Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Авдеева, В. А. Быковский, Уточнение теоремы Валена для базисов Минковского трехмерных решеток, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 163–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2689>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:22:29

УДК 511.36+511.37

УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВАЛЕНА ДЛЯ БАЗИСОВ МИНКОВСКОГО ТРЕХМЕРНЫХ РЕШЕТОК

М. О. Авдеева, В. А. Быковский

В статье уточняется аналог теоремы Валена для базисов Минковского трехмерных решеток.

Библиография: 7 названий.

Введение. Напомним, что $GL_s(\mathbb{R})$, $s = 2, 3, \dots$, есть мультипликативная группа невырожденных $(s \times s)$ -матриц с вещественными элементами и $GL_s(\mathbb{Z})$ – ее дискретная подгруппа, состоящая из матриц с целочисленными элементами и определителем ± 1 .

Любую полную решетку в $\mathbb{R}^s$ (для краткости в дальнейшем слово “полная” будем опускать) можно записать в виде

$$\Gamma(M) = \{\gamma = m_1\gamma^{(1)} + \dots + m_s\gamma^{(s)} \mid m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}\},$$

где $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(s)}$ – базисные узлы, составленные из соответствующих столбцов некоторой матрицы $M \in GL_s(\mathbb{R})$. При этом $\Gamma(M) = \Gamma(M')$ тогда и только тогда, когда $M' = M \cdot S$, где $S \in GL_s(\mathbb{Z})$.

Обозначим через $\mathcal{L}_s(\mathbb{R})$ множество всех решеток в $\mathbb{R}^s$, а через $\mathcal{L}_s^*(\mathbb{R})$ его подмножество, состоящее из решеток “общего положения”, у которых на координатных гиперплоскостях отсутствуют узлы решетки за исключением начала координат.

Далее, G_s есть конечная группа, действующая на $GL_s(\mathbb{R})$, которая порождена преобразованиями следующего вида:

- а) изменение знака у строки или столбца;
- б) перестановка местами строк или столбцов.

Назовем две матрицы из $GL_s(\mathbb{R})$ *эквивалентными*, если одна получается из другой с помощью некоторого преобразования из G_s .

Рассмотрим двумерный случай ($s = 2$). Пусть $\{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}\}$ – базис решетки Γ из $\mathcal{L}_2^*(\mathbb{R})$, для которого не существует ненулевых узлов $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ из Γ с

$$|\gamma_1| < \max\{|\gamma_1^{(1)}|, |\gamma_1^{(2)}|\}, \quad |\gamma_2| < \max\{|\gamma_2^{(1)}|, |\gamma_2^{(2)}|\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-97000, и фонда INTAS, грант № 03-51-5070.

Вороной [1] доказал, что это имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого преобразования Φ из G_2 выполнено

$$\Phi \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(2)} \end{pmatrix} = M = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq y_1 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2 \leq y_2. \quad (0.1)$$

Так как узлы линейно независимые, то всегда $x_1 > 0$ и $y_2 > 0$. В связи с этим назовем базис $\{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}\}$ произвольной решетки Γ из $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ (а не только из $\mathcal{L}_2^*(\mathbb{R})$!) *базисом Вороного*, если соответствующая ему матрица эквивалентна матрице M вида (0.1).

Заметим, что для таких матриц M

$$\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\det(M)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1} = 1 - \frac{(x_1 - y_1)(y_2 - x_2)}{x_1 y_2 + x_2 y_1} \leq 1.$$

Поэтому для любого базиса Вороного выполняется неравенство

$$|\gamma_1^{(1)} \cdot \gamma_2^{(1)}| + |\gamma_1^{(2)} \cdot \gamma_2^{(2)}| \leq \det(\Gamma) = \det(M), \quad (0.2)$$

которое превращается в равенство при $x_1 = y_1$ или $x_2 = y_2$. Из него следует, что

$$|\gamma_1 \gamma_2| \leq \det(\Gamma) \quad (0.3)$$

для любого узла, входящего в базис Вороного. Кроме того,

$$\min\{|\gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(1)}|, |\gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(2)}|\} \leq \frac{1}{2} \det(\Gamma). \quad (0.4)$$

Сопоставим $\alpha \in (0, 1/2)$ решетку

$$\Gamma_\alpha = \{(\alpha n + m, n) = n(\alpha, 1) + m(1, 0) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Для нее $\det(\Gamma_\alpha) = 1$, и по теореме Лагранжа о наилучших приближениях любой базис Вороного Γ_α состоит из пар узлов

$$\pm(\alpha Q_i - P_i, Q_i), \quad \pm(\alpha Q_{i+1} - P_{i+1}, Q_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

При этом $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$, а для $i \geq 1$ числа P_i и Q_i суть соответственно числитель и знаменатель i -й подходящей несократимой дроби

$$\frac{P_i}{Q_i} = [t_0; t_1, \dots, t_{i-1}]$$

(с натуральным Q_i) к $\alpha = [t_0; t_1, \dots, t_i, \dots]$. Здесь t_0 целое (целая часть α), а $t_1, \dots, t_i, \dots$ натуральные (неполные частные). Для нашего случая согласно (0.3) и (0.4) имеем

$$Q_i |\alpha Q_i - P_i| \leq 1, \quad \min\{Q_i |\alpha Q_i - P_i|, Q_{i+1} |\alpha Q_{i+1} - P_{i+1}|\} \leq \frac{1}{2}.$$

Эти неравенства хорошо известны в теории цепных дробей (см. [2] и [3]). Второе из них обычно называют теоремой Валена. В соответствии с (0.2) ее можно уточнить в следующем виде:

$$Q_i |\alpha Q_i - P_i| + Q_{i+1} |\alpha Q_{i+1} - P_{i+1}| \leq 1.$$

В работах [4] и [5] неравенства типа (0.3) и (0.4) были доказаны для базисов Минковского трехмерных решеток (соответствующее обобщение базисов Вороного двумерных решеток). Для последних в настоящей работе доказывается аналог оценки (0.2). Тем самым, уточняются соответствующие результаты из [4] и [5].

1. Базисы Минковского. Назовем базис $\{\gamma, \gamma', \gamma''\}$ решетки Γ из $\mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ *базисом Минковского*, если соответствующая ему матрица эквивалентна одной из матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & -z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & -z_1 \\ x_2 & y_2 & -z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

с неотрицательными x_i, y_i, z_i , у которых

- (i) $\max\{x_1, z_1\} \leq y_1, \max\{y_2, z_2\} \leq x_2, \max\{x_3, y_3\} \leq z_3$;
- (ii) для матриц первого вида выполняется по крайней мере одно из неравенств $z_1 \leq x_1, y_2 \leq z_2$;
- (iii) для матриц второго вида выполняются неравенства $y_3 \leq x_3, x_2 \leq y_2 + z_2$.

Для решеток “общего положения” из $\mathcal{L}_3^*(\mathbb{R})$ Минковский [6] установил, что такие базисы однозначно характеризуются следующим свойством: не существует ненулевого узла η решетки Γ , для которого

$$|\eta_i| < \max\{|\gamma_i|, |\gamma'_i|, |\gamma''_i|\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Этот результат служит мотивировкой для введенного нами понятия “базис Минковского”.

Следуя Вороному [1], назовем ненулевой узел γ произвольной решетки Γ из $\mathcal{L}_3(\mathbb{R})$ *относительным минимумом*, если не существует ненулевого узла η из Γ , для которого

$$|\eta_i| \leq |\gamma_i| \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^3 |\eta_i| < \sum_{i=1}^3 |\gamma_i|.$$

Второе условие означает, что хотя бы по одной координате i выполняется строгое неравенство $|\eta_i| < |\gamma_i|$.

Очевидно, что для решеток Γ из $\mathcal{L}_3^*(\mathbb{R})$ каждый узел базиса Минковского для Γ является относительным минимумом. Более того, любые два узла $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ из такого базиса будут *смежными* в том смысле, что не существует ненулевого узла η из Γ , для которого

$$|\eta_i| < \max\{|\gamma_i^{(1)}|, |\gamma_i^{(2)}|\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Отметим также следующее. Для любого относительного минимума γ решетки из $\mathcal{L}_3^*(\mathbb{R})$ можно найти, по крайней мере, три смежных с ним $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$, для которых $\gamma^{(i)} \neq \pm \gamma^{(j)}, 1 \leq i < j \leq 3$. Кроме того, любые два смежных относительных минимума можно дополнить третьим до базиса Минковского (по этому поводу см. [7]).

2. Уточнение теоремы Валена. Прежде всего отметим, что из теоремы Минковского о симметричном выпуклом теле немедленно следует оценка

$$|\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3| \leq \det(\Gamma) \quad (2.1)$$

для любого относительного минимума $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ трехмерной решетки Γ из $\mathcal{L}_3(\mathbb{R})$. Ранее это неравенство было доказано Вороним [1] другим, более сложным методом для

решеток Γ из $\mathcal{L}_3^*(\mathbb{R})$. В работе [4] для смежных относительных минимумов γ и γ' было показано, что

$$\min\{|\gamma_1\gamma_2\gamma_3|, |\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3|\} \leq \frac{1}{2} \det(\Gamma). \quad (2.2)$$

И, наконец, в [5] доказана оценка

$$\min\{|\gamma_1\gamma_2\gamma_3|, |\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3|, |\gamma''_1\gamma''_2\gamma''_3|\} \leq \frac{1}{3} \det(\Gamma) \quad (2.3)$$

для узлов $\gamma, \gamma', \gamma''$, составляющих базис Минковского. Оценки (2.1), (2.2) и (2.3) не-улучшаемы в том смысле, что константы 1, $1/2$ и $1/3$ нельзя заменить на меньшие.

Мы уточняем оценку (2.3) в следующем виде.

ТЕОРЕМА. Пусть узлы $\gamma, \gamma', \gamma''$ составляют базис Минковского произвольной решетки Γ из $\mathcal{L}_3(\mathbb{R})$. Тогда

$$|\gamma_1\gamma_2\gamma_3| + |\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3| + |\gamma''_1\gamma''_2\gamma''_3| \leq \det(\Gamma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – матрица, столбцы которой составлены из соответствующих координат узлов базиса $\{\gamma, \gamma', \gamma''\}$. Определим на $GL_3(\mathbb{R})$ функцию Δ , положив

$$\Delta(M) = |\det(M)| - |\gamma_1\gamma_2\gamma_3| - |\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3| - |\gamma''_1\gamma''_2\gamma''_3|.$$

Легко заметить, что под действием преобразований из G_3 величина $\Delta(M)$ не меняется. Поэтому интересующую нас оценку $\Delta(M) \geq 0$ достаточно доказать для базисов, матрицы которых имеют вид (1.1).

Сначала рассмотрим случай, когда матрица M имеет первый вид из (1.1). Зафиксируем все переменные за исключением x_3 и y_3 . Функция

$$\begin{aligned} \Delta(M; x_3, y_3) &= \Delta(M) \\ &= x_3(y_1z_2 - y_2z_1 - x_1x_2) + y_3(x_1z_2 + x_2z_1 - y_1y_2) + z_3(x_1y_2 + x_2y_1 - z_1z_2) \end{aligned}$$

линейно зависит от переменных x_3, y_3 , которые независимо пробегают отрезок $[0, z_3]$. Поэтому неотрицательность $\Delta(M)$ достаточно доказать в четырех случаях:

$$(x_3, y_3) \in \{(0, 0), (0, z_3), (z_3, 0), (z_3, z_3)\}.$$

В случае $x_3 = y_3 = 0$ в соответствии с условием (i)

$$\Delta(M) = z_3(x_1y_2 + x_2y_1 - z_1z_2) \geq z_3(x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_1) \geq 0.$$

Пусть $x_3 = 0$ и $y_3 = z_3$. Тогда по той же причине

$$\begin{aligned} \Delta(M) &= z_3(x_1z_2 + x_2z_1 - y_1y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - z_1z_2) \\ &= z_3(x_1z_2 + x_1y_2 + z_1(x_2 - z_2) + y_1(x_2 - y_2)) \geq 0. \end{aligned}$$

Для $x_3 = z_3$ и $y_3 = 0$

$$\Delta(M) = z_3(y_1z_2 - y_2z_1 - x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - z_1z_2).$$

В соответствии с (i) и (ii) имеем

1) при $x_1 \geq z_1$

$$\Delta(M) = z_3(y_2(x_1 - z_1) + x_2(y_1 - x_1) + z_2(y_1 - z_1)) \geq 0;$$

2) при $z_2 \geq y_2$ (с учетом $x_2 \geq y_2$)

$$\Delta(M) \geq z_3(y_2(x_1 - z_1) + y_2(y_1 - x_1) + y_2(y_1 - z_1)) = 2z_3y_2(y_1 - z_1) \geq 0.$$

Осталось рассмотреть последний случай $x_3 = y_3 = z_3$. При этом

$$\Delta(M) = z_3(y_1z_2 - y_2z_1 - x_1x_2 + x_1z_2 + x_2z_1 - y_1y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - z_1z_2).$$

Рассмотрим два подслучая: $z_1 \leq x_1$ и $y_2 \leq z_2$.

Пусть $z_1 \leq x_1$. Рассматривая $\Delta(M)$ как линейную функцию от x_1 , проверим ее неотрицательность в крайних точках $x_1 = z_1$ и $x_1 = y_1$. В первом случае ($x_1 = z_1$)

$$\Delta(M) = z_3(y_1z_2 + x_2y_1 - y_1y_2) \geq 0,$$

и во втором ($x_1 = y_1$)

$$\Delta(M) = z_3(z_2(y_1 - z_1) + z_1(x_2 - y_2) + y_1z_2) \geq 0.$$

Следовательно, $\Delta(M) \geq 0$ при любых x_1 из отрезка $[z_1, y_1]$.

Пусть $y_2 \leq z_2$. Действуя аналогичным способом, получим

1) при $z_2 = y_2$

$$\begin{aligned} \Delta(M) &= z_3(2y_2(x_1 - z_1) + x_2(-x_1 + z_1 + y_1)) \\ &\geq z_3(2y_2(x_1 - z_1) + y_2(-x_1 + z_1 + y_1)) = z_3y_2(x_1 + y_1 - z_1) \geq 0; \end{aligned}$$

2) при $z_2 = x_2$, поскольку $y_2 \leq x_2$ и $z_1 \leq y_1$, имеем

$$\Delta(M) = z_3(2x_2y_1 - y_2z_1 - y_1y_2 + x_1y_2) \geq 0.$$

Значит, $\Delta(M) \geq 0$ при любом z_2 из отрезка $[y_2, x_2]$. Итак, для матриц первого вида неотрицательность $\Delta(M)$ доказана.

Докажем неотрицательность $\Delta(M)$ для матриц второго вида из (1.1). Зафиксируем все переменные за исключением x_1 и z_1 . Тогда

$$\Delta(M) = x_1(y_2z_3 + y_3z_2 - x_2x_3) + y_1(x_2z_3 + x_3z_2 - y_2y_3) + z_1(x_3y_2 - x_2y_3 - z_2z_3)$$

есть линейная по x_1 и z_1 функция. Достаточно доказать ее неотрицательность для

$$(x_1, z_1) \in \{(0, 0), (0, y_1), (y_1, 0), (y_1, y_1)\}.$$

Поскольку $x_2 \geq y_2$ и $z_3 \geq y_3$, то при $x_1 = z_1 = 0$

$$\Delta(M) = y_1(x_2z_3 + x_3z_2 - y_2y_3) \geq 0.$$

Принимая во внимание еще два неравенства $x_3 \geq y_3$ и $x_2 \geq z_2$, при $x_1 = 0$ и $z_1 = y_1$ получим

$$\begin{aligned}\Delta(M) &= y_1(x_2z_3 + x_3z_2 - y_2y_3 + x_3y_2 - x_2y_3 - z_2z_3) \\ &\geq y_1(x_2z_3 + y_3z_2 - y_2y_3 + x_3y_2 - x_2y_3 - z_2z_3) \\ &= y_1((x_2 - z_2)(z_3 - y_3) + y_2(x_3 - y_3)) \geq 0.\end{aligned}$$

Так как $z_3 \geq x_3$ и $z_3 \geq y_3$, то при $x_1 = y_1$ и $z_1 = 0$

$$\Delta(M) = y_1(y_3z_2 + x_3z_2 + y_2(z_3 - y_3) + x_2(z_3 - x_3)) \geq 0.$$

Осталось рассмотреть вариант с $x_1 = z_1 = y_1$. При этом

$$\Delta(M) = y_1(y_2z_3 + y_3z_2 - x_2x_3 + x_2z_3 + x_3z_2 - y_2y_3 + x_3y_2 - x_2y_3 - z_2z_3)$$

есть линейная функция по x_3 . Достаточно проверить ее неотрицательность в точках $x_3 = y_3$ и $x_3 = z_3$.

Пусть $x_3 = y_3$. Тогда ввиду $z_3 \geq y_3$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta(M) &= y_1(y_2z_3 + y_3z_2 - x_2y_3 + x_2z_3 + y_3z_2 - x_2y_3 - z_2z_3) \\ &\geq y_1(y_2y_3 + y_3z_2 - x_2y_3 + x_2z_3 - x_2y_3 + y_3z_2 - z_2z_3) \\ &= y_1(y_3(y_2 + z_2 - x_2) + (z_3 - y_3)(x_2 - z_2)).\end{aligned}$$

Поскольку $z_3 \geq y_3$, $x_2 \geq z_2$ и согласно (iii) $y_2 + z_2 \geq x_2$, то $\Delta(M) \geq 0$.

Пусть $x_3 = z_3$. Тогда ввиду $z_3 \geq y_3$ и $y_2 + z_2 \geq x_2$ находим

$$\begin{aligned}\Delta(M) &= y_1(y_2z_3 + y_3z_2 - y_2y_3 + y_2z_3 - x_2y_3) \\ &\geq y_1(y_2y_3 + y_3z_2 - y_2y_3 + y_2z_3 - x_2y_3) \\ &= y_1(y_3(y_2 + z_2 - x_2) + y_2(z_3 - y_3)) \geq 0.\end{aligned}$$

Все случаи рассмотрены и теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 1. Киев, 1952.
- [2] Хинчин А. Я. Цепные дроби. М., 1978.
- [3] Касселс Дж. В. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1995.
- [4] Быковский В. А. Теорема Валена для двумерных подходящих дробей // Матем. заметки. 1999. Т. 66. №1. С. 30–37.
- [5] Авдеева М. О., Быковский В. А. Аналог теоремы Валена для совместных приближений пары чисел // Матем. сб. 2003. Т. 194. №7. С. 4–14.
- [6] Minkowski H. Généralisation de la théorie des fractions continues // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). 1896. V. 13. №2. P. 41–60.
- [7] Быковский В. А., Горкуша О. А. Минимальные базисы трехмерных решеток // Матем. сб. 2001. Т. 192. №2. С. 57–66.

(М.О. Авдеева) Хабаровский государственный педагогический университет
(М.О. Авдеева, В.А. Быковский) Институт прикладной математики
ДВО РАН, Хабаровское отделение
E-mail: mariya@iam.khv.ru, vab@iam.khv.ru

Поступило
21.04.2004