Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ни Минь Кань, А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев, Эквивалентность двух множеств точек перехода, отвечающих решениям с внутренними переходными слоями, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 1, 120–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2680>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:49:33

УДК 517.97

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК ПЕРЕХОДА, ОТВЕЧАЮЩИХ РЕШЕНИЯМ С ВНУТРЕННИМИ ПЕРЕХОДНЫМИ СЛОЯМИ

Ни Минь Кань, А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев

Устанавливается эквивалентность двух множеств точек перехода, отвечающих решениям сингулярно возмущенных краевых задач с внутренними пограничными слоями. Первое множество порождается формализмом построения асимптотики решения краевой задачи и второе – формализмом прямой схемы построения асимптотики решения некоторой вариационной задачи.

Библиография: 5 названий.

В работе [1] рассматривается краевая задача

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

$$x(0, \varepsilon) = 0, \quad x(1, \varepsilon) = 0, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Положив $\varepsilon = 0$, получим вырожденное уравнение

$$F(x, t) = 0. \quad (3)$$

Сформулируем следующие условия [1].

УСЛОВИЕ А₁. Пусть функция $F(x, t)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в некоторой области D на плоскости (x, t) .

УСЛОВИЕ А₂. Пусть уравнение (3) имеет три корня $x_1 = \alpha(t)$, $x_2 = \beta(t)$ и $x_3 = \gamma(t)$ такие, что

- 1) $\alpha(t) < \beta(t) < \gamma(t)$ при $0 \leq t \leq 1$;
- 2) область $\{(x, t) : \alpha(t) \leq x \leq \gamma(t), 0 \leq t \leq 1\}$ содержится в области D ;
- 3) $F_x(\alpha(t), t) > 0$, $F_x(\beta(t), t) < 0$ и $F_x(\gamma(t), t) > 0$ при $0 \leq t \leq 1$.

Из условия А₂ следует, что явление перехода решения задачи (1), (2) с корня $\alpha(t)$ на корень $\gamma(t)$ или, наоборот, с $\gamma(t)$ на $\alpha(t)$ может существовать при некотором значении t_* , где

$$t_* = t_0 + \varepsilon t_1 + \dots \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке фонда Шанхайского института вычислительных наук Китая.

Характерной особенностью такого решения является то, что зона быстрого изменения решения имеется не только вблизи начала или конца отрезка $[0, 1]$, но и в окрестности некоторой внутренней точки t_* этого отрезка. Такое решение называется *решением с внутренним переходным слоем*. Главной частью точки перехода является t_0 ; она находится из уравнения

$$\int_{\alpha(t_0)}^{\gamma(t_0)} F(x, t) dx = 0$$

и при этом в [1] предполагается, что

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\gamma(t)} F(x, t) dx \right|_{t=t_0} \neq 0.$$

Пусть это условие не выполнено, т.е. имеет место

УСЛОВИЕ **A₃**. Для всех t , $0 \leq t \leq 1$,

$$\int_{\alpha(t_0)}^{\gamma(t_0)} F(x, t) dx = 0.$$

Тогда такой случай называется *критическим*, и главное значение t_0 , вообще говоря, неединственной точки перехода t_* , определяется следующим уравнением [2]:

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\int_{\alpha_0}^z F_t(x, t_0) dx}{\left(\int_{\alpha_0}^z F(x, t_0) dx\right)^{1/2}} dz - \int_0^{\gamma_0} \frac{\int_{\gamma_0}^z F_t(x, t_0) dx}{\left(\int_{\gamma_0}^z F(x, t_0) dx\right)^{1/2}} dz = 0, \quad (5)$$

где $\alpha_0 = \alpha(t_0)$, $\beta_0 = 0$ и $\gamma_0 = \gamma(t_0)$.

Обозначим это множество всех значений t_0 через A .

В работе [3] была изучена простейшая регуляризованная вариационная задача

$$J(u) = \int_0^1 \left(-P(x, t) + \frac{\varepsilon^2}{2} u^2 \right) dt \rightarrow \min_u, \quad (6)$$

$$\dot{x} = u, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (7)$$

$$x(0, \varepsilon) = 0, \quad x(1, 0) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (8)$$

при выполнении следующих условий.

УСЛОВИЕ **B₁**. Пусть функция $P(x, t)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в некоторой области D на плоскости (x, t) .

УСЛОВИЕ **B₂**. Существуют функции $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ такие, что $P(\alpha(t), t) = P(\gamma(t), t) = \max_x P(x, t)$, причем

$$P_{xx}(\alpha(t), t) < 0, \quad P_{xx}(\gamma(t), t) < 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Термин “регуляризация” здесь связан с некорректностью по Тихонову предельной вариационной задачи при $\varepsilon = 0$ из-за ее неразрешимости на классе гладких функций и регуляризатор Тихонова [4] здесь имеет вид слагаемого с ε^2 в функционале. Если

сделать замену $\varepsilon u = v$, то дифференциальная связь (7) приобретает вид сингулярно возмущенной $\varepsilon \dot{x} = v$.

Наличие малого параметра при старших производных в дифференциальных связях вариационной задачи приводит к появлению зон быстрого изменения решения задачи – зон пограничного слоя; подобные рассуждения рассматривались в литературе [3], [5]. При этом задача (6)–(8) может иметь решение и с внутренними переходными слоями. Асимптотика решения задачи (6)–(8) строится с помощью формализма прямой схемы [3], который заключается в прямой подстановке асимптотического разложения в условия вариационной задачи и последовательном решении получающейся цепочки вариационных задач. При этом все элементы точного решения разыскиваются в виде соответствующих асимптотических разложений. В частности, точка перехода в контрастной структуре типа ступеньки ищется в виде ряда по целым степеням параметра ε и все члены этого разложения также участвуют в процессе последовательной минимизации членов асимптотического разложения критерия (6). Главный член этого разложения t_0 определяется в результате решения задач минимизации, которые определяют равномерное нулевое приближение к решению (6)–(8). Множество значений t_0 (главных членов различных точек перехода) обозначим через B .

Итак задача (6)–(8), с одной стороны, имеет типичные черты вариационной задачи и может исследоваться с помощью “вариационной” техники, а с другой – необходимые условия оптимальности приводят нас к специальному классу сингулярно возмущенных краевых задач – уравнениям Эйлера

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = -P_x(x, t),$$

$$x(0, \varepsilon) = 0, \quad x(1, \varepsilon) = 0,$$

которые являются задачами того же типа, что и (1), (2). Это означает, что t_0 определяется таким же уравнением, что и уравнение (5) при $F(x, t) = -P_x(x, t)$:

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{P_t(\alpha_0, t_0) - P_t(z, t_0)}{(P(\alpha_0, t_0) - P(z, t_0))^{1/2}} dz - \int_0^{\gamma_0} \frac{P_t(\gamma_0, t_0) - P_t(z, t_0)}{(P(\gamma_0, t_0) - P(z, t_0))^{1/2}} dz = 0. \quad (9)$$

В настоящей работе будет доказано, что $A = B$.

Сначала покажем, как получается множество B .

Асимптотическое разложение оптимального решения задачи (6)–(8) $z(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon))^T$ будем искать в виде

$$z(t, \varepsilon) = \begin{cases} \bar{z}(t, \varepsilon) + Lz(\tau, \varepsilon), & 0 \leq t \leq t_*, \\ \bar{z}(t, \varepsilon) + Qz(\tau, \varepsilon), & t_* \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (10)$$

где $\bar{z}(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t)$ – регулярный ряд;

$$Lz(\tau, \varepsilon) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i x(\tau), \varepsilon^{-1} L_0 u(\tau) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_{i+1} u(\tau) \right)^T$$

– левый погранслоинный ряд решения в окрестности $t = t_*$, а

$$Qz(\tau, \varepsilon) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i x(\tau), \varepsilon^{-1} Q_0 u(\tau) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_{i+1} u(\tau) \right)^T$$

– правый погранслоный ряд решения в окрестности $t = t_*$, где $\tau = (t - t_*)/\varepsilon$, а t_* имеет представление (4) и при этом разложение функционала принимает вид

$$\inf_u J(u) = \inf_{u_0} J_0(u_0) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \inf_{u_i} \tilde{J}_i(u_i) + \dots,$$

где

$$\tilde{J}_i(u_i) = J_i(u_i, \tilde{u}_{i-1}, \dots, \tilde{u}_0), \quad \tilde{u}_k = \arg \inf_u \tilde{J}_k(u), \quad k = 0, \dots, i-1.$$

Здесь отметим, что неизвестным в $\tilde{J}_i(u_i)$ является u_i , а $\tilde{u}_{i-1}, \dots, \tilde{u}_0$ при этом уже известны. Далее (10) подставляется в (7), (8) и приравниваются слева и справа члены одинакового порядка по ε , причем отдельно зависящие от t и от τ . Таким образом получаются вариационные задачи для определения каждого члена асимптотики [4]. При этом коэффициенты разложения точки перехода (4) находятся в результате некоторых задач параметрической оптимизации. Для главных членов разложений имеем

$$J_0(u_0) = J_0^{(-)}(L_0 u, t_0) + J_0^{(+)}(R_0 u, t_0),$$

где каждое слагаемое есть результат решения соответствующей вспомогательной вариационной задачи

$$\begin{aligned} J_0^{(-)}(u, t_0) &= \int_{-\infty}^0 \left(P(\alpha_0, t_0) - P(\alpha_0 + x, t_0) + \frac{1}{2} u^2 \right) d\tau \rightarrow \min_u, \\ \dot{x}(\tau) &= u(\tau), \quad x(0) = -\alpha_0, \quad x(-\infty) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

(здесь $x(\tau) = L_0 x(\tau)$, $u(\tau) = L_0 u(\tau)$),

$$\begin{aligned} J_0^{(+)}(u, t_0) &= \int_0^{+\infty} \left(P(\gamma_0, t_0) - P(\gamma_0 + x, t_0) + \frac{1}{2} u^2 \right) d\tau \rightarrow \min_u, \\ \dot{x}(\tau) &= u(\tau), \quad x(0) = -\gamma_0, \quad x(+\infty) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

(здесь $x(\tau) = R_0 x(\tau)$, $u(\tau) = R_0 u(\tau)$).

В функционале (11) выполняем замену $d\tau = dx/u$ и исключаем τ , т.е. имеем

$$J_0^{(-)}(u, t_0) = \int_0^{-\alpha_0} \left(P(\alpha_0, t_0) - P(\alpha_0 + x, t_0) + \frac{1}{2} u^2 \right) \frac{dx}{u} \rightarrow \min_u$$

или, с учетом $\Delta_\alpha P = P(\alpha_0, t_0) - P(\alpha_0 + x, t_0)$, имеем

$$J_0^{(-)}(u, t_0) = \int_0^{-\alpha_0} \left(\Delta_\alpha P + \frac{1}{2} u^2 \right) \frac{dx}{u} \rightarrow \min_u.$$

Из необходимого условия оптимальности находим, что $u^* = (2\Delta_\alpha P)^{1/2}$ и минимальное значение функционала равняется

$$J_0^{(-)*}(t_0) = \sqrt{2} \int_0^{-\alpha_0} (\Delta_\alpha P)^{1/2} dx.$$

Для функционала $J_0^{(+)}(t_0)$ его минимальное значение получается аналогично, т.е.

$$J_0^{(+)*}(t_0) = \sqrt{2} \int_{-\gamma_0}^0 (\Delta_\gamma P)^{1/2} dx,$$

где соответствующее $u^* = (2\Delta_\gamma P)^{1/2}$ и при этом $\Delta_\gamma P = P(\gamma_0, t_0) - P(\gamma_0 + x, t_0)$.

Так как в прямой схеме все свободные элементы выбираются путем минимизации соответствующих функционалов, естественно выбирать t_0 из условия минимизации $J_0(u_0)$, т.е.

$$J_0(u_0) = J_0^{(-)*}(t_0) + J_0^{(+)*}(t_0) = \sqrt{2} \left(\int_0^{-\alpha_0} (\Delta_\alpha P)^{1/2} dx + \int_{-\gamma_0}^0 (\Delta_\gamma P)^{1/2} dx \right) \rightarrow \min_{t_0}.$$

Итак, для t_0 имеем уравнение

$$\frac{dJ_0(u_0)}{dt} = 0, \quad (13)$$

корни которого образуют множество $B = \{t_0 : dJ_0(u_0)/dt = 0\}$.

Докажем, что уравнение (13) эквивалентно уравнению (9). Из (13) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{-\alpha_0} \frac{\dot{\Delta}_\alpha P}{2(\Delta_\alpha P)^{1/2}} dx + (\Delta_\alpha P)^{1/2} \Big|_{x=-\dot{\alpha}_0} (-\dot{\alpha}_0) \\ & + \int_{-\gamma_0}^0 \frac{\dot{\Delta}_\gamma P}{2(\Delta_\gamma P)^{1/2}} dx + (\Delta_\gamma P)^{1/2} \Big|_{x=-\dot{\gamma}_0} (-\dot{\gamma}_0) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\int_0^{-\alpha_0} \frac{\dot{\Delta}_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}} dx + \int_{-\gamma_0}^0 \frac{\dot{\Delta}_\gamma P}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}} dx \right) \\ & = (P(\alpha_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2} \dot{\alpha}_0 - (P(\gamma_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2} \dot{\gamma}_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь проводим замены переменных $z = x + \alpha_0$, $z = x + \gamma_0$ в интегралах

$$\int_0^{-\alpha_0} \frac{\dot{\Delta}_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}} dx, \quad \int_{-\gamma_0}^0 \frac{\dot{\Delta}_\gamma P}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}} dx$$

соответственно. Тогда уравнение (14) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^{\alpha_0} \frac{\dot{\Delta}_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}} dz + 2\dot{\alpha}_0 (P(\alpha_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2} \\ & - \left(\int_0^{\gamma_0} \frac{\dot{\Delta}_\gamma P}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}} dz + 2\dot{\gamma}_0 (P(\gamma_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_\alpha P &= P_t(\alpha_0, t_0) - P_t(z, t_0) - P_x(z, t_0) \dot{\alpha}_0, \\ \dot{\Delta}_\gamma P &= P_t(\gamma_0, t_0) - P_t(z, t_0) - P_x(z, t_0) \dot{\gamma}_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Итак, уравнение (13) представляет собой уравнение (15), которое далее будем сводить к уравнению (9).

Сначала интеграл

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\dot{\Delta}_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}} dz$$

представляем в виде суммы двух интегралов из (16):

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\dot{\Delta}_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}} dz = \int_0^{\alpha_0} \frac{P_t(\alpha_0, t_0) - P_t(z, t_0)}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}} dz + \dot{\alpha}_0 \int_0^{\alpha_0} \frac{-P_x(z, t_0)}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}} dz. \quad (17)$$

Аналогично,

$$\int_0^{\gamma_0} \frac{\dot{\Delta}_\gamma P}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}} dz = \int_0^{\gamma_0} \frac{P_t(\gamma_0, t_0) - P_t(z, t_0)}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}} dz + \dot{\gamma}_0 \int_0^{\gamma_0} \frac{-P_x(z, t_0)}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}} dz. \quad (18)$$

После дифференцирования по τ функции $u(\tau) = (2\Delta_\alpha P)^{1/2}$ получаем

$$du = \frac{-P_x(z, t_0)}{(2\Delta_\alpha P)^{1/2}} dz.$$

С учетом $u(-\infty) = 0$

$$u(0) = \int_0^{\alpha_0} \frac{-P_x(z, t_0)}{(2\Delta_\alpha P)^{1/2}} dz. \quad (19)$$

С другой стороны, из явного выражения для $u(\tau)$ имеем

$$u(0) = \sqrt{2(P(\alpha_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}}. \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует равенство

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{-P_x(z, t_0)}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}} dz = 2(P(\alpha_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}. \quad (21)$$

Аналогично получается, что

$$\int_0^{\gamma_0} \frac{-P_x(z, t_0)}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}} dz = 2(P(\gamma_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}. \quad (22)$$

После подстановки (21), (22) в (17), (18) соответственно имеем

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\dot{\Delta}_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}} dz = \int_0^{\alpha_0} \frac{\dot{\Delta}_\alpha P}{(\Delta_\alpha P)^{1/2}} dz - 2\dot{\alpha}_0(P(\alpha_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}, \quad (23)$$

$$\int_0^{\gamma_0} \frac{\dot{\Delta}_\gamma P}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}} dz = \int_0^{\gamma_0} \frac{\dot{\Delta}_\gamma P}{(\Delta_\gamma P)^{1/2}} dz - 2\dot{\gamma}_0(P(\gamma_0, t_0) - P(0, t_0))^{1/2}. \quad (24)$$

После подстановок (23), (24) в (15) и упрощений, приходим к уравнению (9). Таким образом получили, что $A = B$.

ТЕОРЕМА. Множество B , определяемое в вариационной задаче (6)–(8) при выполнении условий $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, совпадает с множеством A , определяемом в сингулярно возмущенной задаче (1)–(3) при выполнении условий $\mathbf{A}_1$ – $\mathbf{A}_3$.

В заключение отметим, что в формуле (9) два интеграла можно объединить в одном:

$$\int_{\alpha_0}^{\gamma_0} \frac{P_t(\alpha_0, t_0) - P_t(z, t_0)}{(P(\alpha_0, t_0) - P(z, t_0))^{1/2}} dz = 0$$

или

$$\int_{\alpha_0}^{\gamma_0} \frac{P_t(\gamma_0, t_0) - P_t(z, t_0)}{(P(\gamma_0, t_0) - P(z, t_0))^{1/2}} dz = 0,$$

так как из условия $\mathbf{B}_2$ следует, что $P_x(\alpha(t), t) = 0$, $P_x(\gamma(t), t) = 0$, а также $P_t(\alpha(t), t) = P_t(\gamma(t), t)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
- [2] Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Нефедов Н. Н. Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4–32.
- [3] Ни Минь Кань, Дмитриев М. Г. Контрастные структуры в простейшей векторной вариационной задаче и их асимптотика // Автоматика и телемеханика. 1998. № 5. С. 41–52.
- [4] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
- [5] Белокопытов С. В., Дмитриев М. Г. Прямой метод решения задач оптимального управления с быстрыми и медленными движениями // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернет. 1985. № 3. С. 147–152.

(Ни Минь Кань) Восточно-китайский
педагогический университет, г. Шанхай
(А. Б. Васильева) Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
(М. Г. Дмитриев) Московский государственный
социальный университет

Поступило
16.05.2003
Исправленный вариант
15.11.2004