Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Алидема, А. Ф. Филиппов, Оценки собственных значений матриц, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 169–177

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2687>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 17:06:32

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦ

Р. И. Алидема, А. Ф. Филиппов

Для матриц, имеющих только вещественные собственные значения (к таким относятся, в частности, вещественные симметрические матрицы и эрмитовы матрицы), выводится несложная явная формула, дающая оценки наибольшего ($\lambda_{\max}$) и наименьшего ($\lambda_{\min}$) собственных значений матрицы и не требующая вычисления детерминантов выше 2-го порядка. Для матриц 3-го порядка при использовании $\det A$, но без решения кубического уравнения, даются более точные оценки.

Библиография: 3 названия.

1. Используемые соотношения и инварианты. Собственные значения λ_i матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ являются корнями ее характеристического многочлена

$$P(\lambda) \equiv \det(\lambda E - A) = \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n, \quad \sigma_n = \det A, \quad (1)$$

где E – единичная матрица,

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad \sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} M_{ij}, \quad M_{ij} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}. \quad (2)$$

Из (1) по теореме Виета следует

$$\sigma_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \quad \sigma_2 = \lambda_1(\lambda_2 + \dots + \lambda_n) + \lambda_2(\lambda_3 + \dots + \lambda_n) + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n. \quad (3)$$

В (1)–(3) числа a_{ij} и λ_k могут быть вещественными или комплексными. Далее будем предполагать, что все они вещественные.

Числа λ_k и любые зависящие только от них величины не меняются при ортогональных преобразованиях, т.е. при переходе от матрицы A к матрице $C^T A C$, где C – любая ортогональная матрица, C^T – матрица, транспонированная к C . В частности, не меняются “квадратичная” норма

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2} \equiv (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^{1/2} \equiv (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2)^{1/2} \quad (4)$$

и “разброс” собственных значений

$$R = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda_j - \lambda_k)^2 \equiv (n-1)\sigma_1^2 - 2n\sigma_2 \equiv n\|A\|^2 - \sigma_1^2 \quad (5)$$

(это следует из подсчета коэффициентов при $\lambda_j \lambda_k$ и из (4)).

Если к каждому диагональному элементу a_{ii} матрицы A прибавить одно и то же число δ , то это же число прибавится ко всем собственным значениям λ_i матрицы A (следует из (1)). Для получения матрицы $B = A + \delta E$ роли прежних σ_1 и σ_2 будут исполнять числа

$$\tau_1 = \sigma_1 + n\delta, \quad \tau_2 = \sigma_2 + (n-1)\sigma_1\delta + n(n-1)\frac{\delta^2}{2}. \quad (6)$$

Для матрицы $A + \delta E$ числа R и $R = nS_d - \sigma_1^2$ (S_d есть сумма квадратов диагональных элементов матрицы) те же, что для A , а числа S_d и $\|A\|$ заменяются числами

$$S_d(\delta) = S_d + 2\sigma_1\delta + n\delta^2, \quad \|A + \delta E\|^2 = \|A\|^2 + 2\sigma_1\delta^2.$$

Наименьшие при $-\infty < \delta < \infty$ значения для $S_d(\delta)$ и $\|A + \delta E\|^2$ достигаются при $\delta = -\sigma_1/n$. При таком δ

$$S_d\left(-\frac{\sigma_1}{n}\right) = S_d - \frac{\sigma_1^2}{n} \equiv \frac{R_d}{n}, \quad \left\|A - E\frac{\sigma_1}{n}\right\|^2 = \|A\|^2 - \frac{\sigma_1^2}{n} = \frac{R}{n}, \quad (7)$$

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \sigma_2 - (n-1)\frac{\sigma_1^2}{2n} \equiv -\frac{R}{2n}. \quad (8)$$

Если для матрицы A известны все числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, то при любом δ значение $\det(A + \delta E)$ можно найти, положив в (1) $\lambda = -\delta$. В частности, для $n = 3$

$$\det(A + \delta E) = \det A + \sigma_2\delta + \sigma_1\delta^2 + \delta^3. \quad (9)$$

2. Оценки собственных значений. Для вещественных матриц порядка n , имеющих только вещественные собственные значения λ_i , в леммах 1 и 2 даются оценки отрезка $\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}$, содержащего все собственные значения данной матрицы. Более точные оценки приводятся в п. 3.

Известно [1, § 13], что для всех λ_i число $|\lambda_i|$ не больше любой нормы матрицы. В частности,

$$|\lambda_i| \leq \|A\| = \left(\sum_{k,j=1}^n a_{kj}^2 \right)^{1/2}, \quad |\lambda_i| \leq \|A\|_1 = \max_k \sum_{j=1}^n |a_{kj}|.$$

Более точные оценки основаны на том, что числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения $P(\lambda) = 0$ (см. (1)), коэффициенты которого выражаются через элементы a_{ij} матрицы A (см. (2)) и связаны с корнями соотношениями (3).

ЛЕММА 1. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ вещественные и известны числа σ_1, σ_2 в (3), то все λ_i содержатся в отрезке $[\lambda_*, \lambda^*]$, где

$$\lambda_* = \frac{\sigma_1}{n} - (n-1)\rho, \quad \lambda^* = \frac{\sigma_1}{n} + (n-1)\rho, \quad \rho = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{R}{n-1}} = \frac{1}{n} \sqrt{\sigma_1^2 - \frac{2n}{n-1}\sigma_2}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ_1 — любые из чисел λ_i , а $\Lambda = \sigma_1 - \lambda_1$. Тогда

$$\Lambda^2 = (\lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2 = \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j.$$

Так как $2\lambda_i \lambda_j \leq \lambda_i^2 + \lambda_j^2$, а выше в сумме $2 \sum \lambda_i \lambda_j$ каждое λ_i содержится в $n - 2$ слагаемых, то эта сумма не больше, чем $(n - 1)(\lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2)$, и

$$(\sigma_1 - \lambda_1)^2 = \Lambda^2 \leq (n - 1)(\lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2) = (n - 1)(Q - \lambda_1^2),$$

где $Q = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \equiv \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Следовательно,

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_1\lambda_1 + \lambda_1^2 \leq (n - 1)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - (n - 1)\lambda_1^2. \quad (11)$$

Как известно, квадратному неравенству $\alpha\lambda_1^2 + \beta\lambda_1 + \gamma \leq 0$, $\alpha > 0$, удовлетворяют все числа $\lambda_1 \in [\lambda_*, \lambda^*]$, где λ_* , λ^* — корни соответствующего квадратного уравнения. Для неравенства (11) эти λ_* и λ^* имеют вид (10), и лемма доказана.

ЛЕММА 2. На отрезке длины d имеется n точек λ_i , $i = 1, \dots, n$, $\lambda_1 - \lambda_n = d$, для которых

$$\frac{nd^2}{2} \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \leq \frac{n^2 - \theta}{4} d^2, \quad \theta = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ 1, & n = 2k + 1. \end{cases} \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим сумму в (12) через R . Если $n = 2$, то $R = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$ и (12) верна. Если $n \geq 3$, то для $1 < i < n$ положим $\lambda_i = c + y$, $c = (\lambda_1 + \lambda_n)/2$. Тогда

$$s_i = (\lambda_1 - \lambda_i)^2 + (\lambda_i - \lambda_n)^2 = \left(\frac{d}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{d}{2} + y\right)^2 = \frac{d^2}{2} + 2y^2.$$

Поэтому $s_i \geq d^2/2$. Так как $R \geq s_2 + \dots + s_{n-1} + (\lambda_1 - \lambda_n)^2$, то

$$R \geq (n - 2) \frac{d^2}{2} + d^2 = n \frac{d^2}{2}.$$

Оценка снизу в (12) доказана.

Докажем оценку сверху. На компакте K ($\lambda_n \leq x_i \leq \lambda_1$, $i = 2, \dots, n - 1$) непрерывная функция $R(\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ достигает своего максимума в некоторой точке. Так как $\partial^2 R / \partial \lambda_i^2 > 0$, $i = 2, \dots, n - 1$, эта точка лежит в конце содержащегося в K отрезка (в противном случае в K нашлось бы направление, по которому R еще возрастало бы). Поэтому в точке максимума каждое λ_i совпадает или с λ_1 , или с λ_n .

Пусть из всех чисел λ_i ровно p совпадают с λ_1 , а другие $q = n - p$ чисел — с λ_n . Тогда $R = pqd^2$. Для целых p, q таких, что $p + q = n$, $\max pq$ равен k^2 , если $n = 2k$, и равен $k(k + 1)$, если $n = 2k + 1$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если у вещественной матрицы A все собственные значения вещественны, то для $d = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ имеем

$$\frac{2}{n}\sqrt{R} \leq d \leq \sqrt{\frac{2R}{n}} \quad (13)$$

(при нечетном n в левой части (13) дробь $2/n$ заменяется на $2/\sqrt{n^2 - 1/4} \cdot R$, см. в (5)).

Неравенство (13) получается разрешением неравенства (12) относительно d . Хотя $d < \lambda^* - \lambda_*$, следствие леммы 2 (вместе с очевидным неравенством $\lambda_{\max} \geq \sigma_1/n \geq \lambda_{\min}$) может уточнить оценки леммы 1 только при использовании другой информации о матрице A , кроме чисел σ_1 и σ_2 .

Характеризовать относительную ошибку оценок λ^* и λ_* значений $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ можно с помощью чисел

$$\chi_1 = \frac{\lambda^* - \lambda_{\max}}{d_0}, \quad \chi_n = \frac{\lambda_{\min} - \lambda_*}{d_0}, \quad d_0 = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}.$$

МОТИВИРОВКА. Числа λ_i , σ_1 , σ_2 , λ^* , λ_* не меняются при приведении матрицы к диагональному виду, а числа χ_1 и χ_n не меняются также при переходе от матрицы A к матрице $A + \delta E$ или к матрице γA , где $\gamma > 0$ – любое число. С другой стороны, такие преобразования не оказывают существенного влияния на процесс вычисления оценок λ^* и λ_* и точность результата (после возвращения к исходной матрице с помощью обратного преобразования).

ПРИМЕР 1. Для матрицы из [1, § 15]

$$W = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

собственные значения выписаны в [1, § 42]:

$$\lambda_1 = 30.289, \quad \lambda_2 = 3.858, \quad \lambda_3 = 0.843, \quad \lambda_4 = 0.010, \quad d_0 = \lambda_1 - \lambda_4 = 30.279.$$

Имеем $\chi_1 = 0.0047$, $\chi_4 = 0.428$. Большое различие в точности оценок вызвано тем, что вблизи $\lambda_{\min}$ (на расстоянии, в несколько раз меньшем, чем d_0) имеются еще собственные значения матрицы, а вблизи $\lambda_{\max}$ их нет.

Более того, согласно (5) $R = (n-1)\sigma_1^2 - 2n\sigma_2 = 2507$, и в силу следствия леммы 2

$$25.035 \leq \lambda_{\max} - \lambda_{\min} \leq 34.405. \quad (14)$$

Это не позволяет уточнить оценки λ^* и λ_* , полученные только с помощью σ_1 и σ_2 . Но если использовать другую информацию о матрице W , например, ее положительную определенность, то получаем, что все $\lambda_i > 0$. Тогда можно взять $\lambda_* = 0$, и (14) дает оценку снизу: $\lambda_{\max} \geq 25.035$.

Покажем, что использование только чисел σ_1 и σ_2 не позволяет уточнить оценки.

ПРИМЕР 2. Возьмем

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Для обеих матриц числа $\sigma_1 = 6$ и $\sigma_2 = 9$ одни и те же. Из леммы 1 следует, что оценки $\lambda^* = 4$, $\lambda_* = 0$ общие для матриц A_1 и A_2 . С другой стороны, для A_1 имеем $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, и для A_2 имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$. Таким образом, для обеих матриц все числа λ_i содержатся в полученном отрезке $[\lambda^*, \lambda_*] = [0, 4]$. Любая, зависящая только от σ_1, σ_2 , оценка сверху $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ числа $\lambda_{\max}$ дает для матрицы A_1 $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) \geq 4$. Поэтому любая оценка $\lambda_{\max} \leq \varphi(\sigma_1, \sigma_2)$, справедливая для всех матриц с вещественными $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, в применении к матрице A_2 даст оценку $\lambda_{\max}$, не лучшую, чем оценка λ^* из леммы 1. Для λ_* — аналогично.

Покажем, что для матриц 3-го порядка относительные ошибки χ_1 и χ_3 оценок λ^* и λ_* в лемме 1 зависят только от отношения $\mu = (\lambda_2 - \lambda_3)/(\lambda_1 - \lambda_3)$. Укажем удобную оценку χ_1 .

ЛЕММА 3. При всех $\mu \in [0, 1]$

$$\chi_1 = \chi_1(\mu) = \frac{2}{3} \left(\sqrt{1 - \mu + \mu^2} - 1 + \frac{\mu}{2} \right) \leq \frac{\mu^2}{3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть матрица A порядка $n = 3$ имеет собственные значения $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ и $\lambda_1 > \lambda_3$ (если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то $\lambda^* = \lambda_* = \lambda_1$). Тогда при $\gamma = 1/(\lambda_1 - \lambda_3)$ матрица $B = \gamma(A - \lambda_3 E)$ имеет собственные значения $1, \mu, 0$ (где $0 \leq \mu \leq 1$) и для нее числа χ_1, χ_3 те же, что для A . Так как для B подобно (3) имеем $\sigma_1 = 1 + \mu$, $\sigma_3 = \mu$, по лемме 1

$$\lambda^*(B) = \frac{1}{3}(1 + \mu + 2\sqrt{1 - \mu + \mu^2}), \quad (15)$$

$$\chi_1(B) = \lambda^*(B) - 1 = \frac{2}{3} \left(\sqrt{1 - \mu + \mu^2} - 1 + \frac{\mu}{2} \right). \quad (16)$$

Так как $(\sqrt{1-x})^n < 0$, по формуле Тейлора $\sqrt{1-x} \leq 1 - x/2$, $x \leq 1$, и при $0 \leq \mu \leq 1$, $x = \mu - \mu^2$ получаем из (16) $\chi_1(B) \leq \mu^2/3$, и формула (15) доказана.

Для матрицы $E - B$ собственные значения равны $0, 1 - \mu, 1$ и $\chi(B) = \chi(E - B) = (1 - \mu)^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае комплексных a_{ij} и λ_k некоторые оценки собственных значений даны в [2] при различных условиях, означающих малость недиагональных элементов матрицы A по сравнению с диагональными. Без этих условий выведем несложную оценку.

Для $z = x + iy$ определим $|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$, а для вектора $z = (z_1, \dots, z_n)$

$$|z| = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2}, \quad \|A\| = \left(\sum_{jk} |a_{jk}|^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда для любого комплексного δ все собственные значения λ_k матрицы A лежат на комплексной плоскости в круге с центром $z = -\delta$ и радиусом $r = \|A + \delta E\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица $B = A + \delta E$ имеет собственные значения $\mu_k = \lambda_k + \delta$, $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$|\mu_k| \leq \|B\| = \|A + \delta E\|, \quad |\lambda_k + \delta| = |\mu_k| \leq \|A + \delta E\|, \quad k = 1, \dots, n,$$

т.е. все λ_k лежат в указанном круге.

Эту оценку иногда можно уточнить, построив несколько кругов с разными центрами $z_s = -\delta_s$, $s = 1, \dots, m$, и радиусами $r_s = \|A + \delta_s E\|$. Тогда все λ_k лежат в общей части всех таких кругов.

3. Более точные оценки. Для их получения нужна более полная информация, кроме использованных в п. 2 чисел σ_1 и σ_2 . Собственные значения матрицы A порядка n – корни характеристического многочлена (1), однако вычисление его коэффициентов является чрезвычайно громоздкой задачей [1, введение в гл. 4] при больших n . Поэтому рассмотрим случай $n = 3$; как и раньше предполагается, что все коэффициенты характеристического уравнения и его корни вещественны. Известно, что в этом случае корни λ_i , вообще говоря, не выражаются через коэффициенты уравнений с помощью конечного числа арифметических действий и извлечений квадратных и кубических радикалов из вещественных чисел, а вычисление корней λ_i требует или итераций, или использования более сложных функций, например, тригонометрических.

Поэтому ниже для решения характеристического уравнения

$$\lambda^3 - \sigma_1 \lambda^2 + \sigma_2 \lambda - \sigma_3 = 0, \quad \sigma_3 = \det A, \quad (17)$$

σ_1, σ_2 те же, что и в (2), предлагается на рассматриваемом отрезке (или на его частях) заменить кубический многочлен более простыми функциями и оценить возникающую ошибку. Это позволяет получить простые формулы для λ_i , дающие ошибку не более 1.2% от $\lambda_{\max} - \lambda_{\min}$.

Согласно п. 2 уравнение (17) заменой $\lambda = \mu + \sigma_1/3$ приводится к виду

$$\mu^3 + \tau_2 \mu = d, \quad d = \det B, \quad B = A - \frac{\sigma_1}{3} E, \quad (18)$$

$\tau_2 = \sigma_2 - \sigma_1/3$ (см. (8)). Так как в случае $\tau_2 \geq 0$ функция $\mu^3 + \tau_2 \mu$ монотонна, то при вещественных корнях может быть лишь $\tau_2 < 0$.

Заменой $\mu = \rho\nu$, $d = \rho^3 h$, где $\rho = \sqrt{-\tau_2/3}$, уравнение (18) приводится к виду

$$\nu^3 - 3\nu = h. \quad (19)$$

Функция $\nu^3 - 3\nu$ при $-1 \leq \nu < 1$ убывает от 2 до -2 , а на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ возрастает. Три вещественных корня имеются в случае $|h| \leq 2$; наибольший корень $\nu_{\max}$ лежит на отрезке $1 \leq \nu \leq 2$. Чтобы его найти или оценить, заменим функцию $\varphi(\nu) = \nu^3 - 3\nu$ на отрезке $[1, 2]$ (или его частях) многочленами 1-й или 2-й степени с помощью формулы Тейлора:

$$\begin{aligned} \varphi(\nu) &\equiv -2 + 3(\nu - 1)^2 + (\nu - 1)^3 > -2 + 3(\nu - 1)^2 = \varphi_1(\nu), \\ \varphi(\nu) &\equiv 6(\nu\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}(\nu - \sqrt{3})^2 + (\nu - \sqrt{3})^3 > 6(\nu - \sqrt{3}) = \varphi_2(\nu), \\ \varphi(\nu) &\equiv 2 + 9(\nu - 2) + 6(\nu - 2)^2 + (\nu - 2)^3 > 2 + 9(\nu - 2) = \varphi_3(\nu). \end{aligned} \quad (20)$$

Эти неравенства справедливы при $\nu \geq 1$. Так как эти функции возрастают, при замене уравнения (19) любым из уравнений $\varphi_i(\nu_i) = h$, $i = 1, 2, 3$, получается оценка ν_i корня ν сверху, т.е. $\nu_i \geq \nu$.

Разобьем отрезок $1 \leq \nu \leq 2$ на три части так, чтобы на каждой из частей одна из функций φ_i давала меньшую ошибку, чем две другие. Ясно, что на концах этих частей две из функций φ_i должны совпадать:

$$\varphi_1(\nu) = \varphi_2(\nu) \implies \nu_a = 1.5499, \quad h = \varphi_1(\nu) = \varphi_2(\nu) = -1.0927, \quad (21a)$$

$$\varphi_2(\nu) = \varphi_3(\nu) \implies \nu_b = 1.8692, \quad h = \varphi_2(\nu) = \varphi_3(\nu) = 0.8231. \quad (21b)$$

При таких h решение уравнения (19), найденное методом Ньютона, равно соответственно:

$$\nu = 1.50852, \quad \nu = 1.85568. \quad (22)$$

Ошибки $\nu_a - \nu$ и $\nu_b - \nu$ составляют соответственно 0.0413 и 0.0135, т.е.

а) менее 1.2% от $\nu_{\max} - \nu_{\min}$: в этом случае $\nu_{\max} - \nu_{\min} = 3.403$;

б) менее 0.4% от $\nu_{\max} - \nu_{\min}$: в этом случае $\nu_{\max} - \nu_{\min} = 3.430$.

Так как первая часть T_1 (т.е. $1 \leq \nu \leq \nu_a$) содержит точку $\nu = 1$, в которой $\varphi_1 = \varphi$, вторая часть T_2 (т.е. $\nu_a \leq \nu \leq \nu_b$) — точку $\nu = \sqrt{3}$, где $\varphi_2 = \varphi$, а третья часть T_3 (т.е. $\nu_b \leq \nu \leq 2$) — точку $\nu = 2$, в которой $\varphi_3 = \varphi$, то на каждой из частей T_i функция φ_i дает большую точность, чем две другие.

Покажем, что в других точках ν , кроме ν_a и ν_b , ошибка меньше, чем в этих точках. Функция $\varphi_2(\nu)$ линейная, ее график — прямая линия, касающаяся графика функции $\varphi(\nu) = \nu^3 - 3\nu$. Кривая $y = \varphi(\nu)$ на отрезке $1 \leq \nu \leq 2$ выпуклая ($\varphi''(\nu) = 6\nu > 0$), поэтому лежит с одной стороны от касательной. Ошибка $\nu_2 - \nu_0$ корня уравнения $\varphi_2(\nu_2) = h$, где $\varphi(\nu_0) = h$, есть расстояние по горизонтали между точками пересечения прямой $y = h$ с кривыми $y = \varphi(\nu)$ и $y = \varphi_2(\nu)$. Из-за выпуклости кривой $y = \varphi(\nu)$ это расстояние возрастает при удалении прямой $y = h$ в каждую сторону от точки касания. Значит, на концах отрезка T_2 ошибка больше, чем в его внутренних точках. Для $\varphi_3(\nu)$ рассуждения аналогичны.

Для $\varphi_1(\nu)$ сложнее. Имеем $\varphi(\nu) = h$, $\varphi_1(\nu_1) = h$. Выразим ν_1 через ν и покажем, что $\nu_1 - \nu$ возрастает, начиная с значения $\nu_1 - \nu = 0$ при $\nu = 1$. Из (20) и равенства $\varphi_1(\nu_1) = h$ следует $\nu_1 = 1 + \sqrt{(h+2)/3}$. Так как $h = \varphi(\nu) = \nu^3 - 3\nu$, то

$$\frac{d(\nu_1 - \nu)}{d\nu} = \frac{\varphi'(\nu)}{6\sqrt{(h+2)/3}} - 1. \quad (23)$$

Надо доказать, что это больше нуля, т.е. что $\varphi(\nu) > \sqrt{(\varphi(\nu) + 2)/3}$. Возводя в квадрат, получаем $(\varphi(\nu))^2 > 12(\varphi(\nu) + 2)$, т.е.

$$9(\nu^2 - 1)^2 > 12(\nu^3 - 3\nu + 2).$$

Делим обе части неравенства на $3(\nu - 1)^2$. Получаем при $\nu > 1$ верное неравенство $3(\nu + 1)^2 > 4(\nu + 2)$. Значит, требуемое неравенство доказано. Таким образом, в силу (23) $\nu_1 - \nu$ возрастает при $\nu > 1$, и на отрезке T_1 ($1 \leq \nu \leq \nu_n$) ошибка не больше, чем при $\nu = \nu_a$.

Из сказанного вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА. Пусть для матрицы A 3-го порядка все a_{ij} и λ_k вещественные, σ_1 и σ_2 те же, что в (2);

$$\tau_2 = \sigma_2 - \frac{\sigma_1}{3}, \quad \rho = \sqrt{-\tau_2/3}, \quad d = \det\left(A - \frac{\sigma_1}{3}E\right), \quad h = \frac{d}{\rho^3}.$$

Тогда для матрицы A имеем $\lambda_i = \mu_i + \sigma_i/3$, $i = 1, 2, 3$, где $\mu_i = \mu^3 - c\mu = d$ и ν_i — решение уравнения $\nu^3 - 3\nu = h$, имеют место следующие оценки:

- 1) если $-2 \leq h \leq -1.0927$, то $\nu^* - 0.0413 \leq \max \nu_i \leq \nu^* = (1 + \sqrt{(2+h)/3})$;
- 2) если $-1.0927 \leq h \leq 0.8231$, то $\nu^* - 0.0413 \leq \max \nu_i \leq \nu^* = \sqrt{3} + h/6$;
 $\mu \leq \sqrt{c} + d/2c$ (при $h > 0$ здесь 0.0413 можно заменить на 0.0135);
- 3) если $0.8231 \leq h \leq 2$, то $\nu^* - 0.01356 \leq \max \nu_i \leq \nu^*$, где $\nu^* = 2 - (2-h)/9$;
 $\mu_1 \leq 16\rho/9 + d/3c$, $c = \sqrt{-\tau_2}$;
- 4) если $|h| > 2$, то вещественный корень только один и его оценку сверху можно получить из леммы 1.

Для доказательства теоремы остается заметить, что выписанные неравенства для ν^* на каждом из отрезков T_i получаются путем разрешения уравнения $\varphi_i(\nu^*) = h$ относительно ν^* , $i = 1, 2, 3$, и произведенных после (22) оценок ошибки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Чтобы оценить снизу собственные значения матрицы A , нужно для матрицы $-A$ оценить сверху собственные значения и эти оценки взять с обратными знаками так же, как $\lambda(-A) = -\lambda(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если надо оценить собственные значения точнее, чем дает эта теорема, то можно применить метод Ньютона:

$$\nu^{(k)} = \nu^{(k-1)} - \frac{\psi(\nu^{(k-1)})}{\psi'(\nu^{(k-1)})}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \psi(\nu) = \nu^3 - 3\nu - h,$$

где $\nu^{(0)}$ есть ν^* , полученные по теореме. Тогда последовательность $\nu^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, быстро сходится к точному решению уравнения $\nu^3 - 3\nu = h$.

О современных методах вычисления собственных значений см. [3, гл. 6, § 12].

ПРИМЕР 3. Получим оценки собственных значений матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1+i \\ 1 & 3 & 1 \\ 1-i & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

В силу (17) $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 22\lambda - 14 = 0$. Точные значения корней: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4 - \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 4 + \sqrt{2}$.

Чтобы продемонстрировать, как применяется теорема и какую точность она дает, оценим корни приближенно, используя теорему.

Заменой $\lambda = \mu + 3$ получаем

$$\mu^3 - 5\mu - 2 = 0, \quad d = 2, \quad \rho = \sqrt{5/3} = 1.291.$$

Далее, $\mu = \rho\nu$, $h = 2/\rho^3 = 0.9295$. Имеем случай 3) теоремы. Поэтому для уравнения

$$\nu^3 - 3\nu - 0.92955 = 0 \tag{24}$$

имеем оценку $\nu^* - 0.0135 \leq \max \nu_i \leq \nu^* = 1.881$, $\lambda^* = \rho\nu^* + \sigma_1/3 = 5.4284$, т.е. $1.8674 \leq \max \nu_i \leq 1.881$, или иначе $\mu^* = 16\rho/9 + d/(3c) = 2.4284$. По теореме $\mu^* - 0.0135\rho < \max \mu \leq \mu^*$, т.е. $2.4108 \leq \max \mu \leq 2.4284$.

Чтобы оценить λ снизу, воспользуемся тем, что в силу замечания 1 $\lambda_{\min}(A) = -\lambda_{\max}(-A)$.

Для матрицы $-A$ имеем $\mu^3 - 5\mu = -d$, $\nu^3 - 5\nu = -h$; d и h , те же, что выше. Так как в (24) h и d заменились на $h^\sim = -0.9295$ и $d^\sim = -2$, имеем случай 2) теоремы. Следовательно, для матрицы $-A$:

$$\nu_1 \leq \nu^* = \sqrt{3} + \frac{h^\sim}{6} = 1.5772 \quad \text{или иначе} \quad \mu_1 \leq \sqrt{c} + \frac{d^\sim}{2c} = 2.0361.$$

Возвращаясь от ν к λ , получаем для A оценки

$$0.9639 \leq \lambda_{\min} \leq 1.0172 \quad \text{и} \quad 5.4108 \leq \lambda_{\max} \leq 5.4284.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960.
- [2] Gerschgorin S. Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix // Изв. АН СССР. Матем. и естеств. науки. 1931. №7. С. 749–754.
- [3] Бахвалов Н. С., Жадков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987.

(Р. И. Алидема) Приштинский университет, Косово
 (А. Ф. Филиппов) Московский государственный
 университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: rialidema@hotmail.com

Поступило
 13.09.2004