной формы есть многочлены с рациональными коэффициентами, степень которых не превосходит $b - a - 1$.

Примеры 1–4 показывают, что последнее утверждение не всегда точно отражает реальное положение вещей. Вместе с тем, знание того, какие полилогарифмы действительно входят в линейную форму, а также того, каковы действительные величины степеней многочленов $A_j(z)$, весьма важно для теоретико-числовых приложений. Конечно, важны и арифметические характеристики многочленов – величина их коэффициентов и правильные оценки их общих знаменателей, но в настоящей статье мы не будем затрагивать арифметические вопросы.

Ниже будут установлены достаточно точные ограничения на параметры a_i, b_i, c_i , при которых интеграл (1) представим в виде линейной комбинации функций $\operatorname{Li}_{\{1\}_k}$.

1. Интегральное тождество Малера. Вероятно, первым частные интегралы вида (1) в связи с диофантовыми приближениями корней из рациональных чисел стал рассматривать в 1931 г. К. Малер (см. [9]). Впрочем, его интегралы отличались от (1) и могут быть получены из них заменой переменных $x_j = t_j/t_{j+1}$, $j = 1, \dots, m-1$, $x_m = t_m$; соответственно область интегрирования у Малера задавалась неравенствами $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq 1$. В случае Малера интегралы (1) представлялись в виде линейных форм от биномиальных функций $(1-z)^{\omega_i}$ с показателями ω_i , не сравнимыми по модулю 1. Малер нашел также представление этих линейных форм в виде комплексных контурных интегралов. Формулы Малера воспроизведены в работе А. Бейкера [10], где они использовались для доказательства оценок снизу линейных форм с целыми коэффициентами от корней из алгебраических чисел. Аналогичные формулы для экспоненциальной функции вместо биннома можно найти в работе Малера [11].

В этом пункте будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\omega_0, \dots, \omega_m \in \mathbb{C}$ и $\rho_0, \dots, \rho_m$ — целые положительные числа. Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$, $|\arg(1-z)| < \pi$, справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \frac{(-z)^{\rho_0+\dots+\rho_m-1}}{\prod_{j=0}^m \Gamma(\rho_j)} \int_{[0,1]^m} \prod_{j=1}^m \frac{x_j^{\rho_0+\dots+\rho_{j-1}-1} (1-x_j)^{\rho_j-1}}{(1-zx_j \dots x_m)^{\rho_j+\omega_j-\omega_{j-1}}} dx_1 \dots dx_m \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \prod_{j=0}^m \frac{\Gamma(\zeta - \omega_j - \rho_j + 1)}{\Gamma(\zeta - \omega_j + 1)} (1-z)^{\zeta - \omega_m} d\zeta, \end{aligned} \quad (2)$$

где $(1-z)^\zeta = e^{\zeta \log(1-z)}$ и $\log(1-z) = \log|1-z| + i \arg(1-z)$, другие комплексные степени $1-z$ определяются точно так же, а C — гладкий замкнутый контур, однократно обходящий в положительном направлении все точки $\omega_j + \sigma$, $0 \leq \sigma < \rho_j$, $\sigma \in \mathbb{Z}$. В случае $m = 0$ интеграл в левой части считается равным 1.

Это утверждение в случае $\omega_h - \omega_k \notin \mathbb{Z}$ и с точностью до замены переменных в кратном интеграле по существу было доказано в 1931 г. Малером [9]. Ясно, что общий случай может быть получен с помощью аналитического продолжения по переменным ω_h . Малер доказал, что оба интеграла в левой и правой части (2) равны линейным формам от биномов $(1-z)^{\omega_h}$, коэффициенты при которых суть многочлены от z степени $\rho_h - 1$, и эти линейные формы являются приближениями Паде для указанной совокупности биномов. Единственность приближения Паде означала совпадение этих линейных форм, а следовательно, и интегралов.

Оба интегральных представления использовались Малером для выяснения различных аналитических и арифметических свойств построенных линейных форм. Но в случае $\omega_j \in \mathbb{Z}$ применялся только комплексный интеграл.

Обозначим $v_j = \rho_j + \omega_j$, $j = 0, 1, \dots, m$. Можно считать, что интегралы, присутствующие в теореме 1, являются функциями параметров ω_j, v_j .

СЛЕДСТВИЕ 1. Кратный интеграл (2) не меняется при сдвиге всех параметров ω_j на одно и то же произвольное число. Будучи умноженным на $(1-z)^{\omega_m}$, он не меняется, как при любой перестановке параметров ω_j , так и при любой перестановке параметров v_j , при которой вновь полученные интегралы сходятся.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из определения кратного интеграла (2). Будучи умноженным на $(1-z)^{\omega_m}$ комплексный интеграл в (2), очевидно, симметричен относительно двух групп переменных v_j и ω_j . Это доказывает второе утверждение.

Заметим, что комплексный интеграл в правой части (2), умноженный на $(1-z)^{\omega_m}$, может быть представлен как G -функция Мейера

$$G_{m+1, m+1}^{0, m+1} \left(\begin{matrix} \omega_0 + \rho_0, \dots, \omega_m + \rho_m \\ \omega_0, \dots, \omega_m \end{matrix} \middle| 1-z \right)$$

(см. [12]). Такая форма записи в связи с построением приближений Эрмита–Паде для биномов и степеней логарифмов использовалась Х. Ягером (см. [13, части IV и VI]).

Предположим, что все параметры ω_j суть целые числа. В дальнейшем удобно использовать обозначения $\mathcal{T}_j = [\omega_j, \omega_j + \rho_j - 1]$, $0 \leq j \leq m$, для отрезков действительной прямой и $\mathcal{T} = \bigcup_{j=0}^m \mathcal{T}_j$. Пусть также для каждого $l \in \mathbb{Z}$ символ $d(l)$ обозначает количество отрезков $\mathcal{T}_j$, содержащих точку l .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если все параметры $\omega_0, \dots, \omega_m$ суть целые числа, причем $\omega_j \geq \omega_m = 0$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, то кратный интеграл в (2) равен

$$\sum_{k=0}^{d-1} A_k(z) \log^k(1-z), \quad A_k(z) \in \mathbb{Q}[z],$$

где $d = \max_{l \in \mathcal{T}} d(l)$. При этом степень многочлена $A_k(z)$ не превосходит максимального из чисел l множества $\mathcal{T}$ с условием $d(l) \geq k+1$, а кратность, с которой этот многочлен обращается в нуль в точке $z = 1$, не меньше минимального из чисел l с тем же условием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для рациональной функции

$$R(\zeta) = \prod_{j=0}^m \frac{\Gamma(\zeta - \omega_j - \rho_j + 1)}{\Gamma(\zeta - \omega_j + 1)} = \frac{1}{\prod_{j=0}^m (\zeta - \omega_j - \rho_j + 1) \cdots (\zeta - \omega_j)}$$

справедливо представление

$$R(\zeta) = \prod_{j \in \mathcal{T}} \frac{1}{(\zeta - j)^{d(j)}}.$$

Согласно теореме о вычетах комплексный интеграл в правой части равенства (2) равен

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathcal{T}} \operatorname{Res}_{\zeta=l} (R(\zeta)(1-z)^\zeta) &= \sum_{l \in \mathcal{T}} \left(\prod_{\substack{j \in \mathcal{T} \\ j \neq l}} (\zeta - j)^{-d(j)} (1-z)^\zeta \right)_{\zeta=l}^{(d(l)-1)} \\ &= \sum_{l \in \mathcal{T}} \sum_{k=0}^{d(l)-1} \binom{d(l)-1}{k} (1-z)^l \log^k(1-z) \left(\prod_{\substack{j \in \mathcal{T} \\ j \neq l}} (\zeta - j)^{-d(j)} \right)_{\zeta=l}^{(d(l)-1-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} A_k(z) \log^k(1-z), \end{aligned}$$

где $d = \max_{l \in \mathcal{T}} d(l)$ и

$$A_k(z) = \sum_{\substack{l \in \mathcal{T} \\ d(l) \geq k+1}} \gamma_{l,k} (1-z)^l, \quad \gamma_{l,k} \in \mathbb{Q}.$$

Отсюда следует требуемое утверждение.

Для доказательства теоремы 1 понадобятся две простые леммы.

ЛЕММА 1. Пусть n – целое неотрицательное число, $f(z)$ – функция, непрерывная в окрестности точки $z = 0$, и

$$g(z) = z^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} f(xz) dx.$$

Тогда $g^{(n+1)}(z) = f(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n \geq 0$ справедливо представление

$$g(z) = \int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!} f(t) dt, \quad (3)$$

из которого следует нужное утверждение при $n = 0$. Дифференцируя (3) при $n \geq 1$, получаем равенство

$$g'(z) = \int_0^z \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt,$$

позволяющее индукцией по n вывести необходимое утверждение и в общем случае.

Пусть $a_i, b_i \in \mathbb{Z}, c_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, m$, причем $b_i > a_i > 0$. Определим для каждого целого $r, 1 \leq r \leq m$, функцию

$$F_r(z) = \frac{z^{b_r-1}}{\prod_{j=1}^r \Gamma(b_j - a_j)} \int_{[0,1]^r} \prod_{j=1}^r \frac{x_j^{a_j-1} (1-x_j)^{b_j-a_j-1}}{(1-zx_j \cdots x_r)^{c_j}} dx_1 \cdots dx_r \quad (4)$$

и положим также $F_0(z) = 1$. Здесь считается, что $z \in \mathbb{C}, |\arg(1-z)| < \pi$, и комплексные степени определяются с условием указанного ранее соглашения. Для краткости буквой D будем обозначать символ производной d/dz .

ЛЕММА 2. Во введенных выше обозначениях выполняется равенство

$$D^{b_r-a_r} F_r(z) = \frac{z^{a_r-b_{r-1}}}{(1-z)^{c_r}} \cdot F_{r-1}(z), \quad r = 1, \dots, m,$$

где считается $b_0 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функций $F_j(z)$ находим тождество

$$F_r(z) = z^{b_r-a_r} \int_0^1 \frac{(1-x_r)^{b_r-a_r-1}}{(b_r-a_r-1)!} \frac{(zx_r)^{a_r-b_{r-1}}}{(1-zx_r)^{c_r}} F_{r-1}(zx_r) dx_r,$$

из которого в силу леммы 1 следует утверждаемое равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем тождество (2) индукцией по m . При $m = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(\zeta - \omega_0 - \rho_0 + 1)}{\Gamma(\zeta - \omega_0 + 1)} (1-z)^{\zeta - \omega_0} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1-z)^{\zeta - \omega_0}}{\prod_{\sigma=0}^{\rho_0-1} (\zeta - \omega_0 - \sigma)} d\zeta \\ &= \sum_{\sigma=0}^{\rho_0-1} \frac{(1-z)^\sigma (-1)^{\rho_0-1-\sigma}}{\sigma! (\rho_0-1-\sigma)!} = \frac{(-1)^{\rho_0-1}}{(\rho_0-1)!} \sum_{\sigma=0}^{\rho_0-1} \binom{\rho_0-1}{\sigma} (z-1)^\sigma = \frac{(-z)^{\rho_0-1}}{(\rho_0-1)!}. \end{aligned}$$

Получившееся выражение совпадает с левой частью (2) при $m = 0$.

Пусть теперь $m \geq 1$ и для кратных интегралов размерности меньшей m утверждение теоремы доказано. Определим функции $F_r(z)$, как это указано ранее, выбрав параметры следующим образом:

$$a_j = \rho_0 + \dots + \rho_{j-1}, \quad b_j = \rho_0 + \dots + \rho_j, \quad c_j = \rho_j + \omega_j - \omega_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Тогда, очевидно, левая часть равенства (2) имеет вид $(-1)^{\rho_0+\dots+\rho_m-1}F_m(z)$.

Определим теперь функции

$$I_r(z) = \frac{(-1)^{\rho_0+\dots+\rho_r-1}}{2\pi i} \int_C \prod_{j=0}^r \frac{\Gamma(\zeta - \omega_j - \rho_j + 1)}{\Gamma(\zeta - \omega_j + 1)} (1-z)^{\zeta - \omega_m} d\zeta$$

для $0 \leq r < m$. Тогда равенство (2) принимает вид $F_m(z) = I_m(z)$.

Дифференцируя функцию $I_m(z)$ под знаком интеграла, находим

$$\begin{aligned} D^{\rho_m} I_m(z) &= \frac{(-1)^{\rho_0+\dots+\rho_{m-1}-1}}{2\pi i} \int_C \prod_{j=0}^{m-1} \frac{\Gamma(\zeta - \omega_j - \rho_j + 1)}{\Gamma(\zeta - \omega_j + 1)} (1-z)^{\zeta - \omega_m - \rho_m} d\zeta \\ &= \frac{1}{(1-z)^{\rho_m + \omega_m - \omega_{m-1}}} I_{m-1}(z). \end{aligned}$$

В точности такое же соотношение

$$D^{\rho_m} F_m(z) = \frac{1}{(1-z)^{\rho_m + \omega_m - \omega_{m-1}}} F_{m-1}(z)$$

получается, если к функциям $F_m(z)$ и $F_{m-1}(z)$ применить лемму 2. По предположению индукции выполняется равенство $F_{m-1}(z) = I_{m-1}(z)$, откуда следует $D^{\rho_m} F_m(z) = D^{\rho_m} I_m(z)$, т.е. разность $F_m(z) - I_m(z)$ есть многочлен степени меньшей ρ_m .

Согласно определению $F_m(z)$ справедливо неравенство

$$\text{ord}_{z=0} F_m(z) \geq \rho_0 + \dots + \rho_m - 1.$$

Докажем, что и для функции $I_m(z)$ выполняется такая же оценка кратности нуля в начале координат. Если z достаточно мало (малость зависит от контура C), то

$$(1-z)^{\zeta - \omega_m} = e^{(\zeta - \omega_m) \log(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - \omega_m)^n}{n!} (\log(1-z))^n,$$

и последний ряд равномерно сходится на C . Поэтому

$$I_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log(1-z))^n}{n!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C (\zeta - \omega_m)^n \cdot \prod_{j=0}^m \frac{\Gamma(\zeta - \omega_j - \rho_j + 1)}{\Gamma(\zeta - \omega_j + 1)} d\zeta. \quad (5)$$

Учитывая, что

$$(\zeta - \omega_m)^n \cdot \prod_{j=0}^m \frac{\Gamma(\zeta - \omega_j - \rho_j + 1)}{\Gamma(\zeta - \omega_j + 1)} = \frac{(\zeta - \omega_m)^n}{\prod_{j=0}^m (\zeta - \omega_j) \cdots (\zeta - \omega_j - \rho_j + 1)}$$

есть рациональная функция, имеющая в ∞ нуль порядка $\rho_0 + \dots + \rho_m - n$, заключаем, что в сумме (5) все слагаемые с $n \leq \rho_0 + \dots + \rho_m - 2$ равны нулю. Это в силу равенства $\text{ord}_{z=0} \log(1-z) = 1$ завершает доказательство оценки для кратности нуля $I_m(z)$ и доказывает тем самым равенство $F_m(z) = I_m(z)$. Теорема 1 доказана.

2. Линейные формы от степеней логарифмов. Кратные интегралы в тождестве Малера имеют вид (1) при $b_j = a_{j+1}$. Ниже будет доказан аналог следствия 2 при менее ограничительных предположениях о параметрах a_i, b_i, c_i .

Рассмотрим последовательность функций

$$f_0(z) = 1, \quad f_k(z) = \frac{1}{k!}(-\log(1-z))^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Эти функции связаны между собой соотношениями

$$f'_k(z) = \frac{1}{1-z} f_{k-1}(z). \quad (6)$$

Легко проверить, что $\text{Li}_{\{1\}_k}(z) = f_k(z)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m$ — такие целые числа, что

$$1 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_m < b_m, \quad c_i \leq b_i - a_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Тогда в области $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, справедливо тождество

$$\frac{z^{b_m-1}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i - a_i)} \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^m \frac{x_i^{a_i-1} (1-x)^{b_i-a_i-1}}{(1-zx_i \dots x_m)^{c_i}} dx_1 \dots dx_m = \sum_{j=0}^d A_j(z) f_j(z),$$

где d не превосходит количества положительных чисел в наборе $c_i, 1 \leq i \leq m$, а многочлены $A_j(z) \in \mathbb{Q}[z], 0 \leq j \leq d$, удовлетворяют условиям

$$\deg A_j(z) \leq b_m - \min_{0 \leq k \leq m} \left(a_k + \sum_{i=k+1}^m c_i \right) - 1, \quad \text{ord}_{z=1} A_j(z) \geq \sum_{i=m+1-j}^m (b_i - a_i - c_i). \quad (8)$$

Здесь предполагается, что a_0 и пустая сумма в последнем неравенстве равны 0. Неравенства $0 < a_j < b_j$ нужны для обеспечения сходимости кратного интеграла.

В основе доказательства теоремы 2 лежит следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть a, b, c, h — целые числа,

$$0 < a < b, \quad c \leq b - a, \quad h \geq 0.$$

Тогда в области $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, выполняется тождество

$$\frac{z^{b-1}}{(b-a-1)!} \int_0^1 \frac{x^{a-1} (1-x)^{b-a-1}}{(1-zx)^c} f_h(zx) dx = \sum_{k=0}^{h+1} A_k(z) f_k(z),$$

где $A_k(z) \in \mathbb{Q}[z]$, причем

$$\deg A_{h+1}(z) \leq b - a - 1, \quad \deg A_k(z) \leq b - \min(a, c) - 1, \quad 0 \leq k \leq h, \\ \text{ord}_{z=1} A_k(z) \geq b - a - c, \quad 1 \leq k \leq h + 1.$$

При $c \leq 0$ многочлен $A_{h+1}(z)$ равен 0.

Для доказательства этого утверждения понадобятся две леммы.

ЛЕММА 3. При любом целом $r \geq 0$ справедливо равенство

$$f_k^{(r)}(z) = \frac{1}{(1-z)^r} \sum_{j=0}^k c(k, r, j) f_j(z),$$

где $c(k, r, j)$ – некоторые целые числа. При $r \geq 1$ суммирование можно вести только до $k-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма легко доказывается индукцией по r . При $r = 0$ равенство, очевидно, выполняется. Шаг индукции проверяется с помощью (6) и простых вычислений:

$$\begin{aligned} f_k^{(r+1)}(z) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(1-z)^r} \sum_{j=0}^k c(k, r, j) f_j(z) \right) \\ &= \frac{1}{(1-z)^{r+1}} \sum_{j=0}^k (rc(k, r, j) + c(k, r, j+1)) f_j(z). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $c(k, r, k+1) = 0$. Соотношение (9) доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. В дальнейшем будем считать, что целые числа a, b, c, h удовлетворяют всем условиям предложения.

Определим два линейных пространства $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ над полем рациональных чисел. Пространство $\mathfrak{L}_1$ состоит из функций

$$\sum_{k=0}^h B_k(z) f_k(z), \quad B_k(z) \in \mathbb{Q}[z], \quad \deg B_k(z) \leq \max(a, c) - 1,$$

а пространство $\mathfrak{L}_2$ из функций

$$\sum_{k=0}^{h+1} A_k(z) f_k(z), \quad A_k(z) \in \mathbb{Q}[z],$$

$$\deg A_{h+1}(z) \leq b - a - 1, \quad \deg A_k(z) \leq b - \min(a, c) - 1, \quad k = 0, \dots, h, \quad (10)$$

$$\text{ord}_{z=1} A_j(z) \geq b - a - c, \quad j = 1, \dots, h+1, \quad (11)$$

$$\text{ord}_{z=1} A_0(z) \geq b - a - \min(0, c). \quad (12)$$

Заметим, что при $c \leq 0$ многочлен $A_{h+1}(z)$ у каждого элемента из $\mathfrak{L}_2$ равен 0.

Функция $\log(1-z)$ трансцендентна, поэтому $\dim \mathfrak{L}_1 = (h+1) \max(a, c)$. Для того, чтобы вычислить размерность линейного пространства $\mathfrak{L}_2$, заметим, что совокупность многочленов $P \in \mathbb{Q}[z]$ с условиями $\deg P \leq u-1$, $\text{ord}_{z=1} P \geq v$, где u, v – целые числа, есть линейное пространство размерности $\max(0, u-v)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{L}_2 &= h \max(a, c) + \max(0, a - \min(a, c) + \min(0, c)) + \max(0, c) \\ &= h \max(a, c) + \max(\max(0, c), \max(a, c)) = (h+1) \max(a, c) = \dim \mathfrak{L}_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi: f(z) \mapsto (1-z)^c f^{(b-a)}(z),$$

определенное на $b-a$ раз дифференцируемых функциях. Так как ядро отображения φ состоит из многочленов степени не выше $b-a-1$, а все многочлены из $\mathfrak{L}_2 \cap \mathbb{Q}[z]$ имеют в точке $z=1$ нуль кратности не меньше $b-a-\min(0, c)$, то $\text{Ker}(\varphi) \cap \mathfrak{L}_2 = (0)$.

ЛЕММА 4. *Справедливо равенство*

$$\varphi(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_1.$$

Поясним сначала, как из этой леммы следует предложение 1. Обозначим

$$G(z) = \frac{z^{b-1}}{(b-a-1)!} \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-a-1}}{(1-zx)^c} f_h(zx) dx.$$

Согласно лемме 1 выполняется равенство

$$G^{(b-a)}(z) = \frac{z^{a-1}}{(1-z)^c} f_h(z).$$

Оно может быть также переписано в виде

$$\varphi(G(z)) = z^{a-1} f_h(z) \in \mathfrak{L}_1.$$

По лемме 4 найдется функция $f(z) \in \mathfrak{L}_2$, для которой

$$\varphi(f(z)) = z^{a-1} f_h(z)$$

и, значит, $G(z) - f(z) \in \text{Ker}(\varphi)$. Учитывая, что $\text{Ker}(\varphi)$ состоит из многочленов степени не выше $b-a-1 \leq b - \min(a, c) - 1$, находим, что функция $G(z)$ представима в виде, утверждаемом предложением 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Достаточно доказать включение $\varphi(\mathfrak{L}_2) \subset \mathfrak{L}_1$; нужное равенство следует из этого включения, равенства размерностей пространств $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ (см. (13)) и $\text{Ker}(\varphi) \cap \mathfrak{L}_2 = (0)$.

В силу линейности отображения φ для доказательства включения достаточно проверить, что

$$\varphi((1-z)^k) \in \mathfrak{L}_1, \quad b-a-\min(0, c) \leq k \leq b-\min(a, c)-1, \quad (14)$$

$$\varphi((1-z)^k f_i(z)) \in \mathfrak{L}_1, \quad b-a-c \leq k \leq b-\min(a, c)-1, \quad 1 \leq i \leq h, \quad (15)$$

$$\varphi((1-z)^k f_{h+1}(z)) \in \mathfrak{L}_1, \quad b-a-c \leq k \leq b-a-1. \quad (16)$$

Включение (14) выполняется, поскольку

$$\varphi((1-z)^k) = (-1)^{b-a} \frac{k!}{(k-b+a)!} (1-z)^{k-(b-a-c)}$$

есть многочлен степени не выше $b-\min(a, c)-1-(b-a-c) = \max(a, c)-1$.

Включения (15) и (16) также проверяются непосредственным вычислением. Применяя правило Лейбница, находим

$$\varphi((1-z)^k f_i(z)) = \sum_{r=0}^{b-a} (-1)^r \binom{b-a}{r} \frac{k!}{(k-r)!} (1-z)^{c+k-r} f_i^{(b-a-r)}(z), \quad (17)$$

причем в последней сумме также должно выполняться неравенство $r \leq k$. Применяя к производным функции $f_i(z)$ представление из леммы 3 и пользуясь в случае (15) неравенствами $b - a - c \leq k \leq b - \min(a, c) - 1$, легко получаем, что правая часть (17) есть линейная комбинация функций $f_0(z), \dots, f_i(z), i \leq h$, с коэффициентами – многочленами от z степени не выше $\max(a, c) - 1$. Это доказывает включение (15).

В случае (16) должно выполняться неравенство $c \geq 1$. Кроме того, имеем $r \leq k \leq b - a - 1$. Поэтому порядок производных функции $f_{h+1}(z)$ в сумме (17) будет не меньше 1. Значит, согласно лемме 3 правая часть (17) будет линейной комбинацией функций $f_0(z), \dots, f_h(z)$. Неравенства $b - a - c \leq k \leq b - a - 1$, как и в предыдущем случае, показывают, что коэффициенты этой линейной комбинации будут многочленами степени не выше $c - 1 \leq \max(a, c) - 1$. Это доказывает включение (16).

Таким образом, лемма 4, а вместе с ней и предложение 1, доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Напомним, что левая часть тождества из теоремы 2 обозначалась ранее как $F_m(z)$. Для доказательства мы воспользуемся индукцией по m .

При $m = 1$ согласно предложению 1 (при $a = a_1, b = b_1, c = c_1, h = 0$) выполняется тождество

$$F_1(z) = A_0(z) + A_1(z)f_1(z),$$

где многочлены с рациональными коэффициентами $A_0(z), A_1(z)$ удовлетворяют условиям

$$\deg A_0(z) \leq b_1 - c_1 - 1, \quad \deg A_1(z) \leq b_1 - a_1 - 1, \quad \text{ord}_{z=1} A_1(z) \geq b_1 - a_1 - c_1.$$

Отсюда следует (8) при $m = 1$.

При $c_1 \leq 0$ согласно предложению 1 имеем $A_1(z) = 0$; в этом случае $d = 0$, что согласуется с утверждением теоремы 2. Итак, при $m = 1$ утверждение теоремы выполняется.

Далее будем считать, что $m \geq 2$ и для интеграла $F_{m-1}(z)$ (см. (4)) утверждение справедливо. В силу (4) имеет место соотношение

$$F_m(z) = \frac{z^{b_m - b_{m-1}}}{\Gamma(b_m - a_m)} \int_0^1 \frac{x^{a_m - b_{m-1}} (1-x)^{b_m - a_m - 1}}{(1-zx)^{c_m}} F_{m-1}(zx) dx. \quad (18)$$

Согласно индуктивному предположению

$$F_{m-1}(z) = \sum_{h=0}^q B_h(z) f_h(z),$$

где q есть количество положительных чисел среди $c_1, \dots, c_{m-1}$, а многочлены с рациональными коэффициентами $B_h(z)$ удовлетворяют условиям

$$\deg B_h(z) \leq b_{m-1} - \min_{0 \leq k \leq m-1} \left(a_k + \sum_{i=k+1}^{m-1} c_i \right) - 1, \quad (19)$$

$$\text{ord}_{z=1} B_h(z) \geq \sum_{i=m-h}^{m-1} (b_i - a_i - c_i). \quad (20)$$

Другими словами, функция $F_{m-1}(z)$ представима как сумма слагаемых вида

$$(1-z)^k f_h(z), \quad (21)$$

где параметры h, k удовлетворяют условиям

$$0 \leq h \leq q, \quad \sum_{i=m-h}^{m-1} (b_i - a_i - c_i) \leq k \leq b_{m-1} - \min_{0 \leq k \leq m-1} \left(a_k + \sum_{i=k+1}^{m-1} c_i \right) - 1. \quad (22)$$

Докажем, что при любых параметрах h, k , удовлетворяющих (22), функция

$$H(z) = \frac{z^{b_m - b_{m-1}}}{\Gamma(b_m - a_m)} \int_0^1 \frac{x^{a_m - b_{m-1}} (1-x)^{b_m - a_m - 1}}{(1-zx)^{c_m - k}} f_h(zx) dx \quad (23)$$

представима в виде

$$H(z) = \sum_{j=0}^{h+1} C_j(z) f_j(z), \quad (24)$$

где многочлены $C_j(z) \in \mathbb{Q}[z]$ удовлетворяют условиям (8). Применим предложение 1 к интегралу (23), выбрав $a = a_m - b_{m-1} + 1$, $b = b_m - b_{m-1} + 1$, $c = c_m - k$. Согласно этому предложению имеет место тождество (24). Для многочлена $C_{h+1}(z)$ справедливо неравенство

$$\deg C_{h+1}(z) \leq b - a - 1 = b_m - a_m - 1 \leq b_m - \min_{0 \leq k \leq m} \left(a_k + \sum_{i=k+1}^m c_i \right) - 1. \quad (25)$$

Если $0 \leq j \leq h$, то по предложению 1 и в соответствии с (22) имеем

$$\begin{aligned} \deg C_j(z) &\leq b - \min(a, c) - 1 = b_m - \min(a_m, c_m + b_{m-1} - k - 1) - 1 \\ &\leq b_m - \min \left(a_m, c_m + \min_{0 \leq k \leq m-1} \left(a_k + \sum_{i=k+1}^{m-1} c_i \right) \right) - 1 \\ &= b_m - \min_{0 \leq k \leq m} \left(a_k + \sum_{i=k+1}^m c_i \right) - 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Далее, при $1 \leq j \leq h+1$, пользуясь (22) и предложением 1, находим

$$\text{ord}_{z=1} C_j(z) \geq b - a - c = b_m - a_m - c_m + k \geq \sum_{i=m-h}^m (b_i - a_i - c_i) \geq \sum_{i=m+1-j}^m (b_i - a_i - c_i). \quad (27)$$

Неравенства (25)–(27) означают справедливость (8) в тождестве из теоремы 2.

При $c_m > 0$ неравенство $h \leq q$ означает, что $h+1$ не превосходит количества положительных среди чисел $c_1, \dots, c_m$. Если $c_m \leq 0$, то при любом k выполняется $c_m - k \leq 0$, так что согласно предложению 1 в равенстве (24) выполняется $C_{h+1}(z) = 0$. Это значит, что параметр d в теореме не превосходит q . Доказательство теоремы 2 этим завершается.

Настоящие результаты были получены во время моего пребывания в Университете г. Кёльна. Этому университету, а также профессору Петеру Бундшу, я хотел бы выразить мою глубокую благодарность за гостеприимство и творческую атмосферу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зудилин В. В. Алгебраические соотношения для кратных дзета-значений // УМН. 2003. Т. 58. № 1. С. 3–32.
- [2] Уланский Е. А. Тождества для обобщенных полилогарифмов // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 4. С. 613–624.
- [3] Сорокин В. Н. О теореме Аперы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. № 3. С. 48–53.
- [4] Сорокин В. Н. О мере трансцендентности числа π^2 // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 87–120.
- [5] Нестеренко Ю. В. Интегральные тождества и конструкции совместных приближений к значениям дзета-функции Римана // Труды IV Международной конференции “Современные проблемы теории чисел и ее приложения” (г. Тула, 2001 г.). М.: Изд. мех.-мат. фак-та МГУ, 2002. С. 115–132.
- [6] Rivoal T. La fonction zéta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1 Math. 2000. V. 331. № 4. P. 267–270.
- [7] Злобин С. А. Разложения кратных интегралов в линейные формы // Докл. РАН. 2004. Т. 398. № 5. С. 595–598.
- [8] Злобин С. А. Интегралы, представимые в виде линейных форм от обобщенных полилогарифмов // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 5. С. 782–787.
- [9] Mahler K. Ein Beweis des Thue–Siegelschen Satzes über die Approximation algebraischer Zahlen für binomische Gleichungen // Math. Ann. 1931. V. 105. P. 267–276.
- [10] Baker A. Simultaneous rational approximations to certain algebraic numbers // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1967. V. 63. P. 693–702.
- [11] Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunction und des Logarithmus // J. Reine Angew. Math. 1932. V. 166. P. 118–150.
- [12] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.
- [13] Jager H. A multidimensional generalization of the Pade table // Indag. Math. 1964. V. 26. P. 193–249.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: nester@orc.ru

Поступило
27.12.2004