Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Д. Протасова, Уравновешенные разбиения графов, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 1, 127–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2681>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:22:54

УДК 519.1

УРАВНОВЕШЕННЫЕ РАЗБИЕНИЯ ГРАФОВ

К. Д. Протасова

Доказано, что множество вершин $\mathcal{V}$, $|\mathcal{V}| = rk$, связного графа G можно разбить на r подмножеств, равных по числу элементов, так, что расстояние от любой вершины графа G до каждого подмножества разбиения не превосходит r .

Библиография: 2 названия.

Рассмотрим конечный связный неориентированный граф $G = (\mathcal{V}, E)$ с множеством вершин $\mathcal{V}$ и множеством ребер E . Для произвольных двух вершин $x, y \in \mathcal{V}$ обозначим через $d(x, y)$ длину кратчайшего пути от x к y . Для произвольных вершины $x \in \mathcal{V}$, подмножества $A \subseteq \mathcal{V}$ и неотрицательного целого числа m положим

$$B(x, m) = \{y \in \mathcal{V} : d(x, y) \leq m\}, \quad B(A, m) = \bigcup_{a \in A} B(a, m).$$

Индексом непустого подмножества $A \subseteq \mathcal{V}$ назовем наименьшее неотрицательное целое число m такое, что $\mathcal{V} = B(A, m)$. Индекс подмножества A обозначим $\text{ind } A$.

Расстояние $\text{dist}(A, B)$ между непустыми подмножествами A, B множества вершин $\mathcal{V}$ определяется формулой

$$\text{dist}(A, B) = \max \left\{ \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b), \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(b, a) \right\}.$$

Отметим, что $\text{ind } A = \text{dist}(\mathcal{V}, A)$ для любого непустого подмножества $A \subseteq \mathcal{V}$.

Индексом разбиения множества вершин $\mathcal{V}$ на непустые подмножества назовем максимальный индекс подмножеств разбиения.

Разбиение конечного множества X , $|X| = n$, на r подмножеств ($1 \leq r \leq n$, $n = rs + t$, $0 \leq t < r$) назовем *уравновешенным*, если существует такая нумерация $X_1, X_2, \dots, X_r$ подмножеств разбиения, для которой

$$|X_1| = |X_2| = \dots = |X_t| = s + 1, \quad |X_{t+1}| = |X_{t+2}| = \dots = |X_r| = s.$$

В частности, если r – делитель n , то уравновешенное разбиение X – это разбиение X на r частей, равных по числу элементов.

Цель заметки – доказать следующие три теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Для любых натуральных чисел r, n , $r \leq n$, и любого связного графа $G(\mathcal{V}, E)$, $|\mathcal{V}| = n$, существует разбиение индекса $\leq r-1$ множества вершин $\mathcal{V}$ на r подмножеств.

ТЕОРЕМА 2. Для любых натуральных чисел r, n , $r \leq n$, и любого связного графа $G(\mathcal{V}, E)$, $|\mathcal{V}| = n$, существует уравновешенное разбиение индекса $\leq r$ множества вершин $\mathcal{V}$ на r подмножеств.

ТЕОРЕМА 3. Пусть r, n – натуральные числа, r – делитель n . Для любого связного графа $G(\mathcal{V}, E)$, $|\mathcal{V}| = n$, существует уравновешенное разбиение $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \cup \dots \cup \mathcal{V}_r$ такое, что

$$\text{dist}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \leq 3, \quad \text{dist}(\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3) \leq 3, \quad \dots, \quad \text{dist}(\mathcal{V}_{r-1}, \mathcal{V}_r) \leq 3, \quad \text{dist}(\mathcal{V}_r, \mathcal{V}_1) \leq 3.$$

Для доказательства этих теорем удобно перейти к хроматической терминологии. Раскраска множества X в r цветов – это произвольное отображение “на” $\chi: X \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$. Каждая такая раскраска определяет разбиение

$$\chi^{-1}(1) \cup \chi^{-1}(2) \cup \dots \cup \chi^{-1}(r)$$

множества X на непустые подмножества. Наоборот, каждое разбиение $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_r$ множества X на непустые подмножества порождается раскраской χ , которая определяется правилом $\chi(x) = k$ тогда и только тогда, когда $x \in X_k$. Раскраску $\chi: X \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ назовем *уравновешенной*, если разбиение

$$X = \chi^{-1}(1) \cup \chi^{-1}(2) \cup \dots \cup \chi^{-1}(r)$$

является уравновешенным.

Разбиение множества вершин графа $G(\mathcal{V}, E)$ на r подмножеств имеет индекс $\leq m$ тогда и только тогда, когда при соответствующей этому разбиению раскраске $\chi: \mathcal{V} \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ каждый шар $B(x, m)$, $x \in \mathcal{V}$, содержит точки всех r цветов. *Индексом раскраски* называется индекс соответствующего разбиения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Индукцией по числу n покажем, что существует раскраска $\chi: \mathcal{V} \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ такая, что $|\chi(B(x, k))| \geq k+1$ для всех $x \in \mathcal{V}$, $k \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. Заключение теоремы следует из этого утверждения при $k = r-1$.

Заменяя граф $G(\mathcal{V}, E)$ его остовом, можно считать, что $G(\mathcal{V}, E)$ является деревом. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Если $r = n$, то можно взять любую раскраску $\chi: \mathcal{V} \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$. Предположим, что $r < n$, $n > 1$ и зафиксируем любую концевую вершину y графа $G(\mathcal{V}, E)$. Тогда $B(y, 1) = \{y, z\}$, где z – единственная смежная с y вершина дерева. Рассмотрим граф $G_1(\mathcal{V}_1, E_1)$, где $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \setminus \{y\}$, $E_1 = E \setminus \{(y, z)\}$. Обозначим через $B_1(x, k)$ шар радиуса k в графе $G_1(\mathcal{V}_1, E_1)$ с центром в точке $x \in \mathcal{V}_1$. Так как граф $G_1(\mathcal{V}_1, E_1)$ связан и $|\mathcal{V}_1| = n-1$, то по предположению индукции существует раскраска $\chi_1: \mathcal{V}_1 \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ такая, что

$$|\chi_1(B_1(x, k))| \geq k+1$$

для всех $x \in \mathcal{V}_1$, $k \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. Заметим, что $|\chi_1(B_1(z, 0))| = 1$ и выберем максимальное число $m \in \{0, 1, \dots, r-2\}$, для которого $|\chi_1(B_1(z, m))| = m+1$. Далее выберем

произвольное число $s \in \{1, 2, \dots, r\}$ такое, что $s \notin \chi_1(B(z, m))$. Положим $\chi(y) = s$ и $\chi(x) = \chi_1(x)$ для всех $x \in \mathcal{V}_1$. Так как $B(z, k) \subseteq B(y, k+1)$, то $|\chi(B(y, k))| \geq k+1$ для всех $k \in \{0, 1, \dots, r-1\}$.

Доказательству теоремы 2 предположим пять лемм с дополнительными определениями.

Конечное дерево $G(\mathcal{V}, E)$, $|\mathcal{V}| > 2$, называется *звездой* с центром $x \in \mathcal{V}$, если x не является концевой вершиной дерева и любые два кратчайшие пути от x к различным концевым вершинам не имеют общих ребер. Каждый такой путь $x = x_0, x_1, \dots, x_k$ определяет *луч звезды* с множеством вершин $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ и множеством ребер $\{(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k)\}$. Число k называется длиной луча, а x_0 и x_k — его началом и концом. Таким образом, каждая звезда является объединением ≥ 2 лучей, исходящих из центра x . *Радиусом* звезды называется максимальная длина его лучей.

ЛЕММА 1. Пусть r — натуральное число, $r > 2$, $\text{Gr}(V, E)$ — звезда с центром x и тремя лучами R_1, R_2, R_3 длины r_1, r_2, r_3 , причем $r/2 \leq r_i \leq r-1$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Тогда существует уравновешенная r -раскраска индекса $\leq r$ множества $\mathcal{V}$ такая, что на расстоянии $\leq r/2$ от центра имеются вершины всех r цветов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $r_1 \geq r_2 \geq r_3$. Запишем вершины лучей R_1, R_2, R_3 в порядке их расположения от начала к концам

$$\{x, x_1, x_2, \dots, x_{r_1}\}, \quad \{x, y_1, y_2, \dots, y_{r_2}\}, \quad \{x, z_1, z_2, \dots, z_{r_3}\}.$$

Рассмотрим последовательность вершин

$$x_{r_1}, x_{r_1-1}, \dots, x_2, x_1, x, z_1, z_2, \dots, z_{r-r_1-1}$$

и окрасим их цветами $1, 2, \dots, r$ слева направо.

Рассмотрим последовательность вершин $y_1, y_2, \dots, y_{r_2}$ и окрасим их цветами $1, 2, \dots, r_2$ слева направо.

Отметим три наблюдения:

- 1) шар радиуса r с центром x_{r_1} содержит вершины всех r цветов;
- 2) шар радиуса r с центром y_{r_2} содержит вершины всех r цветов;
- 3) на расстоянии $\leq r/2$ от центра звезды содержатся вершины всех r цветов.

Таким образом, наша задача состоит лишь в том, чтобы докрасить уравновешенно вершины луча R_3 так, чтобы шар радиуса r с центром z_{r_3} также содержал вершины всех r цветов.

Подсчитаем число k неокрашенных вершин:

$$k = r_3 - r + r_1 + 1.$$

Подсчитаем число m окрашенных вершин в шаре радиуса r с центром z_{r_3} :

$$m = (r - r_3) + (r - r_3) + (r - r_1) = 3r - 2r_3 - r_1.$$

Если $m \geq r$, то шар $B(r_3, r)$ содержит вершины всех r цветов и мы можем докрасить вершины луча R_3 уравновешенно произвольным образом.

Пусть $m < r$. Отметим, что каждый цвет $1, 2, \dots, r_2$ мы уже использовали дважды. Поскольку $r_3 \leq r_2$,

$$(r - m) + (r - r_2) = 2r_3 + r_1 - 2r + r - r_2 = 2r_3 + r_1 - r_2 - r \leq k = r_3 - r + r_1 + 1.$$

Выберем $r - r_2$ неокрашенные вершины луча R_3 и окрасим их цветами $r_2 + 1, \dots, r$. После этого каждый из цветов $1, 2, \dots, r$ мы использовали дважды. Так как $r - m \leq k - (r - r_2)$, мы имеем еще по меньшей мере $r - m$ неокрашенных вершин. Раскрасим их разными цветами так, чтобы шар $B(z_{r_3}, r)$ содержал вершины всех r цветов. Продолжим эту раскраску уравновешенно на множество вершин V .

ЛЕММА 2. Пусть r – натуральное число ≥ 2 , $G(\mathcal{V}, E)$ – звезда с центром x радиуса $\leq r - 1$, которая содержит не менее двух лучей длины $\geq r/2$. Тогда существует уравновешенная r -раскраска индекса $\leq r$ множества $\mathcal{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_1, R_2, \dots, R_t$ – лучи длины $\geq r/2$, $R_{t+1}, R_{t+2}, \dots, R_s$ – лучи длины $< r/2 = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_t \cup \dots \cup R_s$. Предлагаемые способы раскраски зависят от четности числа t .

Если t чётно, занумеруем вершины графа $R_1 \cup R_2$ последовательными натуральными числами в порядке движения от конца луча R_1 к концу луча R_2 . Продолжим нумерацию таким же образом на вершины графа $R_3 \cup R_4$, пропуская центр x , и т.д. Начальным отрезком натурального ряда занумерованы вершины графа $R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_t$. Продолжая эту нумерацию произвольным образом на остальные вершины звезды, получим упорядочение $x_1, x_2, \dots, x_n$ множества $\mathcal{V}$. Окрасим вершины $x_1, x_2, \dots, x_n$ цветами $\{1, 2, \dots, r\}$ слева направо $\chi(x_1) = 1, \chi(x_2) = 2, \dots, \chi(x_r) = r, \chi(x_{r+1}) = 1, \dots, \chi(x_n) = 1 + (n - 1) \bmod r$.

Очевидно, что раскраска χ уравновешена. Возьмем произвольную вершину $v \in \mathcal{V}$. Если v – вершина одного из графов $R_1 \cup R_2, R_3 \cup R_4, \dots, R_{t-1} \cup R_t$, то в соответствующем графе на расстоянии $\leq r$ от вершины v имеются вершины всех r цветов. Если v – вершина одного из лучей $R_{t+1}, \dots, R_s$, то $d(v, x) < r/2$, а в графе $R_1 \cup R_2$ на расстоянии $\leq r/2$ от центра x также имеются вершины всех r цветов. Значит, индекс раскраски χ не превосходит r .

Если t нечётно, раскрасим вершины графа $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ согласно лемме 1. Пусть m – число вершин графа $R_1 \cup R_2 \cup R_3$, $m = ra + b$, $0 \leq b < r$. Изменяя нумерацию цветов, можно считать, что цвета $\{1, 2, \dots, b\}$ использованы $a + 1$ раз, а цвета $\{b + 1, b + 2, \dots, r\}$ использованы a раз. Начиная с цвета $(b + 1) \bmod r$, продолжим эту раскраску на $\mathcal{V}$ так же, как и в случае чётного t . Возьмем произвольную вершину $v \in \mathcal{V}$. Если v – вершина одного из графов $R_1 \cup R_2 \cup R_3, R_4 \cup R_5, \dots, R_{t-1} \cup R_t$, то в соответствующем графе на расстоянии $\leq r$ от вершины v имеются вершины всех r цветов. Если v – вершина одного из лучей $R_{t+1}, \dots, R_s$, то $d(v, x) < r/2$, а на расстоянии $\leq r/2$ от x в графе $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ также имеются вершины всех r цветов. Следовательно, индекс раскраски не превосходит r .

Для натурального числа $r > 1$ дерево, содержащее $\geq r$ вершин, назовем r -критическим, если после удаления любого его ребра хотя бы одно из двух образовавшихся деревьев имеет $< r$ вершин. Напомним, что *диаметром* конечного связного графа называется максимальное расстояние между его вершинами.

ЛЕММА 3. В r -критическом дереве $G(\mathcal{V}, E)$ диаметра $d \geq r - 1$ найдется вершина x , при удалении которой дерево распадается на поддеревья с числом вершин $< r$ в каждом из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем вершины v_0, v_d такие, что $d(v_0, v_d) = d$. Пусть $v_0, v_1, \dots, v_d$ – кратчайший путь от v_0 к v_d . Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ обозначим через T_i дерево с корнем v_i , которое образуется удалением из $G(\mathcal{V}, E)$ ребра (v_{i-1}, v_i) . Поскольку $d(v_0, v_d) = d$, дерево T_d состоит из одной вершины v_d . Выберем минимальное число $m \in \{1, 2, \dots, d\}$ такое, что дерево T_m имеет $< r$ вершин. Положим $x = v_{m-1}$. Для каждой вершины y , смежной с x , обозначим через $T(y)$ дерево с корнем y , полученное удалением ребра (x, y) . Если $y \notin \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, то после удаления ребра (x, y) мы получаем два дерева $T(x)$ и $T(y)$. Так как $T(x)$ содержит вершины $v_0, v_1, \dots, v_d$ и $d \geq r - 1$, то в силу r -критичности число вершин графа $T(y)$ меньше r . Это же утверждение верно и для $y \in \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ в силу выбора числа m и r -критичности.

ЛЕММА 4. Для любого r -критического дерева $G(\mathcal{V}, E)$ существует уравновешенная r -раскраска индекса $\leq r$ множества вершин $\mathcal{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если диаметр d дерева $\leq r$, то любая r -раскраска множества вершин $\mathcal{V}$ имеет индекс $\leq r$. Для $d > r$ выберем вершину x , удовлетворяющую заключению леммы 3. Обозначим через $y_1, y_2, \dots, y_s$ все смежные с x вершины дерева. Рассмотрим деревья $T(y_1), T(y_2), \dots, T(y_s)$ с корнями $y_1, y_2, \dots, y_s$, полученные удалением ребер $(y_1, x), (y_2, x), \dots, (y_s, x)$. В каждом из них выберем по одной вершине z_i , наиболее удаленной от корней. Обозначим через $R_1, R_2, \dots, R_s$ подграфы графа $G(\mathcal{V}, E)$, определяемые кратчайшими путями от x к $z_1, z_2, \dots, z_s$. Тогда граф $S = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_s$ является звездой радиуса $\leq r - 1$.

Предположим, что среди лучей звезды S имеется хотя бы два луча длины $\geq r/2$. По лемме 2 существует уравновешенная r -раскраска индекса $\leq r$ множества вершин звезды S . Продолжим ее произвольным образом до уравновешенной раскраски χ множества $\mathcal{V}$. Возьмем любую вершину $v \in \mathcal{V}$, $v \neq x$, и выберем поддерево $T(y_i)$, вершиной которого является v . Так как число вершин дерева $T(y_i)$ меньше r , то $B(z_i, r) \subseteq B(v, r)$. Поскольку в шаре $B(z_i, r)$ содержатся точки всех r цветов звезды S , то раскраска χ имеет индекс $\leq r$.

Наконец, допустим, что только один луч звезды S , скажем R_1 , имеет длину $\geq r/2$. Среди лучей $R_2, \dots, R_s$ выберем луч, скажем R_2 , максимальной длины. Так как $d > r$, то граф $R_1 \cup R_2$ имеет $\geq r$ вершин. Занумеруем их в порядке движения от конца луча R_2 к концу луча R_1 и продолжим эту нумерацию произвольным образом на все множество $\mathcal{V}$. Упорядоченную последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$ вершин графа раскрасим по правилу $\chi(x_i) = 1 + (i - 1) \bmod r$. Уравновешенность раскраски χ очевидна. Возьмем произвольную вершину $v \in \mathcal{V}$. По определению раскраски χ в шаре $B(v, n)$ найдутся r разноцветных точек графа $R_1 \cup R_2$. Значит, индекс раскраски $\leq r$.

Для подмножества A множества вершин графа $G(\mathcal{V}, E)$ обозначим через $G[A]$ граф с множеством вершин A и множеством ребер $E \cap (A \times A)$. Поскольку мы рассматриваем лишь неориентированные графы, (u, v) и (v, u) означают одно и то же ребро с концами $u, v \in \mathcal{V}$.

ЛЕММА 5. Пусть $G(\mathcal{V}, E)$ – конечный связный граф, r – натуральное число и множество вершин $\mathcal{V}$ разбито на подмножества $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_k$ так, что все графы $G[\mathcal{V}_1], G[\mathcal{V}_2], \dots, G[\mathcal{V}_k]$ связны и допускают уравновешенные r -раскраски $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ индекса $\leq r$. Тогда существует уравновешенная r -раскраска χ индекса $\leq r$ множества $\mathcal{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{V}_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_i}\}$. Изменяя нумерацию цветов, можно считать, что $\chi_i(x_{ij}) = 1 + (j-1) \bmod r$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, k\}, j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$. Запишем вершины $\mathcal{V}$ в последовательность

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m_1}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2m_2}, \dots, x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km_k}$$

и для i -го члена v этой последовательности положим $\chi(v) = 1 + (i-1) \bmod r$. Очевидно, что χ – искомая раскраска множества $\mathcal{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для $r = 1$ теорема очевидна. Предположим, что $r > 1$. Заменяя граф его остовом, можно считать, что $G(\mathcal{V}, E)$ – дерево. Последовательным стиранием ребер разобьем множество $\mathcal{V}$ на подмножества $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_k$ так, что $G[\mathcal{V}_1], G[\mathcal{V}_2], \dots, G[\mathcal{V}_k]$ – r -критические деревья. Применим леммы 4, 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Возьмем произвольные смежные вершины x, y . По теореме Караганиса [1] существует биекция $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{V}$ такая, что $f(1) = x, f(n) = y$ и $d(f(i), f(i+1)) \leq 3$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Для произвольной вершины $v \in \mathcal{V}$ положим $\chi(v) = 1 + (f(v) + 1) \bmod r$. Тогда $\chi^{-1}(1), \chi^{-1}(2), \dots, \chi^{-1}(r)$ – требуемое разбиение $\mathcal{V}$.

Завершим заметку некоторыми замечаниями и комментариями.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сопоставление теорем 1, 2 приводит к вопросу: можно ли указать уравновешенное r -разбиение индекса $\leq r-1$ множества $\mathcal{V}$ вершин произвольного связного графа $G(\mathcal{V}, E)$, $|\mathcal{V}| = n, r \leq n$? Следующий пример дает отрицательный ответ.

Рассмотрим граф $G_n(\mathcal{V}_n, E_n)$, $n \geq 2$, где

$$\mathcal{V}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad E_n = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), \dots, (x_1, x_n)\}.$$

Есть только две 2-раскраски χ_1, χ_2 множества $\mathcal{V}_n$ индекса 1. А именно,

$$\begin{aligned} \chi_1(x_1) &= 1, & \chi_1(x_2) &= \chi_1(x_3) = \dots = \chi_1(x_n) = 2, \\ \chi_2(x_1) &= 2, & \chi_2(x_2) &= \chi_2(x_3) = \dots = \chi_2(x_n) = 1. \end{aligned}$$

Если $n > 3$, то эти раскраски неуравновешенны. Следовательно, для $n > 3$ и $r = 2$ нет уравновешенных раскрасок индекса $r-1$ множества $\mathcal{V}_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть G – конечная группа с единицей e , $S \subseteq G$, $|S| = r$, $S = S^{-1}$, $e \in S$. Рассмотрим граф Кэли $\text{Cay}(G)$ с множеством вершин G и множеством ребер вида (x, y) , $x \neq y$, $xy^{-1} \in S$. Применяя к каждой связной компоненте графа $\text{Cay}(G)$ теорему 2, а затем лемму 5, получаем следующее утверждение.

Существует уравновешенное разбиение группы $G = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r$ такое, что $G = S^i A_i$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Если S – подгруппа группы G , то указать такое разбиение очень просто: каждый левый смежный класс группы G по подгруппе S раскрасим в цвета $\{1, 2, \dots, r\}$ и обозначим через $A_1, A_2, \dots, A_r$ одноцветные подмножества. Поэтому теорему 2 можно рассматривать как формальный аналог теоремы Лагранжа для графов.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В связи с теоремой 1 возникает вопрос, можно ли множество вершин конечного связного графа разбить на r подмножеств индекса 1 при условии, что локальная степень каждой вершины достаточно большая? Напомним, что локальная степень вершины, это число ребер, выходящих из этой вершины. Уточним вопрос. Верно ли, что для каждого натурального числа r найдется натуральное число $f(r)$ такое, что каждый конечный связный граф с локальными степенями вершин $\geq f(r)$ можно раскрасить в r цветов так, что каждый шар радиуса 1 содержит вершины всех r цветов?

Числа $f(1)$, $f(2)$ определяются теоремой 1 $f(1) = f(2) = 1$. Следующий пример показывает, что число $f(3)$ не существует.

Для каждого натурального числа m положим $X_m = \{1, 2, \dots, 3m\}$ и обозначим через Y_m семейство всех m -подмножеств множества X_m . Рассмотрим граф G_m с множеством вершин $\mathcal{V}_m = X_m \cup Y_m$ и множеством ребер E_m , где $(x, y) \in E_m$ тогда и только тогда, когда $x \in X_m$, $y \in Y_m$ и $x \in y$. Заметим, что локальная степень каждой вершины графа $G_m \geq m$. Зафиксируем произвольную 3-раскраску $\chi: \mathcal{V}_m \rightarrow \{1, 2, 3\}$. Поскольку $|X_m| = 3m$, найдется одноцветное m -подмножество u множества X_m . Значит, $|\chi(B(y, 1))| < 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Конечный связный граф называется *однородным степени k* , если локальная степень каждой его вершины равна k . Назовем однородный граф $G(\mathcal{V}, E)$ степени k *калейдоскопическим*, если существует раскраска $\chi: \mathcal{V} \rightarrow \{1, 2, \dots, k+1\}$ такая, что каждый шар $B(x, 1)$, $x \in \mathcal{V}$, содержит точки всех $k+1$ цветов. Подробнее о калейдоскопических графах и их связях с кодами Хемминга см. [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Karaganis J. On the cube of graphs // Canad. Math. Bull. 1969. V. 11. P. 295–296.
- [2] Protasova K. D. Kaleidoscopic graphs // Math. Stud. 2002. V. 18. P. 3–9.

г. Киев
E-mail: kseniya@profit.net.ua

Поступило
29.08.2002
Исправленный вариант
24.05.2005