Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. А. Алимов, О зависимости множества сходимости спектральных разложений от геометрии разрывов разлагаемой функции, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 178–193

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 11:26:16

УДК 517.98

О ЗАВИСИМОСТИ МНОЖЕСТВА СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОТ ГЕОМЕТРИИ РАЗРЫВОВ РАЗЛАГАЕМОЙ ФУНКЦИИ

Ш. А. Алимов

Для кусочно-гладких функций указаны множества сходимости и риссовской суммируемости их спектральных разложений, связанных с оператором Лапласа в $\mathbb{R}^n$, в зависимости от геометрии точек разрыва разлагаемой функции.

Библиография: 16 названий.

Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор Лапласа

$$A(D) = -\Delta = \sum_{j=1}^n D_j^2, \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Как известно, данный оператор является существенно самосопряженным (см., например, [1]) и имеет единственное самосопряженное расширение, которое мы обозначим A . В соответствии со спектральной теоремой каждой функции $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ мы можем сопоставить ее спектральное разложение, определяемое с помощью разложения единицы, и в нашем случае оно имеет вид кратного интеграла Фурье:

$$E_\lambda f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|\xi|^2 < \lambda} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \quad (1)$$

где

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Основным объектом нашего рассмотрения является разложение Фурье (1) кусочно-гладких функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке общества Deutsche Forschungsgemeinschaft (ФРГ), грант № DFG 436 USB 113/4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Простейшей кусочно-гладкой функцией* в $\mathbb{R}^n$ будем называть функцию вида

$$f(x) = \chi_D(x)g(x),$$

где χ_D – характеристическая функция некоторой открытой области D , граница Γ которой является гладкой поверхностью, а функция g для любого натурального l принадлежит классу Соболева $W_2^l(\mathbb{R}^n)$. Иначе говоря,

$$g \in \bigcap_{k=0}^{\infty} D(A^k),$$

где $D(A^k)$ – область определения степени A^k рассматриваемого самосопряженного расширения A оператора Лапласа $-\Delta$.

Конечную линейную комбинацию простейших кусочно-гладких функций будем называть *кусочно-гладкой функцией*.

В 1956 г. Ильин [2] доказал, что в случае $n = 2$ разложение любой кусочно-гладкой функции по собственным функциям оператора Лапласа произвольной двумерной области сходится равномерно на каждом компактном подмножестве той области, где функция является гладкой. В частности, данное утверждение относится к разложениям в двумерный ряд и интеграл Фурье.

В последнее время эта проблема для случая эллиптических операторов второго порядка вновь привлекла внимание многих математиков (см. [3]–[8]). Отметим, что результат, аналогичный результату Ильина, справедлив также для эллиптических операторов с постоянными коэффициентами произвольного порядка m в $\mathbb{R}^2$ (см. [9]).

Однако ситуация меняется в случае $n > 2$. В этом случае спектральные разложения могут расходиться даже в тех точках, где разлагаемая функция является гладкой, и множество расходимости зависит от геометрических свойств поверхности разрыва Γ .

Впервые вопрос о сходимости спектральных разложений с точки зрения геометрии разрывов разлагаемой функции был исследован Масловым в работах [10] и [11]. Именно, в 1970 г. им было доказано, что при $n = 2$ спектральное разложение функции со слабыми разрывами на Γ расходится квази-абсолютно в точках эволюты Γ . В данной работе мы следуем идее Маслова о зависимости точек расходимости от геометрического расположения их относительно поверхности разрыва Γ и рассматриваем вопрос о равномерной сходимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Предположим, что для некоторой точки $a \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ сфера

$$S(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = R\}$$

касается гладкой поверхности Γ в некоторой точке $x \in \Gamma$. Будем говорить, что *касание имеет тип k* , $k = 0, 1, \dots, n - 1$, если в этой точке x поверхность Γ имеет k главных кривизн, радиусы которых равны R , а центры совпадают с точкой a .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Точку $a \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ будем называть *регулярной типа k* относительно гладкой поверхности Γ , если любая сфера с центром в точке a , касающаяся поверхности Γ , не может иметь тип касания, превышающий k .

ПРИМЕР 1. Если поверхность Γ представляет собой сферу

$$\Gamma = S(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = R\},$$

то, очевидно, все точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$, отличные от x_0 , являются регулярными относительно Γ типа 0. Центр сферы – точка x_0 – является регулярной типа $k = n - 1$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим для $0 < r < R < \infty$ следующий тор в $\mathbb{R}^3$:

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : (\varrho - R)^2 + x_3^2 = r^2, \varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}.$$

Нетрудно видеть, что окружность

$$L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_3 = 0\}$$

и прямая

$$L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$$

состоят из точек, регулярных типа 1 относительно поверхности Γ . Оставшиеся точки $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ являются регулярными типа 0 относительно поверхности Γ .

ПРИМЕР 3. Рассмотрим эллипсоид вращения в $\mathbb{R}^3$:

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + \varepsilon^2 x_3^2 = 1\}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Нетрудно видеть, что две вершины эллипсоида $(0, 0, 1/\varepsilon)$ и $(0, 0, -1/\varepsilon)$ являются омбилическими точками с радиусами главных кривизн ε , и поэтому две точки

$$a = \left(0, 0, -\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad -a = \left(0, 0, \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

являются регулярными типа 2 относительно эллипсоида Γ . Точки, лежащие на интервале

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0, -a < x_3 < a\},$$

являются регулярными типа 1, все остальные точки из $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ являются регулярными типа 0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество всех точек из $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$, регулярных типа k относительно Γ , обозначим символом $\Omega_k(\Gamma)$.

Очевидно, что каждое множество $\Omega_k(\Gamma)$ является открытым, причем $\Omega_k(\Gamma) \subset \Omega_{k+1}(\Gamma)$. Заметим также, что $\Omega_{n-1}(\Gamma) = \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$.

Рассмотрим подробнее введенное определение. Для этого предположим, что сфера $S(x_0, R)$ касается Γ в точке $y_0 \in \Gamma$ и касание имеет тип k . Пусть в некоторой окрестности V точки y_0 уравнение поверхности Γ имеет следующий вид:

$$\Gamma \cap V = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \omega(s), s \in B\},$$

где параметрические координаты $s = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ меняются в $(n-1)$ -мерном шаре

$$B = \{s \in \mathbb{R}^{n-1} : |s| < \delta\}.$$

При этом мы считаем, что $\omega(0) = y_0$.

Для заданной точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ введем следующее обозначение:

$$\varphi(s, x) = |\omega(s) - x|, \quad s \in B.$$

Тогда точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$ является регулярной типа k относительно поверхности Γ , если

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial^2 \varphi(0, x)}{\partial s_j \partial s_l} \right\| \geq n - k - 1.$$

Выше отмечалось, что в случае $n \geq 3$ разложения Фурье (1) кусочно-гладких функций могут расходиться в отдельных точках. Мы доказываем, что во всех регулярных точках типа 1 имеет место сходимость указанных разложений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 3$. Тогда для любой кусочно-гладкой функции f с соответствующей гладкой поверхностью разрыва Γ ее разложение (1) сходится равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega_1(\Gamma)$.

В точках расходимости спектральных разложений приходится рассматривать регулярные методы их суммирования, из которых наиболее естественным является метод Рисса. Напомним, что *средние Рисса* $E_\lambda^s f$ порядка s спектральных разложений $E_\lambda f$ определяются следующим образом:

$$E_\lambda^s f = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s E_t f dt.$$

В рассматриваемом нами случае средние Рисса разложений Фурье (1) имеют следующий вид:

$$E_\lambda^s f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|\xi|^2 < \lambda} \left(1 - \frac{|\xi|^2}{\lambda}\right)^s \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Отметим, что в случае $n = 3$ расходимость разложений Фурье (1) кусочно-гладких функций является ограниченной. В более общем виде этот результат справедлив для средних Рисса и выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 3$, $k \geq 2$. Тогда для любой кусочно-гладкой функции f с соответствующей гладкой поверхностью разрыва Γ средние Рисса порядка $s \geq (k-2)/2$ спектрального разложения (1) ограничены равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega_k(\Gamma)$.

Поскольку средние Рисса нулевого порядка совпадают с самими разложениями (1), то отсюда при $n \geq 3$ следует их ограниченность во всех регулярных точках типа 2.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $n \geq 3$. Тогда для любой кусочно-гладкой функции f с соответствующей гладкой поверхностью разрыва Γ ее разложение Фурье (1) ограничено равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega_2(\Gamma)$.

Заметим теперь, что если в теореме 2 увеличить показатель средних Рисса, то можно получить равномерную сходимость.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n \geq 3$, $k \geq 2$. Тогда для любой кусочно-гладкой функции f с соответствующей гладкой поверхностью Γ средние Рисса порядка $s > (k - 2)/2$ разложения (1) сходятся равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega_k(\Gamma)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $n \geq 3$. Тогда для любой кусочно-гладкой функции f с соответствующей гладкой поверхностью Γ средние Рисса порядка $s > (n - 3)/2$ разложений (1) сходятся равномерно на каждом компакте $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$.

Для доказательства этих теорем нам понадобятся оценки осциллирующих интегралов.

ЛЕММА 1. Пусть $n \geq 3$ и $S = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$. Пусть $\psi(\xi, x, \mu)$ для любого $\mu \geq 1$ является гладкой функцией переменных ξ в некоторой окрестности S и переменной x в шаровом слое $1 \leq |x| \leq 2$ и удовлетворяет условию

$$D_x^\alpha D_\xi^\beta \psi(\xi, x, \mu) = O(1), \quad \xi \in S, \quad 1 \leq |x| \leq 2, \quad \mu \geq 1. \quad (2)$$

Тогда выполняется следующее равенство:

$$\int_S e^{i\mu x \xi} \psi(\xi, x, \mu) d\sigma(\xi) = \mu^{-(n-1)/2} [e^{i\mu|x|} \Phi_+(x, \mu) + e^{-i\mu|x|} \Phi_-(x, \mu)], \quad (3)$$

где

$$D_x^\alpha \Phi_\pm(x, \mu) = O(1), \quad 1 \leq |x| \leq 2, \quad \mu \geq 1. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Предположим вначале, что вектор x имеет следующий вид: $x = (0, 0, \dots, 0, |x|)$. Тогда $x\xi = |x|\xi_n$ и

$$I(\mu) = \int_S e^{i\mu|x|\xi_n} \psi(\xi, x, \mu) d\sigma(\xi).$$

Мы предположим также, что $\psi(\xi, x, \mu)$ как функция переменной ξ на сфере S имеет носитель, расположенный в достаточно малой окрестности точки $\xi_n = 1$. В таком случае с некоторой постоянной $R > 0$ выполняется равенство

$$I(\mu) = \int_{|\xi'| \leq R} \exp\{i\mu|x|\sqrt{1 - |\xi'|^2}\} \chi(\xi', x, \mu) d\xi',$$

где $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. Введем следующую функцию:

$$\varphi(\xi') = \sqrt{1 - |\xi'|^2} - 1, \quad |\xi'| \leq 1.$$

Тогда

$$I(\mu) = e^{i\mu|x|} \int_{|\eta'| \leq R} \exp[i\mu|x|\varphi(\xi')] \chi(\xi', x, \mu) d\xi' = e^{i\mu|x|} \mu^{-(n-1)/2} \Phi_+(x, \mu),$$

и, следовательно, достаточно оценить функцию

$$\Phi_+(x, \mu) = \mu^{(n-1)/2} \int_{|\eta'| \leq R} \exp[i\mu|x|\varphi(\xi')] \chi(\xi', x, \mu) d\xi'. \quad (5)$$

Очевидно,

$$\varphi(0) = 0, \quad \nabla \varphi(0) = 0, \quad \text{rank} \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_j \partial \eta_l}(0) \right\| = n - 1.$$

Данные соотношения позволяют нам для получения оценки (4) применить метод стационарной фазы (см., например, [12, гл. 3, теорема 2.1]), согласно которому справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\int_{|\eta'| \leq R} \exp[i\omega \varphi(\xi')] \chi(\xi', x, \mu) d\xi' \sim \omega^{-(n-1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, \mu) \omega^{-k}.$$

Полученное асимптотическое разложение можно дифференцировать почленно по переменным ω и x , причем все производные $D_x^\alpha a_k(x, \mu)$ являются ограниченными. Следовательно, положив $\omega = \mu|x|$, мы получим для функции (5) следующее асимптотическое разложение:

$$\Phi_+(x, \mu) \sim |x|^{-(n-1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, \mu) |x|^{-k} \mu^{-k},$$

причем подобное асимптотическое разложение имеет место и для производных по x , $1 \leq |x| \leq 2$.

Аналогично рассматривается случай, когда функция $\psi(\xi, x, \mu)$ имеет носитель в достаточно малой окрестности точки $\xi_n = -1$. Если же носитель этой функции не содержит точек $\xi_n = 1$ и $\xi_n = -1$, то соответствующий интеграл убывает быстрее любой степени.

2. В случае произвольно направленного вектора x фиксируем произвольную ортогональную матрицу T и введем новые координаты $\eta = T(\xi)$. Тогда

$$I(\mu) = \int_S \exp\{i\mu x(T^*\eta)\} \psi(T^*\eta, x, \mu) |\det T| d\sigma(\eta),$$

где T^* — сопряженная матрица. Так как

$$x(T^*\eta) = (Tx)\eta,$$

то

$$I(\mu) = \int_S \exp\{i\mu(Tx)\eta\} \psi(T^*\eta, x, \mu) d\sigma(\eta),$$

и подходящим выбором матрицы T задача сводится к рассмотренному выше случаю. Лемма 1 доказана.

Пусть $\omega(\xi)$ – произвольная однородная гладкая функция такая, что

$$\omega(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad \omega(t\xi) = \omega(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad t > 0. \quad (6)$$

Введем следующую вспомогательную функцию:

$$v(x, \mu) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|=\mu} \omega(\xi) e^{ix\xi} d\sigma(\xi), \quad (7)$$

определенную для $x \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \geq 1$.

ЛЕММА 2. *Равномерно по x из любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ выполняется следующая оценка:*

$$v(x, \mu) = \mu^{(n-1)/2} (2\pi)^{-n} [e^{i\mu|x|} \Phi_+(x, \mu) + e^{-i\mu|x|} \Phi_-(x, \mu)], \quad (8)$$

где

$$D^\alpha \Phi_\pm(x, \mu) = O(1), \quad x \in K, \quad \mu \geq 1. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с условиями (6) мы можем функцию, определенную равенством (7), представить в следующем виде:

$$v(x, \mu) = \mu^{n-1} (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|=1} e^{i\mu x\xi} \omega(\xi) d\sigma(\xi).$$

Из условий (6) следует, что подынтегральная функция удовлетворяет всем условиям леммы 1, применяя которую, мы можем оценить данный интеграл следующим образом:

$$\int_{|\xi|=1} e^{i\mu x\xi} \omega(\xi) d\sigma(\xi) = \mu^{-(n-1)/2} [e^{i\mu|x|} \Phi_+(x, \mu) + e^{-i\mu|x|} \Phi_-(x, \mu)],$$

где функции $\Phi_\pm(x, \mu)$ удовлетворяют условиям (9). Отсюда следует требуемая оценка (8). Лемма 2 доказана.

Напомним, что Γ является гладкой компактной поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 3. *Пусть $n \geq 3$ и $k = 0, 1, \dots, n-1$. Для любой гладкой функции g , определенной на Γ , равномерно по x из произвольного компакта $K \subset \Omega_k(\Gamma)$ выполняется следующая оценка:*

$$\int_{\Gamma} v(x-y, \mu) g(y) ds(y) = O(\mu^{k/2}), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем воспользоваться леммой 2, согласно которой

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} v(x-y, \mu) g(y) ds(y) \\ &= \mu^{(n-1)/2} (2\pi)^{-n} \int_{\Gamma} [e^{i\mu|x-y|} \Phi_+(x-y, \mu) + e^{-i\mu|x-y|} \Phi_-(x-y, \mu)] g(y) ds(y). \end{aligned}$$

В таком случае достаточно убедиться в справедливости следующей оценки:

$$\int_{\Gamma} e^{i\mu|x-y|} \Phi(x-y, \mu) g(y) ds(y) = O(\mu^{-(n-k-1)/2}).$$

С помощью разбиения единицы и введения локальных параметрических координат задача стандартным образом сводится к оценке следующего интеграла:

$$A(\mu) = \int_{|t| < \delta} \exp\{i\mu|x-y(t)|\} \Phi(x-y(t), \mu) \psi(t) dt,$$

где $y(0) = y_0 \in \Gamma$, $t \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Обозначим $\varphi(t) = |x-y(t)|$. Так как $x \in K \subset \Omega_k(\Gamma)$ и $\text{dis}\{x, \Gamma\} \geq \text{dis}\{K, \Gamma\} > 0$, то в рассматриваемой области функция $\varphi(t)$ не обращается в нуль и является гладкой.

Предположим, что некоторая точка $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ с $|a| < \delta$ является стационарной, т.е. $\nabla \varphi(a) = 0$. Пусть $R = \varphi(a) = |x-y(a)|$. Тогда условие стационарности означает, что сфера $S(x, R)$ касается поверхности Γ в точке $y(a)$. Следовательно, в соответствии с предположением $x \in \Omega_k(\Gamma)$ мы можем записать

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_j \partial t_l}(a) \right\| \geq n-k-1.$$

Это означает, что a является стационарной точкой коранга k , что позволяет нам преобразовать фазовую функцию следующим образом (см. [13], а также [12, лемма 3.5.1]). Именно, существует диффеоморфизм $t = \tau(s)$ такой, что $a = \tau(0)$ и в некоторой окрестности точки a фазовая функция φ представима в следующем виде:

$$\varphi(\tau(s)) = \varphi(a) + \sum_{j=1}^{n-k-1} \pm s_j^2 + \varphi_1(\tilde{s}),$$

где $\tilde{s} = (s_{n-k}, s_{n-k+1}, \dots, s_n)$.

Получив такое представление, мы можем применить обычный метод стационарной фазы (см. [12]), согласно которому

$$A(\mu) = O(1) \mu^{-(n-k-1)/2},$$

и эта оценка завершает доказательство леммы 3.

Определим функцию $K(x)$ с помощью следующего интеграла:

$$K(x) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi| \geq 1} \frac{e^{ix\xi}}{|\xi|^2} d\xi, \quad (11)$$

понимаемого в смысле теории распределений. Нетрудно показать, что эта функция представима в следующем виде:

$$K(x) = C_n |x|^{2-n} + \gamma(x), \quad \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Для любой гладкой на Γ функции g рассмотрим потенциал двойного слоя (напомним, что $n \geq 3$) с плотностью g :

$$B_1 g(x) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial n_y} K(x-y) \right] g(y) ds(y), \quad (12)$$

где $n(y)$ обозначает внутреннюю нормаль к поверхности Γ .

Как известно (см., например, [14]), потенциал $B_1 f(x)$ имеет на Γ скачок, равный $f(x)$, в то время как скачок $\frac{\partial}{\partial n} B_1 g$ равен нулю.

Введем следующее формальное обозначение:

$$P_\mu f(x) = \frac{d}{d\mu} E_{\mu^2} f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{|\xi|=\mu} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\sigma(\xi). \quad (13)$$

ЛЕММА 4. Пусть $n \geq 3$. Для любой функции g , гладкой на Γ , выполняется следующая оценка:

$$P_\mu B_1 g(x) = O(\mu^{k/2-1}), \quad \mu \geq 1,$$

равномерная на каждом компакте $K \subset \Omega_k(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из равенства

$$P_\mu B_1 g(x) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|=\mu} \frac{e^{ix\xi}}{|\xi|^2} d\xi \int_{\Gamma} e^{-iy\xi} (-i\xi, n(y)) g(y) ds(y)$$

и из леммы 3.

Нам понадобится также потенциал простого слоя

$$B_2 g(x) = \int_{\Gamma} K(x-y) g(y) ds(y). \quad (14)$$

Известно [14], что функция $B_2 g(x)$ непрерывна на Γ , а ее производная по нормали $\frac{\partial}{\partial n} B_2 f(x)$ имеет скачок на Γ , равный $f(x)$.

ЛЕММА 5. Пусть $n \geq 3$. Для любой функции g , гладкой на Γ , выполняется оценка

$$P_\mu B_2 g(x) = O(\mu^{k/2-2}), \quad \mu \geq 1,$$

равномерная на каждом компакте $K \subset \Omega_k(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 4 и следует из равенства

$$P_\mu B_2 g(x) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|=\mu} \frac{e^{ix\xi}}{|\xi|^2} d\xi \int_\Gamma e^{-iy\xi} g(y) ds(y)$$

и из леммы 3.

Определим теперь на простейших кусочно-гладких функциях f с соответствующей гладкой поверхностью разрыва Γ следующий оператор:

$$\begin{aligned} Bf(x) &= B_1 f(x) + B_2 \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right] (x) \\ &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial n_y} K(x-y) \right] f(y) ds(y) + \int_\Gamma K(x-y) \frac{\partial f}{\partial n}(y) ds(y). \end{aligned} \quad (15)$$

ЛЕММА 6. Пусть $n \geq 3$. Для любой кусочно-гладкой функции f выполняется следующая оценка:

$$P_\mu Bf(x) = O(\mu^{k/2-1}), \quad \mu \geq 1,$$

равномерная на каждом компакте $K \subset \Omega_k(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из определения (15) и из лемм 4 и 5.

Напомним, что $\Gamma = \partial D$ является гладкой поверхностью. Очевидно, скачок функции Bf в какой-либо точке поверхности Γ равен скачку функции f в этой же точке. Более того, скачок нормальной производной $\frac{\partial}{\partial n} Bf(x)$ на Γ равен разности внутренней и внешней нормальной производной $\frac{\partial f}{\partial n}$.

Рассмотрим теперь функцию

$$F(x) = f(x) - Bf(x).$$

Исходя из изложенного выше, мы можем утверждать, что эта функция принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$. Следовательно, мы можем ввести следующий оператор:

$$Hf(x) = (1 - \Delta)(I - B)f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma. \quad (16)$$

ЛЕММА 7. Для любой кусочно-гладкой функции f функция Hf также является кусочно-гладкой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно доказать, что для любого натурального l функция Hf принадлежит классу Соболева $W_2^l(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$. Необходимая гладкость следует из свойств потенциалов двойного и простого слоя, и нужно убедиться лишь в том, что функция Hf и ее производные убывают на бесконечности достаточно быстро для того, чтобы обеспечить их принадлежность $L_2(\mathbb{R}^n)$. Остается заметить, что соответствующие оценки следуют непосредственно из определений (12) и (14) операторов B_1 и B_2 . Лемма 7 доказана.

Введем теперь в рассмотрение вспомогательный оператор G с помощью следующего равенства:

$$\widehat{Gf}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-1} \widehat{f}(\xi).$$

Ясно, что $G = (1 + A)^{-1}$, где A – самосопряженное расширение оператора $-\Delta$, и из определения (16) получаем

$$GHf(x) = (I - B)f(x).$$

Следовательно,

$$f(x) = Bf(x) + GHf(x),$$

или согласно лемме 7

$$f(x) = Bf(x) + Gf_1(x), \quad (17)$$

где функция f_1 является кусочно-гладкой.

ЛЕММА 8. *Для любой кусочно-гладкой функции f выполнено*

$$P_\mu f(x) = O(\mu^{k/2-1}), \quad \mu \geq 1, \quad (18)$$

равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega_k(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует такая постоянная $m > 0$, что для любой кусочно-гладкой функции f

$$P_\mu f(x) = O(\mu^m), \quad \mu \geq 1, \quad x \in K \subset \Omega_k(\Gamma). \quad (19)$$

В соответствии с представлением (17), в котором f_1 – некоторая кусочно-гладкая функция, выполняется равенство

$$P_\mu f(x) = P_\mu B(x) + P_\mu Gf_1(x).$$

Следовательно, согласно лемме 6

$$P_\mu f(x) = O(\mu^{k/2-1}) + \int_{|\xi|=\mu} e^{ix\xi} \frac{\widehat{f_1}(\xi)}{1 + |\xi|^2} d\xi = O(\mu^{k/2-1}) + \frac{1}{1 + \mu^2} P_\mu f_1(x).$$

Ранее мы предположили, что для любой кусочно-гладкой функции выполняется оценка (19), применяя которую, получаем

$$P_\mu f(x) = O(\mu^{k/2-1}) + O(\mu^{m-2}), \quad \mu \geq 1.$$

Повторив данные рассуждения необходимое число раз, получим требуемую оценку (18). Лемма 8 доказана.

Заметим, что каждая кусочно-гладкая функция принадлежит классу Никольского $H_2^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, классу Соболева $W_2^{2\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \alpha < 1/4$, откуда следует, что $A^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, где, напомним, A – самосопряженное расширение оператора $-\Delta$ (см., например, [1]).

ЛЕММА 9. *Пусть $0 \leq \alpha < 1/4$. Тогда для любой кусочно-гладкой функции f*

$$P_\mu A^\alpha f(x) = O(\mu^{2\alpha+k/2-1}) \quad (20)$$

равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega_k(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из спектральной теоремы

$$P_\mu A^\alpha f(x) = A^\alpha P_\mu f(x) = \mu^{2\alpha} P_\mu f(x)$$

и из леммы 8.

ЛЕММА 10. Пусть $n \geq 3$, $0 \leq \alpha < 1/4$. Тогда для любой кусочно-гладкой функции f средние Рисса порядка $s \geq 0$ разложения Фурье (1) функции $A^\alpha f$ удовлетворяют при $\lambda \rightarrow \infty$ следующему условию:

$$E_\lambda^s A^\alpha f(x) = A^\alpha f(x) + O(1)\lambda^{\alpha+(k/2-1-s)/2} + O(1)\lambda^{-s/2} + o(1), \quad (21)$$

равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega_k(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем, что оценка (21) может быть получена из (20) применением следующей тауберовой теоремы Хёрмандера (см. [15, теорема 2.7]).

ТЕОРЕМА (Л. Хёрмандер). Пусть функция φ с носителем на полупрямой $\mathbb{R}_+$ имеет локально ограниченную вариацию на этой полупрямой, и пусть $\varphi(t) = O(t^N)$ при $t \rightarrow \infty$ для некоторого N . Предположим, что

$$\varphi((t+h)^2) - \varphi(t^2) \leq (1+t)^a, \quad 0 < h < 1,$$

где $a \geq 0$, и предположим также, что преобразование Фурье–Лапласа

$$\Phi(\xi) = \int_0^\infty e^{-it\xi} d\varphi(t^2), \quad \text{Im } \xi < 0,$$

аналитически продолжается в окрестность $\{\xi : |\xi| < \delta\}$ точки 0 так, что

$$|\Phi(\xi)| \leq 1, \quad |\xi| < \delta, \quad \Phi^{(2k)}(0) = 0$$

для всех целых $k \geq 0$.

Если

$$\varphi^s(t) = \int_0^t \left(1 - \frac{u}{t}\right)^s d\varphi(u),$$

то для $s \geq 0$

$$|\varphi^s(t)| \leq C(s)t^{(a-s)/2}, \quad t \geq 1.$$

Применение этой теоремы предполагает, что разлагаемая функция обращается в нуль в некоторой окрестности рассматриваемой точки. Согласно условиям леммы 10 в окрестности каждой такой точки функция является гладкой, поэтому мы можем воспользоваться известными результатами о суммируемости спектральных разложений гладких функций (см., например, [1]) и свести задачу к случаю, когда спектральное разложение стремится к нулю на компакте K .

Обозначим

$$f_\alpha(x) = A^\alpha f(x), \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{4}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (22)$$

Функция $f_\alpha(x)$ имеет, очевидно, следующее разложение Фурье:

$$E_\lambda f_\alpha(x) = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|^2 < \lambda} |\xi|^{2\alpha} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (23)$$

Хорошо известно (см., например, [16]), что функция $f_\alpha(x)$ является гладкой вне поверхности Γ .

Фиксируем произвольный компакт $K \subset \Omega_k(\Gamma)$ и обозначим символом U такое открытое множество, что $K \subset U$ и $\overline{U} \subset \Omega_k(\Gamma)$. Пусть $f_*(x)$ — произвольная гладкая на $\mathbb{R}^n$ функция, удовлетворяющая на U условию

$$f_*(x) = f_\alpha(x), \quad x \in U,$$

и такая, что спектральное разложение $E_\lambda f_*(x)$ сходится к $f_*(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ равномерно на компактах.

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$\varphi(\lambda) = E_\lambda f_\alpha(x) - E_\lambda f_*(x). \quad (24)$$

Ее преобразование Фурье–Лапласа в полуплоскости $\text{Im } \xi < 0$ имеет следующий вид:

$$\Phi(\xi) = \int_0^\infty e^{-it\xi} d\varphi(t^2) = \int_0^\infty e^{-i\sqrt{t}\xi} d\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-i\sqrt{t}\xi} dE_t[f_\alpha(x) - f_*(x)].$$

Для произвольного δ , $0 < \delta < \pi/2$, обозначим

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \delta\}.$$

Тогда, применяя формулу Коши

$$\int_{\partial M} e^{-i\xi\sqrt{z}} \frac{dz}{z-t} = 2\pi i e^{-i\xi\sqrt{t}},$$

получим

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} e^{-i\xi\sqrt{z}} dz \int_0^\infty \frac{dE_t[f_\alpha(x) - f_*(x)]}{z-t} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} e^{-i\xi\sqrt{z}} G(z) [f_\alpha(x) - f_*(x)] dz, \end{aligned} \quad (25)$$

где $G(z) = (A - zI)^{-1}$ — резольвента оператора A .

Если $g(x) = 0$ на некотором открытом множестве U , то для любого компакта $K \subset U$

$$|G(z)g(x)| \leq C(K) e^{-c\sqrt{|z|}} \|g\|_{L(\Omega)}, \quad x \in K, \quad z \notin M.$$

Следовательно, интеграл (25) сходится абсолютно, является аналитической функцией в круге $\{\xi : |\xi| < c\}$ и для любого целого $k \geq 0$

$$\Phi^{(2k)}(0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} z^k G(z) [f_\alpha(x) - f_*(x)] dz = 0. \quad (26)$$

Оценим теперь приращение функции (24), для чего воспользуемся леммой 9 (напомним, что $\alpha < 1/4$):

$$\begin{aligned} \varphi((t+h)^2) - \varphi(t^2) &= \int_t^{t+h} P_\mu A^\alpha f(x) d\mu + O(1) \\ &= O(t^{2\alpha+k/2-1}) + O(1), \quad 0 < h \leq 1, \quad x \in K. \end{aligned} \quad (27)$$

Соотношения (26) и (27) означают, что функция (24) удовлетворяет всем условиям тауберовой теоремы Хёрмандера, согласно которой

$$\varphi^s(\lambda) = O(1)\lambda^{(2\alpha+k/2-1-s)/2} + O(1)\lambda^{-s/2}, \quad s \geq 0, \quad \lambda \geq 1,$$

равномерно по $x \in K$.

Поскольку разложение Фурье гладкой функции $f_*(x)$ сходится к $f_*(x) = f_\alpha(x)$ равномерно на компактах $K \subset U$, то из последней оценки и из определения (24) следует

$$E_\lambda^s f_\alpha(x) - f_\alpha(x) = O(1)\lambda^{(2\alpha+k/2-1-s)/2} + O(1)\lambda^{-s/2} + o(1),$$

где $s \geq 0, \lambda \rightarrow \infty$. Тем самым, доказательство леммы 10 завершено.

Доказанная лемма 10 является основной, так как из нее следуют сформулированные в начале данной статьи теоремы 1–3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим в оценке (21) $k = 1$ и $s = 0$. Тогда эта оценка примет следующий вид:

$$E_\lambda A^\alpha f(x) = A^\alpha f(x) + O(1)\lambda^{\alpha-1/4} + O(1) = O(1).$$

Ясно, что если разложение (1) функции (22) равномерно ограничено при некотором $\alpha_0 > 0$, то оно равномерно сходится при любом $\alpha < \alpha_0$. В частности, оно сходится и при $\alpha = 0$, откуда и следует утверждение теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $k \geq 2$ и $s = (k-2)/2$. Тогда из оценки (21) получим

$$E_\lambda^s A^\alpha f(x) = A^\alpha f(x) + O(1)\lambda^\alpha + o(1),$$

и при $\alpha = 0$ отсюда следует равномерная ограниченность средних Рисса порядка $s = (k-2)/2$ спектральных разложений кусочно-гладких функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $k \geq 2$ и $s > (k - 2)/2$. В этом случае мы можем положить в (21) $\alpha = 0$ и получить

$$E_{\lambda}^s f(x) = f(x) + o(1),$$

что и означает справедливость теоремы 3.

В качестве иллюстрации рассмотрим пример 1, приведенный в начале данной работы. Пусть $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = 1\}$. В этом случае $\Omega_1(\Gamma) = \Omega_0(\Gamma) = \mathbb{R}^n \setminus (\Gamma \cup \{x_0\})$, и согласно теореме 1 разложение (1) любой кусочно-гладкой функции, имеющей разрыв на сфере Γ , сходится равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^n \setminus (\Gamma \cup \{x_0\})$. Далее, поскольку $x_0 \in \Omega_{n-1}(\Gamma)$, то в соответствии с теоремами 2 и 3 средние Рисса порядка s разложения (1) при $s = (n - 3)/2$ ограничены, а при $s > (n - 3)/2$ сходятся в точке x_0 .

Отметим, что данный результат является точным, так как средние Рисса функции, равной 1 в шаре $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq 1\}$ и равной 0 вне данного шара, при $s = (n - 3)/2$ ограниченно расходятся.

В примере 2 поверхность Γ представляет собой тор и $\Omega_1(\Gamma) = \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. Поэтому, согласно теореме 1 разложение (1) любой кусочно-гладкой функции сходится равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$.

Наконец, в примере 3 две точки

$$a = \left(0, 0, -\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad -a = \left(0, 0, \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

расположенные внутри эллипсоида Γ , являются регулярными типа 2 относительно Γ , а все остальные точки из $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ являются регулярными типа 1 (а некоторые даже типа 0). Поэтому разложение (1) любой кусочно-гладкой функции с поверхностью разрыва Γ сходится равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus (\{a\} \cup \{-a\})$. В точках a и $-a$ разложение (1) ограничено, а его риссовские средние любого положительного порядка сходятся к разлагаемой функции.

Автор выражает искреннюю признательность профессору Института прикладной математики Боннского университета Серджио Альбеверио за полезное обсуждение результатов. Автор благодарит рецензента “Математических заметок” за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений, ч. I // УМН. 1976. V. 31. №6. P. 27–82; ч. II // УМН. 1977. V. 32. №1. P. 107–130.
- [2] Ильин В. А. Теорема о разложимости кусочно-гладкой функции в ряд по собственным функциям произвольной двумерной области // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. С. 442–445.
- [3] Pinsky M. A. Fourier inversion for piecewise smooth functions in several variables // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 118. P. 903–910.
- [4] Pinsky M., Taylor M. Pointwise Fourier inversion: a wave equation approach // J. Fourier Anal. Appl. 1997. V. 3. P. 647–703.
- [5] Попов Д. А. Сферическая сходимость ряда и интеграла Фурье индикатора двумерной области // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 354–373.
- [6] Brandolini L., Colzani L. Localization and convergence of eigenfunction expansions // J. Fourier Anal. Appl. 1999. V. 5. №5. P. 431–447.

- [7] Taylor M. Pointwise Fourier inversion on tori and other compact manifolds // J. Fourier Anal. Appl. 1999. V. 5. № 5. P. 449–463.
- [8] Taylor M. Eigenfunction expansions and the Pinsky phenomenon on compact manifolds // J. Fourier Anal. Appl. 2001. V. 7. № 5. P. 507–522.
- [9] Alimov Sh. A. On the eigenfunction expansion of a piecewise smooth function // J. Fourier Anal. Appl. 2003. V. 9. № 1. P. 67–76.
- [10] Маслов В. П. Свойства абсолютной сходимости многомерных рядов Фурье с точки зрения геометрии слабых разрывов разлагаемых функций // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191. № 2. С. 275–278.
- [11] Маслов В. П. О разложении функции, зависящей от параметра, в абсолютно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям псевдодифференциального оператора // УМН. 1970. Т. 25. № 1(151). С. 195–196.
- [12] Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
- [13] Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функцион. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 4. С. 3–25.
- [14] Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
- [15] Hörmander L. On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansion for elliptic differential operators // Lecture at the Belfer Graduate School. Preprint: Yeshiva University, 1966.
- [16] Алимов Ш. А. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 9. С. 1609–1626.

Ташкентский государственный университет, Узбекистан

Поступило

06.12.2004

Исправленный вариант

20.04.2005