Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гласко, Мера упорядоченности в статистических системах, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 350–361

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm269>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:16:39

УДК 517

МЕРА УПОРЯДОЧЕННОСТИ В СТАТИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А. В. Гласко

Определяется феноменологическая мера упорядоченности в статистических системах. На основе этой меры строится формальная модель системы, развивающейся с ростом управляющего параметра по закону наибо́льшего роста порядка.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Известно [1]–[3], что некоторые физические системы обладают способностью переходить из неупорядоченного состояния в упорядоченное в результате изменения некоторого параметра. Классическим примером такой системы может служить ферромагнетик [4], [1]: при температурах

$$T \geq T_c,$$

где T_c – температура Кюри, спины различных атомов ферромагнетика ориентированы хаотически; по мере же уменьшения температуры спины выстраиваются в одном (спонтанно выбранном) направлении и в пределе при $T/T_c \rightarrow 0$ образец превращается в монодомен. В настоящей работе развивается математическая схема описания процессов упорядочения (самоорганизации) в статистических системах. Основным математическим объектом этой схемы является мера упорядоченности в системе. В настоящее время известно несколько различных определений меры упорядоченности [5], [3], [6], [7]. Основываясь на двух физических моделях: фазового перехода 1-го рода (кристаллизация) и фазового перехода 2-го рода (возникновение спонтанной намагниченности), мы вводим новое, феноменологическое, определение меры упорядоченности. Эта мера позволяет построить формальную модель системы, развивающейся с ростом управляющего параметра по закону наибо́льшего роста порядка.

2. Определение меры упорядоченности. Рассмотрим для простоты одномерную кристаллическую решетку с периодом a . При температурах больших абсолютно ну́ля ($T > 0$) решетка неидеальна: в ней присутствуют дефекты и фононы [8]. Будем описывать состояние решетки плотностью вероятности $y(x)$ отклонения x случайно выбранного атома от соответствующего ему узла. При $T = 0$ решетка идеальна (в рамках классического описания) и каждый атом находится в соответствующем ему узле: $y(x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$ – δ -функция Дирака. Это наиболее упорядоченное состояние решетки. Напротив, в точке плавления ($T = T_0$) кристаллическая структура полностью отсутствует и атом с одинаковой вероятностью можно обнаружить в любой точке из

интервала $x \in (-a, a)$: $y(x) = y_0(x) \equiv 1/2a$. Это состояние решетки наиболее хаотично.

Обозначим через $\theta(y)$ меру упорядоченности в состоянии y и шкалируем ее так, что

$$\theta(y_0) = 0, \quad \theta(\delta) = 1. \quad (1)$$

При температурах $T \in (0, T_0)$ естественно определить меру упорядоченности как меру близости состояния системы к наиболее упорядоченному состоянию:

$$\theta(y) = 1 - C\rho^2(y, \delta), \quad (2)$$

где ρ – метрика на $\{y\}$, C – нормировочный множитель. Правая часть в (2) построена так, что автоматически выполняется второе условие в (1). Множитель C определим из первого условия:

$$C = \frac{1}{\rho^2(y_0, \delta)}. \quad (3)$$

Определение (2) нетрудно обобщить на другие системы. Рассмотрим, например, модель изотропного ферромагнетика [4], [1]. Каждый атом охарактеризуем классическим спином (магнитным моментом) $\mathbf{s}$. В точке Кюри ($T = T_c$) спины различных атомов ориентированы хаотически. При $T \rightarrow 0$ спины выстраиваются в одном направлении, которое мы примем за направление оси z . Будем описывать состояние системы спинов плотностью вероятности $y(\theta)$ ориентации случайно выбранного спина под углом θ к оси z . В этом случае наиболее хаотичному состоянию (при $T = T_c$) соответствует равномерное распределение: $y(\theta) = 1/2\pi$, а наиболее упорядоченному (при $T = 0$) – δ -функция: $y(\theta) = \delta(\theta)$. Меру упорядоченности в промежуточных состояниях (при $T \in (0, T_c)$) определим формулой (2).

В общем случае меру упорядоченности (2) будем рассматривать как характеристику плотности вероятности $y(x)$ некоторой непрерывно распределенной на интервале $(-a, a)$ случайной величины x .

Перейдем теперь к конкретизации метрики ρ . Если бы δ -функция была функцией в обычном смысле, то в качестве ρ было бы естественно использовать гильбертову метрику. Однако поскольку $\delta(x)$ – обобщенная функция, этот выбор сразу приводит к расходимостям (по причине нелинейности гильбертовой метрики). С другой стороны, плотность $y(x)$ можно рассматривать [9] как регулярную обобщенную функцию, определенную на множестве основных функций $\Phi = \Phi(-a, a)$:

$$(y, \varphi) = \int_{-a}^a y(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \Phi. \quad (4)$$

При этом в качестве ρ можно взять гильбертову метрику на множестве обобщенных функций. Обобщенная функция – есть линейный непрерывный функционал, поэтому в качестве последней следует использовать гильбертову метрику на множестве функционалов, т.е. так называемую метрику множества функций с интегрируемым квадратом L_2 [10]:

$$\rho(f_1, f_2) = \sqrt{\int_{\Phi} (f_1(\varphi) - f_2(\varphi))^2 d\mu}, \quad f_1, f_2 \in L_2. \quad (5)$$

Эта метрика отличается от обычной гильбертовой тем, что фигурирующий в ее определении интеграл есть интеграл Лебега по некоторой мере μ на множестве Φ . В нашем случае

$$f_1(\varphi) = (y, \varphi), \quad f_2(\varphi) = (\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad (6)$$

поэтому

$$\rho(y, \delta) = \sqrt{\int_{\Phi} ((y, \varphi) - \varphi(0))^2 d\mu}.$$

Итак окончательно определим меру упорядоченности в виде

$$\theta(y) = 1 - C \int_{\Phi} \left(\int_{-a}^a y(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right)^2 d\mu. \quad (7)$$

Меру μ выберем так, чтобы она обращалась в нуль только на конечных или счетных множествах (смысл этого требования будет ясен при исследовании свойств меры упорядоченности в разделе 3). Множитель C в соответствии с (3) равен

$$C = \left[\int_{\Phi} \left(\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \varphi(x) dx - \varphi(0) \right)^2 d\mu \right]^{-1} = \left[\int_{\Phi} (\langle \varphi(x) \rangle_{y_0} - \varphi(0))^2 d\mu \right]^{-1}, \quad (8)$$

где $\langle \varphi \rangle_{y_0}$ – среднее значение функции $\varphi(x)$ по равномерному распределению y_0 .

Отметим, что определение (7) неоднозначно: конкретная мера упорядоченности зависит от выбора меры множества основных функций, т.е. $\theta(y) = \theta_{\mu}(y)$.

3. Свойства меры упорядоченности. Свойства меры упорядоченности в основном определяются общим аксиоматическим определением метрики и свойствами метрики (5).

ЛЕММА 1. Мера упорядоченности в системе, характеризуемой равномерным распределением равна нулю: $\theta(y_0) = 0$.

Это свойство очевидно из (7), (8).

ЛЕММА 2. $\theta(y) \leq 1$, причем $\theta(y) = 1 \iff y(x) = \delta(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функционал под знаком интеграла Лебега в (7) неотрицателен на всей области интегрирования, то и сам интеграл неотрицателен. Поскольку, кроме того, $C > 0$ в соответствии с (8), то $\theta(y) \leq 1$. Далее, если $y(x) = \delta(x)$, то, как очевидно из (7), $\theta(y) = 1$. Покажем, что справедливо и обратное. Действительно, из свойств интеграла Лебега следует, что $\theta(y) = 1$ только в том случае, если функционалы (6) совпадают почти везде. Но так как эти функционалы являются обобщенными функциями, а следовательно, непрерывны, они не могут совпадать почти везде, не совпадая везде на Φ в виду того, что мера μ обращается в нуль только на конечных или счетных множествах. Из последнего следует, что $\theta(y) = 1$ только в том случае, если $f_1(\varphi) \equiv f_2(\varphi)$, т.е. $y(x) = \delta(x)$.

ЛЕММА 3. Функция $y(x) = \delta(x)$ является и при том единственной функцией, доставляющей относительный экстремум функционалу $\theta(y)$. Этот экстремум – максимум.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем в три этапа.

1) *Необходимое условие экстремума.* Вычислив вариацию от обеих частей равенства (7), получим

$$\delta \theta(y) = -2C \int_{\Phi} \left(\int_{-a}^a y(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right) \int_{-a}^a \varphi(\xi) \delta y(\xi) d\xi d\mu. \quad (9)$$

При $y(x) = \delta(x)$ функционал под знаком интеграла Лебега тождественно равен нулю, в силу чего $\delta \theta(\delta) = 0$ для любой вариации δy .

2) *Достаточное условие экстремума.* Вычислив вторую вариацию, найдем

$$\delta^2 \theta = -2C \int_{\Phi} \left(\int_{-a}^a \varphi(x) \delta y(x) dx \right)^2 d\mu.$$

Так как функционал под знаком интеграла Лебега больше или равен нулю, причем может быть тождественно ($\forall \varphi \in \Phi$) равен нулю, очевидно, только в случае, если $\delta y(x) \equiv 0$, и так как $C > 0$ (см. (3), (8)), то

$$\delta^2 \theta < 0$$

при любых ненулевых вариациях δy . Следовательно, функция $y(x) = \delta(x)$ доставляет функционалу $\theta(y)$ относительный экстремум, причем – максимум.

3) *Единственность экстремума.* Покажем, что функция $y(x) = \delta(x)$ – единственная функция, удовлетворяющая необходимому условию экстремума.

Пусть для некоторой функции $y(x)$ имеет место равенство $\delta \theta(y) = 0 \quad \forall \delta y$. Вводя обозначение

$$F(\varphi) = \int_{-a}^a y(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \quad (10)$$

и меняя последовательность интегрирования в (9) с учетом того, что $C \neq 0$, имеем

$$\int_{-a}^a \delta y(x) dx \int_{\Phi} F(\varphi) \varphi(x) d\mu = 0 \quad \forall \delta y(x).$$

В силу произвольности вариации это возможно, только если

$$\int_{\Phi} F(\varphi) \varphi(x) d\mu \equiv 0. \quad (11)$$

Вычислим теперь $\rho^2(y, \delta)$. В соответствии с (5) и (10)

$$\begin{aligned} \rho^2(y, \delta) &= \int_{\Phi} F^2(\varphi) d\mu = \int_{\Phi} F(\varphi) d\mu \int_{-a}^a (y(x) - \delta(x)) \varphi(x) dx \\ &= \int_{-a}^a (y(x) - \delta(x)) dx \int_{\Phi} F(\varphi) \varphi(x) d\mu. \end{aligned}$$

Но в силу (11) внутренний интеграл в последнем выражении тождественно равен нулю, из чего следует, что $\rho^2(y, \delta) = 0$, а значит, и $\rho(y, \delta) = 0$. На основании аксиоматического определения метрики заключаем, что $y(x) = \delta(x)$. Итак, предполагая, что некоторая функция $y(x)$ удовлетворяет необходимому условию экстремума меры упорядоченности, мы пришли к выводу, что эта функция – δ -функция. Таким образом, δ -функция – единственная функция, удовлетворяющая необходимому условию экстремума, а значит, единственная функция, доставляющая экстремум функционалу меры упорядоченности.

4. Модельное уравнение. В начале работы мы привели примеры двух физических систем, переходящих из хаотического состояния в упорядоченное при изменении температуры в некотором интервале. Вообще говоря, параметр, управляющий самоорганизацией, – не обязательно температура (см. [1]). В общем случае будем рассматривать состояние статистической системы в зависимости от (управляющего) параметра τ : $y = y(x, \tau)$. Пусть при $\tau = 0$ система хаотична, т.е. описывается равномерным распределением:

$$y(x, 0) = y_0 = \frac{1}{2a}. \quad (12)$$

С ростом τ система упорядочивается. Можно предположить тот или иной закон упорядочения системы. Построим модель системы, которая развивается с ростом τ *по закону наибо́льшего роста порядка*. Для этого потребуем, чтобы при любом τ изменение функции $y(x, \tau)$ в функциональном пространстве $\{y(x)\}$ происходило в направлении вектора градиента меры упорядоченности $\delta\theta/\delta y$, т.е.

$$\Delta y = y(x, \tau + \Delta\tau) - y(x, \tau) = \lambda(\tau) \frac{\delta\theta}{\delta y} \Delta\tau + o(\Delta\tau)$$

или

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \lambda(\tau) \frac{\delta\theta}{\delta y}, \quad \lambda(\tau) \geq 0, \quad (13)$$

где $\lambda(\tau)$ – некоторая вещественная функция. Неотрицательность этой функции выражает требование роста (а не уменьшения) меры упорядоченности системы с ростом τ . В дальнейшем мы будем также предполагать, что функция $\lambda(\tau)$ интегрируема на полуинтервале $[0, +\infty)$.

Запишем модельное уравнение (13) в развернутом виде. Подставляя (7) в (13), после несложных преобразований получим

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = k\lambda(\tau)K(x, 0) - k\lambda(\tau) \int_{-a}^a K(x, \xi)y(\xi) d\xi, \quad (14)$$

где

$$k = 2C, \quad (15)$$

$$K(x_1, x_2) = \int_{\Phi} \varphi(x_1)\varphi(x_2) d\mu. \quad (16)$$

Таким образом, модельное уравнение (13) представляет собой линейное неоднородное интегро-дифференциальное уравнение с интегральным оператором типа Фредгольма [11]:

$$(\hat{K}\psi)(x) = \int_{-a}^a K(x, \xi)\psi(\xi) d\xi. \quad (17)$$

Отметим, что ядро этого оператора $K(x_1, x_2)$, так же как и мера упорядоченности $\theta(y)$, определено неоднозначно, ибо является функцией меры множества Φ (см. (16)): $K(x_1, x_2) = K_\mu(x_1, x_2)$. Выберем меру μ так, чтобы ядро было непрерывно по обоим аргументам на сегменте $[-a, a]$ (предполагается, что последнее требование не противоречит аксиоматическому определению меры).

В операторной форме записи уравнение (14) имеет вид

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = k\lambda(\tau)\hat{K}(\delta - y). \quad (18)$$

Отметим, что поскольку $y(x)$ — это плотность вероятности, мы должны потребовать, чтобы решение начальной задачи (18), (12) удовлетворяло условию нормировки

$$\int_{-a}^a y(x, \tau) dx \equiv 1. \quad (19)$$

Этого можно добиться, предъявляя соответствующее требование к ядру $K(x_1, x_2)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $K(x_1, x_2)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-a}^a K(x_1, x_2) dx_1 \equiv 1. \quad (20)$$

Тогда решение начальной задачи (18), (12) нормировано к единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проинтегрировав по переменной x обе части уравнения (14), получим

$$\frac{d}{d\tau} \int_{-a}^a y(x, \tau) dx = k\lambda(\tau) \int_{-a}^a K(x, 0) dx - k\lambda(\tau) \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a K(x, \xi) dx \right) y(\xi) d\xi.$$

В случае выполнения условия (20) это равенство принимает вид

$$\frac{d}{d\tau} \int_{-a}^a y(x, \tau) dx = k\lambda(\tau) - k\lambda(\tau) \int_{-a}^a y(x, \tau) dx.$$

Вводя обозначение

$$f(\tau) = \int_{-a}^a y(x, \tau) dx,$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f(\tau)$:

$$\frac{df}{d\tau} = k\lambda(\tau)(1 - f).$$

Его общее решение имеет вид

$$f(\tau) = 1 - Ae^{k \int_0^\tau \lambda(t) dt}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Из начального условия (12) видим, что $f(0) = 1$. Соответствующее частное решение: $f(\tau) \equiv 1$. Таким образом, мы пришли к равенству (19).

В дальнейшем будем называть тождество (20) *достаточным условием нормировки* и предполагать его выполнение за счет соответствующего выбора меры μ в (7), (16).

Отметим теперь *основные свойства ядра* $K(x_1, x_2)$.

ЛЕММА 4. Ядро симметрично: $K(x_1, x_2) = K(x_2, x_1)$.

Это свойство очевидно из определения (16).

ЛЕММА 5. Ядро положительно определено [9]: $(\hat{K}\psi, \psi) \geq 0$, $\psi \in L_2[-a, a]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя выражение (16) в (17) и меняя порядок интегрирования, получим

$$(\hat{K}\psi)(x_1) = \int_{\Phi} \varphi(x_1) d\mu \int_{-a}^a \psi(x_2) \varphi(x_2) dx_2.$$

Следовательно,

$$(\hat{K}\psi, \psi) = \int_{-a}^a (\hat{K}\psi)(x_1) \psi(x_1) dx_1 = \int_{-a}^a \psi(x_1) dx_1 \int_{\Phi} \varphi(x_1) d\mu \int_{-a}^a \psi(x_2) \varphi(x_2) dx_2.$$

После изменения порядка интегрирования в последнем выражении, имеем

$$(\hat{K}\psi, \psi) = \int_{\Phi} \left(\int_{-a}^a \psi(x) \varphi(x) dx \right)^2 d\mu = \int_{\Phi} (\varphi, \psi)^2 d\mu \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 6. Ядро финитно по обоим аргументам на $(-a, a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $x_2 = c \notin (-a, a)$. Тогда

$$K(x_1, x_2) = \int_{\Phi} F(x_1, c) d\mu,$$

где

$$F(x_1, c) = \varphi(x_1) \varphi(c)$$

при любом фиксированном $x_1 \in \mathbb{R}$ – функционал от φ . Какой бы ни была функция $\varphi(x) \in \Phi$, справедливо равенство $\varphi(c) = 0$, так как Φ – множество основных функций на $[-a, a]$. Следовательно, функционал

$$F(x_1, c) \equiv 0$$

на всей области интегрирования ($\forall \varphi \in \Phi$), а значит

$$\int_{\Phi} F(x_1, c) d\mu = 0$$

(при любом фиксированном $x_1 \in \mathbb{R}$).

Итак, если $x_2 = c \notin (-a, a)$, то $K(x_1, c) \equiv 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$. Аналогично доказывается, что $K(x_1, x_2) \equiv 0$ при $x_1 \notin (-a, a)$.

ЛЕММА 7. Функция y_0 является собственной функцией ядра, отвечающей собственному значению $\lambda = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя оператором Фредгольма (17) на функцию y_0 , получим

$$\hat{K}y_0 = \int_{-a}^a K(x, \xi) y_0 d\xi = y_0 \int_{-a}^a K(x, \xi) d\xi \equiv y_0$$

в силу достаточного условия нормировки (20) и симметрии ядра. Таким образом,

$$\hat{K}y_0 = 1 \cdot y_0,$$

что и требовалось доказать. Отметим, что нормированной собственной функцией ядра будет не сама функция y_0 , а функция $\sqrt{y_0}$; действительно,

$$\int_{-a}^a (\sqrt{y_0})^2 dx = \int_{-a}^a y_0 dx = 1.$$

5. Решение модельного уравнения. Найдем решение модельного уравнения (18), удовлетворяющее начальному условию (12). Для этого введем замену переменных $\tau \rightarrow t$, определенную соотношениями

$$\lambda(\tau) = \frac{dt(\tau)}{d\tau}, \quad t(0) = 0, \quad (21)$$

т.е.

$$t = \int_0^\tau \lambda(\theta) d\theta. \quad (22)$$

В результате начальная задача (18), (12) преобразуется к виду

$$\frac{\partial y}{\partial t} = kK(x, 0) - k\hat{K}y, \quad (23)$$

$$y(x, 0) = y_0. \quad (24)$$

Будем искать решение этой задачи в форме разложения по собственным функциям $y_n(x)$ оператора Фредгольма $\hat{K}$ [11], определенным равенством:

$$\hat{K}y_n = \lambda_n y_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

где λ_n – собственные значения. При этом предположим следующее.

1) Оператор $\hat{K}$ не имеет нулевых собственных значений (т.е. ядро $K(x_1, x_2)$ невырождено): $\lambda_n \neq 0$; $n = 1, 2, \dots$.

2) Ранг каждого собственного значения равен единице.

3) Для определенности положим, что собственное значение $\lambda = 1$, отвечающее равномерному распределению y_0 , является первым в последовательности $\{\lambda_n\}$: $\lambda_1 = 1$.

В виду того, что свободный член интегро-дифференциального уравнения (23) на основании теоремы Мерсера [11] разложим по базису из собственных векторов оператора $\hat{K}$:

$$K(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n(0) y_n(x), \quad (26)$$

а начальная функция $y(x, 0) = y_0$ сама является собственным вектором ядра, будем сразу искать решение задачи (23), (24) в виде

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) y_n(x). \quad (27)$$

Подставляя это выражение в уравнение (23), используя (26) и приравнявая коэффициенты при ортогональных функциях $y_n(x)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $u_n(t)$:

$$\dot{u}_n + k\lambda_n u_n = k\lambda_n y_n(0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (28)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u_n(t) = y_n(0) + A_n e^{-k\lambda_n t}, \quad A_n \in \mathbb{R}.$$

Начальное условие (24) с учетом разложения (27) и линейной независимости собственных функций $y_n(x)$ дает

$$u_1(0) = \sqrt{y_0}, \quad u_n(0) = 0, \quad n = 2, 3, \dots,$$

откуда

$$A_1 = 0, \quad A_n = -y_n(0), \quad n = 2, 3, \dots$$

Таким образом, для $u_n(t)$ имеем

$$\begin{aligned} u_1(t) &= y_1(0) = \sqrt{y_0}, \\ u_n(t) &= y_n(0) - y_n(0)e^{-k\lambda_n t}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (27), получим

$$y(x, t) = y_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (1 - e^{-k\lambda_n t}) y_n(0) y_n(x). \quad (29)$$

Это и есть искомое *решение задачи* (23), (24).

Убедимся, что ряд в (29) сходится абсолютно и равномерно. Для этого покажем, что коэффициенты этого ряда удовлетворяют оценке

$$1 - e^{-k\lambda_n t} < k\lambda_n t. \quad (30)$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^t e^{-k\lambda_n \theta} d\theta.$$

Так как

$$0 < e^{-k\lambda_n \theta} < 1, \quad n = 2, 3, \dots, \quad \theta > 0,$$

то

$$I < \int_0^t d\theta = t. \quad (31)$$

С другой стороны,

$$I = \frac{1}{k\lambda_n}(1 - e^{-k\lambda_n t}). \quad (32)$$

Сравнивая (31) и (32), приходим к оценке (30). Из нее следует оценка для общего члена ряда в (29):

$$|(1 - e^{-k\lambda_n t})y_n(0)y_n(x)| < k\lambda_n t |y_n(0)| |y_n(x)|.$$

Однако справа в этом неравенстве стоит домноженный на kt модуль общего члена ряда (26) для $K(x, 0)$. В силу того, что ряд (26) сходится абсолютно и равномерно (по теореме Мерсера), ряд в (29) также сходится абсолютно и равномерно. Равномерная сходимость ряда в (29) позволяет его почленно интегрировать.

Для обоснования корректности почленного дифференцирования ряда в (29), докажем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1 - e^{-k\lambda_n t})' y_n(0) y_n(x).$$

Этот ряд, очевидно, равен

$$k \sum_{n=2}^{\infty} e^{-k\lambda_n t} \lambda_n y_n(0) y_n(x)$$

и так как

$$e^{-k\lambda_n t} \leq 1 \quad \text{при } t \in [0, \infty),$$

он сходится абсолютно и равномерно по тем же причинам, что и ряд в (29).

Непосредственной подстановкой можно проверить, что функция (29) действительно является решением уравнения (23). Очевидно также, что это решение удовлетворяет и начальному условию (24). Покажем, что оно нормировано. На основании теоремы Мерсера положительно определенное, симметричное ядро $K(x, \xi)$ представимо в виде

$$K(x, \xi) = y_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n y_n(x) y_n(\xi).$$

Интегрируя обе части этого равенства по переменной ξ и используя условие (20), получим

$$\int_{-a}^a K(x, \xi) d\xi = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n y_n(x) \int_{-a}^a y_n(\xi) d\xi \equiv 1.$$

В виду линейной независимости собственных функций $y_n(x)$ из последнего следует, что

$$\int_{-a}^a y_n(\xi) d\xi = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

Интегрируя теперь решение (29) по x видим, что в силу последнего равенства оно нормировано к единице.

Отметим важное свойство решения (29).

ТЕОРЕМА 2. Решение (29) задачи (23), (24) стремится (в смысле слабой сходимости) к δ -функции при $t \rightarrow +\infty$:

$$y(x, t) \rightarrow \delta(x), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В виду положительной определенности ядра $K(x_1, x_2)$ все его собственные значения неотрицательны [9]:

$$\lambda_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поскольку же ядро не вырождено, т.е. не имеет нулевого собственного значения, и поскольку $k > 0$, то для всех членов суммы в (29) выполнено

$$e^{-k\lambda_n t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Следовательно,

$$y(x, t) \rightarrow y_0 + \sum_{n=2}^{\infty} y_n(0)y_n(x), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Но

$$y_0 + \sum_{n=2}^{\infty} y_n(0)y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(0)y_n(x),$$

а последний ряд есть ни что иное, как разложение δ -функции по собственным векторам оператора Фредгольма [12]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(0)y_n(x) = \delta(x),$$

откуда непосредственно следует соотношение (33).

Суть доказанной теоремы состоит в том, что система, находящаяся при $t = 0$ в хаотическом состоянии y_0 и развивающаяся с ростом t по закону наибо́льшего роста порядка, в пределе при $t \rightarrow +\infty$ достигает наиболее упорядоченного состояния.

Решение задачи (18), (12) получим, подставляя в (29) выражение (22) для t :

$$y(x, \tau) = y_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - e^{-k\lambda_n \int_0^\tau \lambda(\theta) d\theta} \right) y_n(0)y_n(x). \quad (34)$$

Если функция $\lambda(\tau)$ определена так, что

$$t(\tau) \rightarrow +\infty \quad (35)$$

при некотором стремлении τ :

$$\tau \rightarrow \tau_m \quad \text{или} \quad \tau \rightarrow +\infty,$$

то в силу теоремы 2 решение (34) будет стремиться к δ -функции при этом стремлении τ :

$$y(x, \tau) \rightarrow \delta(x),$$

и система будет достигать наиболее упорядоченного состояния в соответствующем пределе. Наоборот, если соотношение (35) не имеет места ни при каком стремлении τ , то наиболее упорядоченное состояние, по-видимому, недостижимо.

В заключение отметим, что поскольку $y(x, \tau)$ – плотность вероятности, следует потребовать неотрицательности этой функции. Возможно, это требование приведет к дополнительным условиям на ядро $K(x_1, x_2)$ и, тем самым, на меру μ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.
- [2] Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М.: Прогресс, 1986.
- [3] Климонтович Ю. Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990.
- [4] Ма Ш. Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980.
- [5] Пелюхова Е. Б., Фрадкин Э. Е. Самоорганизация физических систем. С.-Пб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1997.
- [6] Климонтович Ю. Л. Энтропия и информация открытых систем // УФН. 1999. Т. 169. С. 443.
- [7] Сергеев Э. В., Тремаскин А. В. Синергетика вибрационных квази-циклических колебаний // Необратимые процессы в природе и технике. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.
- [8] Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.
- [9] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
- [10] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
- [11] Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. М.: МГУ, 1989.
- [12] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило
17.05.2002
Исправленный вариант
30.01.2003