Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Фоменко, Об одном аналоге теоремы Зауера, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 463–470

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 11:40:25

УДК 513.766

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ЗАУЕРА

В. Т. Фоменко

В настоящей работе устанавливается аналог теоремы Зауера для проективно эквивалентных поверхностей в классе бесконечно малых эквиареальных деформаций, сохраняющих поточечно сферический образ поверхности.

Библиография: 3 названия.

В теории бесконечно малых изгибаний поверхностей евклидова пространства хорошо известна теорема Р. Зауера [1], утверждающая, что между изгибающими полями двух проективно эквивалентных поверхностей можно установить биективное соответствие таким образом, что тривиальным полям смещений точек одной поверхности соответствуют тривиальные поля смещений точек другой поверхности. В настоящей работе устанавливается аналог теоремы Зауера для проективно эквивалентных поверхностей в классе бесконечно малых эквиареальных деформаций, сохраняющих поточечно сферический образ поверхности.

1. Пусть F^2 – односвязная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E^3 , заданная уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, где $\bar{r} \in C^2(D)$, D – некоторая область параметрической плоскости (u, v) . Рассмотрим деформацию $\{F_\varepsilon^2\}$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, поверхности F^2 , заданную уравнением

$$\bar{R} = \bar{R}(u, v, \varepsilon), \quad (u, v) \in D,$$

где $\bar{R}$ – дважды непрерывно дифференцируемая по параметрам функция, $\bar{R}(u, v, 0) \equiv \bar{r}(u, v)$. Векторное поле $\bar{z} = \partial \bar{R} / \partial \varepsilon|_{\varepsilon=0}$ назовем *полем деформации поверхности F^2* . Далее считаем, что $\bar{z} \in C^2(D)$. Две деформации поверхности будем считать эквивалентными, если их поля деформаций совпадают. Каждый из классов эквивалентных деформаций называют *бесконечно малой деформацией поверхности F^2* . Бесконечно малая деформация поверхности F^2 называется *деформацией с сохранением поточечно ее сферического изображения* (коротко *G-деформацией*), если вариация $\delta \bar{n}$ единичного вектора нормали $\bar{n}$ коллинеарна вектору $\bar{n}$.

Бесконечно малую деформацию поверхности F^2 называют *бесконечно малой эквиареальной деформацией*, если вариация $\delta \sigma$ площади σ произвольной области на поверхности определяется формулой $\delta \sigma = c \cdot \sigma$, где c – постоянная, называемая *коэффициентом рекуррентности*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00814.

Если $c = 0$, то соответствующую деформацию называют *ареальной*.

В настоящей работе будем рассматривать бесконечно малые эквиареальные G -деформации с заданным коэффициентом рекуррентности.

Выведем уравнения, описывающие такие деформации. Аналитически G -деформация характеризуется соотношениями $\bar{z}_u = \alpha \bar{r}_u + \beta \bar{r}_v$, $\bar{z}_v = \gamma \bar{r}_u + \delta \bar{r}_v$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — некоторые функции. Так как $\bar{z} \in C^2$, то $\bar{z}_{uv} = \bar{z}_{vu}$ и потому имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_v + \alpha \Gamma_{12}^1 + \beta \Gamma_{22}^1 &= \gamma_u + \gamma \Gamma_{11}^1 + \delta \Gamma_{12}^1, & \beta_v + \alpha \Gamma_{12}^2 + \beta \Gamma_{22}^2 &= \delta_u + \gamma \Gamma_{11}^2 + \delta \Gamma_{12}^2, \\ \alpha b_{12} + \beta b_{22} &= \gamma b_{11} + \delta b_{12}, \end{aligned} \quad (1)$$

где Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля второго рода поверхности F^2 , b_{ij} — коэффициенты второй основной формы поверхности. Система (1), рассматриваемая в области D относительно функций $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, описывает G -деформации поверхности F^2 .

Аналитически условие того, что бесконечно малая с коэффициентом рекуррентности $c = \text{const}$ деформация поверхности является эквиареальной, записывается в виде $\delta[\bar{r}_u, \bar{r}_v] = c[\bar{r}_u, \bar{r}_v]$.

Бесконечно малые с заданным коэффициентом рекуррентности $c = \text{const}$ эквиареальные G -деформации описываются условием

$$\delta[\bar{r}_u, \bar{r}_v] = c[\bar{r}_u, \bar{r}_v], \quad c = \text{const}. \quad (2)$$

Учитывая разложение векторов $\bar{z}_u, \bar{z}_v$ по базису $\bar{r}_u, \bar{r}_v$, из (2) находим

$$[\alpha \bar{r}_u, \beta \bar{r}_v, \bar{r}_v] + [\bar{r}_u, \gamma \bar{r}_u + \delta \bar{r}_v] = c[\bar{r}_u, \bar{r}_v].$$

Так как $[\bar{r}_u, \bar{r}_v] \neq 0$, последнее соотношение эквивалентно выражению

$$\alpha + \delta = c. \quad (3)$$

Подставляя из (3) $\delta = -\alpha + c$ в систему (1), получаем систему уравнений, описывающую бесконечно малые эквиареальные G -деформации поверхности F^2 в E^3 :

$$\begin{aligned} \alpha_v + 2\alpha \Gamma_{12}^1 + \beta \Gamma_{22}^1 &= \gamma_u + \gamma \Gamma_{11}^1 + c \Gamma_{12}^1, & \beta_v + 2\alpha \Gamma_{12}^2 + \beta \Gamma_{22}^2 &= -\alpha_u + \gamma \Gamma_{11}^2 + c \Gamma_{12}^2, \\ \alpha b_{12} + \beta b_{22} &= \gamma b_{11} - \alpha b_{12} + c b_{12}. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Пусть пространство E^3 с координатами x^i подвергнуто проективному преобразованию в пространство $\hat{E}^3$ по формулам

$$\hat{x}^i = \frac{\sum_{k=1}^3 a_k^i x^k + a^i}{\sum_{k=1}^3 b_k x^k + b}. \quad (5)$$

Тогда поверхность $F^2: \bar{r} = \bar{r}(u, v)$ преобразуется в поверхность $\hat{F}^2: \hat{r} = (A\bar{r} + \bar{a})/((\bar{b}, \bar{r}) + b)$, где A — афинор, определяемый матрицей $\|a_j^i\|$,

$$\bar{a} = \{a^1, a^2, a^3\}, \quad \bar{b} = \{b^1, b^2, b^3\}, \quad \bar{r} = \{x^1, x^2, x^3\}, \quad b = \text{const}.$$

Имеет место следующий аналог теоремы Зауера [1].

ТЕОРЕМА 1. Пусть односвязная поверхность $F^2: \bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, класса $C^2(D)$ в E^3 допускает бесконечно малую эквиареальную с коэффициентом рекуррентности c G -деформацию, определяемую полем деформации $\bar{z}$ класса $C^2(D)$. Тогда векторное поле $\hat{z}$, заданное в области D по формуле

$$\begin{aligned} \hat{z} = \hat{z}(u, v) \equiv & -((\bar{b}, \bar{r}) + b) \cdot A\bar{z} + (A\bar{r} + \bar{a})(\bar{b}, \bar{z}) \\ & + \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \left[\frac{c}{2}V + \frac{\hat{c}}{2}V^{-1} - (\bar{b}, \bar{z}) \right] A d\bar{r} \\ & + \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \left(A\bar{z} - \left(\frac{c}{2} + \frac{\hat{c}}{2}V^{-2} \right) (A\bar{r} + \bar{a}) \right) (\bar{b}, d\bar{r}) + c_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где $V = (\bar{b}, \bar{r}) + b$, c_1 — произвольный постоянный вектор, (u_0, v_0) — фиксированная точка области D , (u, v) — произвольная точка области D , $\hat{c}$ — произвольно заданное число, является полем бесконечно малой эквиареальной с коэффициентом рекуррентности $\hat{c}$ G -деформацией поверхности $\hat{F}^2$ в $\hat{E}^3$. При этом полю деформации $\bar{z} = \frac{1}{2}c\bar{r}$ поверхности F^2 с вариацией площади $\delta\sigma = c \cdot \sigma$, $c = \text{const}$, соответствует по формуле (6) поле деформации $\hat{z} = \frac{1}{2}\hat{c}\hat{r}$ поверхности $\hat{F}^2$ с вариацией площади $\delta\hat{\sigma} = \hat{c} \cdot \hat{\sigma}$, $\hat{c} = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\hat{z}$ поле бесконечно малой эквиареальной с коэффициентом рекуррентности $\hat{c}$ G -деформации поверхности $\hat{F}^2$ в $\hat{E}^3$. Положим $\hat{z}_u = \hat{\alpha}\hat{r}_u + \hat{\beta}\hat{r}_v$, $\hat{z}_v = \hat{\gamma}\hat{r}_u + \hat{\delta}\hat{r}_v$, где функции $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} + \hat{\delta} = \hat{c}, \quad \hat{\alpha}_v - \hat{\gamma}_u + \hat{\beta}\hat{\Gamma}_{22}^1 - \hat{\gamma}\hat{\Gamma}_{11}^1 + 2\hat{\alpha}\hat{\Gamma}_{12}^1 &= \hat{c}\hat{\Gamma}_{12}^1, \\ \hat{\beta}_v + \hat{\alpha}_u + \hat{\beta}\hat{\Gamma}_{22}^2 - \hat{\gamma}\hat{\Gamma}_{11}^2 + 2\hat{\alpha}\hat{\Gamma}_{12}^2 &= \hat{c}\hat{\Gamma}_{12}^2, \quad \hat{\beta}\hat{b}_{22} + 2\hat{\alpha}\hat{b}_{12} - \hat{\gamma}\hat{b}_{11} = \hat{c}\hat{b}_{12}. \end{aligned} \quad (7)$$

При проективном преобразовании (5) имеют место следующие формулы [2]:

$$\hat{b}_{ij} = \frac{\lambda}{V} b_{ij}, \quad \hat{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \delta_j^i \frac{V_k}{V} - \delta_k^i \frac{V_j}{V} + \frac{\mu^i b_{jk}}{V},$$

где $V_k = \partial V / \partial u^k$, λ — некоторая функция, $\lambda \neq 0$, μ^i — некоторый контравариантный тензор, $u^1 = u$, $u^2 = v$.

Используя эти формулы, перепишем систему (7) в виде

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c} &= -\left(\hat{\delta} - \frac{1}{2}\hat{c}\right), \\ -\left(\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}\right)_v + \hat{\gamma}_u &= 2\left(\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}\right)\hat{\Gamma}_{12}^1 + \hat{\beta}\hat{\Gamma}_{22}^1 - \hat{\gamma}\hat{\Gamma}_{11}^1, \\ -\hat{\beta}_v - \left(\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}\right)_u &= 2\left(\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}\right)\hat{\Gamma}_{12}^2 + \hat{\beta}\hat{\Gamma}_{22}^2 - \hat{\gamma}\hat{\Gamma}_{11}^2, \\ \hat{\beta}\hat{b}_{22} + 2\left(\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}\right)\hat{b}_{12} - \hat{\gamma}\hat{b}_{11} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как

$$\hat{\Gamma}_{12}^1 = \Gamma_{12}^1 - \frac{V_v}{V} + \frac{\mu^1 b_{12}}{V}, \quad \hat{\Gamma}_{22}^1 = \Gamma_{22}^1 + \frac{\mu^1 b_{22}}{V}, \quad \hat{\Gamma}_{11}^1 = \Gamma_{11}^1 - \frac{2V_u}{V} + \frac{\mu^1 b_{11}}{V},$$

правую часть второго уравнения системы (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & 2\left(\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}\right)\hat{\Gamma}_{12}^1 + \hat{\beta}\hat{\Gamma}_{22}^1 - \hat{\gamma}\hat{\Gamma}_{11}^1 = 2\left(\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}\right)\mu^1 \frac{b_{12}}{V} + \hat{\beta}\mu^1 \frac{b_{22}}{V} - \hat{\gamma}\mu^1 \frac{b_{11}}{V} \\ & + 2\left(\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}\right)\Gamma_{12}^1 + \hat{\beta}\Gamma_{22}^1 - \hat{\gamma}\Gamma_{11}^1 - 2\left(\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}\right)\frac{V_v}{V} + \hat{\gamma}\frac{2V_u}{V} \\ & = V^2 \left\{ 2\frac{\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}}{V^2}\Gamma_{12}^1 + \frac{\hat{\beta}}{V^2}\Gamma_{22}^1 - \frac{\hat{\gamma}}{V^2}\Gamma_{11}^1 + \left(\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}\right)\left(\frac{1}{V^2}\right)_v - \hat{\gamma}\left(\frac{1}{V^2}\right)_u \right\}. \end{aligned}$$

Это означает, что второе уравнение системы (8) преобразуется к виду

$$\left(\frac{\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}}{V^2}\right)_v - \left(\frac{\hat{\gamma}}{V^2}\right)_u + 2\frac{\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}}{V^2}\Gamma_{12}^1 + \frac{\hat{\beta}}{V^2}\Gamma_{22}^1 - \frac{\hat{\gamma}}{V^2}\Gamma_{11}^1 = 0.$$

Преобразуя аналогично правую часть третьего уравнения системы (8) и полагая

$$\alpha_1 = \frac{\hat{\alpha} - \frac{1}{2}\hat{c}}{V^2}, \quad \beta_1 = \frac{\hat{\beta}}{V^2}, \quad \gamma_1 = \frac{\hat{\gamma}}{V^2}, \quad \delta_1 = \frac{\hat{\delta} - \frac{1}{2}\hat{c}}{V^2},$$

перепишем систему (8) в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \delta_1 &= 0, \quad \alpha_{1v} + 2\alpha_1\Gamma_{12}^1 + \beta_1\Gamma_{22}^1 = \gamma_{1u} + \gamma_1\Gamma_{11}^1, \\ \beta_{1v} + 2\alpha_1\Gamma_{12}^2 + \beta_1\Gamma_{22}^2 &= -\alpha_{1u} + \gamma_1\Gamma_{11}^2, \quad 2\alpha_1b_{12} + \beta_1b_{22} - \gamma_1b_{11} = 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений описывает бесконечно малые ареальные G -деформации поверхности F^2 в E^3 , поля деформаций $\bar{z}_{(a)}$ которых удовлетворяют соотношениям

$$\bar{z}_{(a)u} = \alpha_1\bar{r}_u + \beta_1\bar{r}_v, \quad \bar{z}_{(a)v} = \gamma_1\bar{r}_u + \delta_1\bar{r}_v.$$

Полагая $\alpha = -\alpha_1 + \frac{1}{2}c$, $\beta = -\beta_1$, $\gamma = -\gamma_1$, $\delta = -\delta_1 + \frac{1}{2}c$, находим, что функции α , β , γ , δ являются решениями системы (1) и уравнения (3). Это означает, что функции α , β , γ , δ порождают бесконечно малую эквиареальную с коэффициентом рекуррентности c G -деформацию поверхности F^2 в E^3 , поле деформации $\bar{z}$ которой удовлетворяет соотношениям $\bar{z}_u = \alpha\bar{r}_u + \beta\bar{r}_v$, $\bar{z}_v = \gamma\bar{r}_u + \delta\bar{r}_v$. Выведем формулу, восстанавливающую поле деформации $\hat{z}$ поверхности $\hat{F}^2$ по заданному полю деформации $\bar{z}$ поверхности F^2 .

Имеем

$$\begin{aligned}
\hat{z}_u &= \hat{\alpha} \hat{r}_u + \hat{\beta} \hat{r}_v = V \cdot A \left(\left(-\alpha + \frac{1}{2}c \right) \bar{r}_u \right) \\
&+ V^{-1} A \left(\frac{\hat{c}}{2} \bar{r}_u \right) - (A\bar{r} + \bar{a}) \left(\bar{b}, \left(-\alpha + \frac{1}{2}c \right) \bar{r}_u \right) \\
&- (A\bar{r} + \bar{a}) \left(\bar{b}, \frac{1}{2} \hat{c} \bar{r}_u \right) V^{-2} + V \cdot A(-\beta \bar{r}_v) - (A\bar{r} + \bar{a}) (\bar{b}, -\beta \bar{r}_v) \\
&= V \cdot [-A(\alpha \bar{r}_u + \beta \bar{r}_v)] + V \cdot A \left(\frac{c}{2} \bar{r}_u \right) + V^{-1} A \left(\frac{\hat{c}}{2} \bar{r}_u \right) \\
&+ (A\bar{r} + \bar{a}) (\bar{b}, \alpha \bar{r}_u + \beta \bar{r}_v) - (A\bar{r} + \bar{a}) \left(\bar{b}, \frac{c}{2} \bar{r}_u \right) - V^{-2} (A\bar{r} + \bar{a}) \left(\bar{b}, \frac{\hat{c}}{2} \bar{r}_u \right) \\
&= -V \cdot A \bar{z}_u + V \cdot \frac{c}{2} A \bar{r}_u + V^{-1} \cdot \frac{\hat{c}}{2} A \bar{r}_u + (A\bar{r} + \bar{a}) (\bar{b}, \bar{z}_u) \\
&- \frac{c}{2} (A\bar{r} + \bar{a}) (\bar{b}, \bar{r}_u) - V^{-2} \cdot \frac{\hat{c}}{2} (A\bar{r} + \bar{a}) (\bar{b}, \bar{r}_u).
\end{aligned}$$

Аналогично находим $\hat{z}_v$ и тогда имеем

$$\begin{aligned}
d\hat{z} &= -V \cdot A d\bar{z} + \frac{c}{2} V A d\bar{r} + \frac{\hat{c}}{2} V^{-1} A d\bar{r} + (A\bar{r} + \bar{a}) (\bar{b}, d\bar{z}) \\
&- \frac{c}{2} (A\bar{r} + \bar{a}) (\bar{b}, d\bar{r}) - \frac{\hat{c}}{2} V^{-2} (A\bar{r} + \bar{a}) (\bar{b}, d\bar{r}) \\
&= -d(V A \bar{z}) + A \bar{z} \cdot (\bar{b}, d\bar{r}) + \left(\frac{c}{2} V + \frac{\hat{c}}{2} V^{-1} \right) A d\bar{r} + d((A\bar{r} + \bar{a}) (\bar{b}, \bar{z})) \\
&- (\bar{b}, \bar{z}) A d\bar{r} - \frac{c}{2} (A\bar{r} + \bar{a}) (\bar{b}, d\bar{r}) - \frac{\hat{c}}{2} V^{-2} (A\bar{r} + \bar{a}) (\bar{b}, d\bar{r}).
\end{aligned}$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$\begin{aligned}
\hat{z} &= \hat{z}(u, v) \equiv (A\bar{r} + \bar{a}) (\bar{b}, \bar{z}) - V \cdot A \bar{z} \\
&+ \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \left[\frac{c}{2} V + \frac{\hat{c}}{2} V^{-1} - (\bar{b}, \bar{z}) \right] A d\bar{r} + \left(A \bar{z} - \left(\frac{c}{2} + \frac{\hat{c}}{2} V^{-2} \right) (A\bar{r} + \bar{a}) \right) (\bar{b}, d\bar{r}) + \bar{c}_1,
\end{aligned}$$

где (u_0, v_0) – некоторая точка области D , $(u, v) \in D$.

Отметим, что полю деформации $\bar{z} = \frac{1}{2}c\bar{r}$ поверхности F^2 соответствуют функции $\alpha = \frac{1}{2}c$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = \frac{1}{2}c$. Тогда имеем $\hat{\alpha} = \frac{1}{2}\hat{c}$, $\beta = 0$, $\hat{\gamma} = 0$, $\hat{\delta} = \frac{1}{2}\hat{c}$. В силу полученной формулы для нахождения поля $\hat{z}$ имеем $\hat{z} = \frac{1}{2}\hat{c}\hat{r}$. Теорема доказана.

3. Укажем на одно приложение теоремы 1. Пусть в пространстве $\widehat{E}^3$ с декартовой системой координат $\widehat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ задана поверхность $\widehat{F}^2$ положительной гауссовой кривизны $\widehat{K} \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, с краем $\partial\widehat{F}^2$, расположенная в полупространстве $\hat{z} \geq \hat{z}_0 > 0$, $\hat{z}_0 = \text{const}$, выпуклостью вверх и звездная относительно начала координат.

Если на поверхности $\widehat{F}^2$ имеется точка $\widehat{M}_0$, в которой касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости $\widehat{O}\hat{x}\hat{y}$, то будем считать, что точка $\widehat{M}_0$ лежит на оси $\widehat{O}\hat{z}$,

а сама поверхность $\hat{F}^2$ в окрестности этой точки является куском сферы $\hat{S}^2$, заданной уравнением $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + (\hat{z} - a)^2 = a^2$, $a = \text{const} > 0$.

Будем изучать бесконечно малые эквиареальные G -деформации поверхности $\hat{F}^2$, подчиненные вдоль края $\partial\hat{F}^2$ условию обобщенного скольжения

$$(\hat{z}, \hat{k}) = \hat{\sigma}, \quad (9)$$

где $\hat{z}$ – поле деформации поверхности, $\hat{k}$ – единичный орт оси $\hat{O}\hat{z}$, $\hat{\sigma}$ – заданная функция.

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть поверхность $\hat{F}^2$ удовлетворяет перечисленным выше в п. 3 условиям и $\hat{F}^2 \in C^{3,\alpha}$, $\partial\hat{F}^2 \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда для любой заданной функции $\hat{\sigma}$ класса $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, поверхность $\hat{F}^2$, подчиненная условию (9), всегда допускает бесконечно малые эквиареальные G -деформации класса $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, с заданной вариацией площади $\delta\hat{\sigma} = \hat{c} \cdot \hat{\sigma}$, $\hat{c} = \text{const}$; при этом поле деформации $\hat{z}$ имеет вид

$$\hat{z} = \hat{z}^* + \hat{c}_1 \hat{z}_1 + \hat{c}_2 \hat{z}_2, \quad (10)$$

где $\hat{z}^*$ – некоторая вектор-функция класса $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, зависящая от $\hat{c}$ и $\hat{\sigma}$; $\hat{z}_1 = \{1, 0, 0\}$, $\hat{z}_2 = \{0, 1, 0\}$; $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ – произвольные постоянные.

ЗАМЕЧАНИЕ. По терминологии И. Н. Векуа [3] условие (9) в отношении рассматриваемых бесконечно малых деформаций поверхности $\hat{F}^2$ является квазикорректным с двумя степенями свободы. Из теоремы 2 следует, что условие (9) становится корректным, если к нему присоединить, например, условие точечного типа, при котором вектор смещения $\hat{z}$ в заданной точке поверхности будет коллинеарен орту $\hat{k}$ (при этом условии константы $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$ в формуле (10) определяются всегда и однозначно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим проективное преобразование пространства $\hat{E}^3$, задаваемое формулами

$$x = \frac{\hat{x}}{\hat{z}}, \quad y = \frac{\hat{y}}{\hat{z}}, \quad \bar{z} = \frac{1}{\hat{z}}. \quad (11)$$

Поверхность $\hat{F}^2$ при преобразовании (11) преобразуется в поверхность F^2 положительной гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, пространства E^3 , заданную уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, $f \in C^{3,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Если на поверхности $\hat{F}^2$ существовала точка $\hat{M}_0$, в которой касательная плоскость была параллельна плоскости $\hat{O}\hat{x}\hat{y}$, а поверхность в окрестности этой точки являлась куском сферы, то преобразованная поверхность F^2 в E^3 в окрестности точки начала координат будет задана уравнением

$$z = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}(x^2 + y^2).$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих бесконечно малые эквиареальные G -деформации с заданной вариацией $\delta\sigma = c \cdot \sigma$, $c = \text{const}$, для компонент поля деформаций $\bar{z} = \{\xi, \eta, \zeta\}$:

$$\zeta_x - f_y \eta_x + f_x \eta_y = c f_x, \quad \zeta_y + f_y \xi_x + f_x \xi_y = -c f_x, \quad \xi_x + \eta_y = c, \quad (x, y) \in D. \quad (12)$$

Полагая $\bar{z} = \bar{z}_{(a)} + \frac{c}{2}\bar{r}$, где $\bar{r} = \{x, y, f(x, y)\}$, $\bar{z}_{(a)} = \left\{ \begin{smallmatrix} \xi \\ (a) \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \eta \\ (a) \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} \right\}$, приведем систему (12) к виду

$$\begin{aligned} \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} x - f_y \begin{smallmatrix} \eta \\ (a) \end{smallmatrix} x + f_x \begin{smallmatrix} \eta \\ (a) \end{smallmatrix} y = 0, \quad \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} y + f_y \begin{smallmatrix} \xi \\ (a) \end{smallmatrix} x - f_x \begin{smallmatrix} \xi \\ (a) \end{smallmatrix} y = 0, \quad \begin{smallmatrix} \xi \\ (a) \end{smallmatrix} x + \begin{smallmatrix} \eta \\ (a) \end{smallmatrix} y = 0, \quad (x, y) \in D. \end{aligned}$$

Считая, что $\bar{z}_{(a)}$ является вектор-функцией класса C^2 , исключим из этой системы функции $\begin{smallmatrix} \xi \\ (a) \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} \eta \\ (a) \end{smallmatrix}$ и получим уравнение для нахождения функции $\begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix}$:

$$f_{yy} \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} x x - 2f_{xy} \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} x y + f_{xx} \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} y y + A \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} x + B \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} y = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(\frac{tf_y}{\Delta} \right)_x - \left(\frac{tf_x}{\Delta} \right)_y \right] (rf_y - 2sf_x) + \left[\left(\frac{tf_y}{\Delta} \right)_x + \left(\frac{rf_y - 2sf_x}{\Delta} \right)_y \right] tf_x, \\ B &= \left[\left(\frac{tf_x - 2sf_y}{\Delta} \right)_x - \left(\frac{rf_y}{\Delta} \right)_y \right] (rf_y - 2sf_x) + \left[\left(\frac{rf_x}{\Delta} \right)_y + \left(\frac{rf_y}{\Delta} \right)_x \right] tf_x, \\ \Delta &= tf_x^2 - 2sf_x f_y + rf_y^2, \quad r = f_{xx}, \quad s = f_{xy}, \quad t = f_{yy}. \end{aligned}$$

По известной функции $\begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix}$ функции $\begin{smallmatrix} \xi \\ (a) \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} \eta \\ (a) \end{smallmatrix}$ находятся по формулам

$$\begin{aligned} \begin{smallmatrix} \xi \\ (a) \end{smallmatrix} &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{1}{\Delta} (tf_x \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} x - rf_y \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} y) dx + \frac{1}{\Delta} (tf_y \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} x + (tf_x - 2sf_y) \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} y) dy + c_1, \\ \begin{smallmatrix} \eta \\ (a) \end{smallmatrix} &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{1}{\Delta} ((rf_y - 2sf_x) \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} x + rf_x \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} y) dx + \frac{1}{\Delta} (rf_y \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} x - tf_x \begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix} y) dy + c_2, \end{aligned} \quad (14)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Коэффициенты уравнения (13) принадлежат классу $C^{0, \alpha}$, $0 < \alpha < 1$, что непосредственно следует из их явного вида, если $f_x^2 + f_y^2 \neq 0$. Если же $f_x^2 + f_y^2 = 0$ при $x = y = 0$, то, используя выражение $z = 1/(2a) + (x^2 + y^2)/(2a)$, легко получить, что в окрестности начала координат функция $\begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix}$ является гармонической, при этом функции $\begin{smallmatrix} \xi \\ (a) \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} \eta \\ (a) \end{smallmatrix}$ также являются там гармоническими и восстанавливаются по известной функции $\begin{smallmatrix} \zeta \\ (a) \end{smallmatrix}$ с точностью до констант c_1 и c_2 .

Выясним, как запишется краевое условие (9) для векторного поля $\bar{z} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ в результате преобразования (11). Для этого воспользуемся формулой (6) из теоремы 1,

считая, что $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{a} = \{0, 0, 1\}$, $\bar{b} = \{0, 0, 1\}$, $b = 0$. Подсчитаем компоненту $\hat{\zeta}$. Полагая $\bar{c}_1 = 0$, находим

$$\hat{\zeta} = \zeta - \frac{c}{2}z + \frac{\hat{c}}{2}\hat{z}. \quad (15)$$

Из формулы (15) следует, что условие (9) для компоненты $\zeta_{(a)}$ имеет вид

$$\zeta_{(a)} = \hat{\sigma} - \frac{\hat{c}}{2} \frac{1}{f(x, y)} \quad \text{на } \partial D. \quad (16)$$

Задача (13), (16) является задачей Дирихле для дифференциального уравнения эллиптического типа, к которому применим принцип максимума, и потому эта задача всегда и однозначно разрешима в классе $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Зная функцию $\zeta_{(a)}$, функции $\xi_{(a)}$, $\eta_{(a)}$ восстанавливаются в классе $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, с точностью до двух произвольных постоянных c_1 и c_2 по формулам (14). Зная $\bar{z} = \bar{z}_{(a)} + \frac{c}{2}\bar{r}$, находим $\hat{\bar{z}}$ по формуле (6). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sauer R. Infinitesimale Verbiegungen zueinander projektiver Flächen // Math. Ann. 1935. V. 3.
- [2] Каган В. Ф. Теория поверхностей. Т. I. М.: ОГИЗ, 1947.
- [3] Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.

Таганрогский государственный педагогический институт
E-mail: Fomenko@TGPI.TTN.ru

Поступило
21.05.2001
Исправленный вариант
06.06.2002