Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. А. Бутко, Функциональные интегралы для уравнения Шрёдингера на компактном римановом многообразии, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 194–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2690>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 04:19:02

УДК 517.987.4

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА НА КОМПАКТНОМ РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Я. А. Бутко

В работе получены представления решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера на компактном римановом многообразии в виде функциональных интегралов по мере Винера, соответствующей броуновскому движению в многообразии, и по поверхностным мерам Смолянова, построенным по мере Винера на траекториях в объемлющем пространстве. Представление решения получено для случая аналитических на некоторых множествах потенциала и начального условия при некоторых предположениях о геометрических характеристиках многообразия. В доказательстве используется прием, восходящий к Доссу, и представления с помощью функциональных интегралов решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в компактном римановом многообразии.

Библиография: 9 названий.

В работе получены представления решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера на компактном римановом многообразии в виде функциональных интегралов по мере Винера, соответствующей броуновскому движению в многообразии, и по поверхностным мерам Смолянова, построенным по мере Винера на траекториях в объемлющем пространстве (ср. [1]–[4]). Представление решения получено для случая аналитических на некоторых множествах потенциала и начального условия при некоторых ограничениях на геометрические характеристики многообразия. В доказательстве используется прием, восходящий к Доссу [5], и представления с помощью функциональных интегралов решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на компактном римановом многообразии [3].

1. Предварительные сведения. Для всякого риманова многообразия K обозначим символом vol_K борелевскую меру на K , а символом ρ – расстояние в K , порожаемые римановой структурой K . По теореме Нэша [6] всякое компактное риманово многообразие может быть вложено в евклидово пространство достаточно большой размерности, поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что K – компактное риманово многообразие размерности m , изометрически вложенное в пространство $\mathbb{R}^N$. Пусть $\Phi: K \rightarrow \mathbb{R}^N$ – гладкое отображение, осуществляющее вложение. Пусть $\text{scal}(x) \equiv \text{tr Ricci}(x)$ – скалярная кривизна многообразия K в точке $x \in K$. Символом $r^2(x)$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01074.

обозначим квадрат нормы нормали средней кривизны в точке x , умноженной на размерность многообразия. Мы предполагаем, что $\text{scal}(\cdot)$ и $r^2(\cdot)$ – непрерывные функции на K . Обозначим через $\mathcal{B}([0, t], K)$ множество функций из $[0, t]$ в K , имеющих разрывы только первого рода. Для любого $n \in \mathbb{N}$ символ $C^n(K)$ обозначает пространство n раз непрерывно дифференцируемых на K функций. Всюду далее число $e^{\pi i/4}$ будет обозначаться через $\sqrt{i}$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $K^n = K \times K \times \cdots \times K$.

Пусть $t \geq 0$ и $\Pi = \{t_j : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ – разбиение временного интервала, причем его диаметр $|\Pi| = \max_j |t_j - t_{j-1}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим для $t \geq 0, x, z \in K$

$$p^I(t, x, z) = \frac{1}{(2\pi t)^{m/2}} \exp\left\{-\frac{\rho^2(x, z)}{2t}\right\}, \quad q^I(t, x, z) = \frac{p^I(t, x, z)}{\int_K p^I(t, x, z) \text{vol}_K(dz)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $t > 0, x \in K, f: \mathcal{B}([0, t], K) \rightarrow \mathbb{C}$ – ограниченная непрерывная функция. *Интегралом от функции f по мере $W_K^{x, I}$* называется

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \int_{K^n} f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n) q^I(t_1, x, x_1) q^I(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots \\ \times q^I(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \cdots \text{vol}_K(dx_n),$$

где $f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n) = f(\varphi_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)(t))$, а $\varphi_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)(t)$ – отображение множества K^n в $\mathcal{B}([0, t], K)$ такое, что

$$\varphi_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)(t_0) = x, \quad \varphi_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)(s) = x_j \quad \text{при } s \in (t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, \dots, n.$$

Обозначим для каждого $x \in K$ и каждого разбиения Π через $P_{\Pi}^{x, I}$ вероятностную меру на сигма-алгебре борелевских подмножеств K^n такую, что для борелевских подмножеств $B_j, j = 1, \dots, n$, многообразия K

$$P_{\Pi}^{x, I}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \int_{B_1} \cdots \int_{B_n} q^I(t_1, x, x_1) q^I(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots \\ \times q^I(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \cdots \text{vol}_K(dx_n).$$

Отметим, что меры $P_{\Pi}^{x, I}$ можно рассматривать как меры на конечномерных подпространствах пространства $\mathcal{B}([0, t], K)$. Исходя из определения мер $P_{\Pi}^{x, I}, W_K^{x, I}$, можно показать, что

$$W_K^{x, I} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\Pi}^{x, I}$$

в слабой топологии пространства мер на множестве $\mathcal{B}([0, t], K)$. Так как при этом носители мер $P_{\Pi}^{x, I}$ сходятся к $C([0, t], K)$, то в определении 1 можно интеграл от функции f по мере $W_K^{x, I}$ рассматривать как интеграл по пространству $C([0, t], K)$. Аналогичным образом во всех последующих определениях интегралы берутся по этому пространству.

Определим $c_{\Pi}^I(t, n, x)$ как

$$\int_{K^n} p^I(t_1, x, x_1) p^I(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p^I(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \cdots \text{vol}_K(dx_n).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $t > 0$, $x \in K$, $f: \mathcal{B}([0, t], K) \rightarrow \mathbb{C}$ — ограниченная непрерывная функция. *Интегралом от функции f по мере $S_K^{x,I}$* называется

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} (c_{\Pi}^I(t, n, x))^{-1} \int_{K^n} f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n) p^I(t_1, x, x_1) p^I(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots \\ \times p^I(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \dots \text{vol}_K(dx_n),$$

где $f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)$ определяется аналогично случаю меры $W_K^{x,I}$.

Положим для $t \geq 0$, $x, z \in K$

$$p^E(t, x, z) = \frac{1}{(2\pi t)^{m/2}} \exp \left\{ -\frac{\|\Phi(x) - \Phi(z)\|_{\mathbb{R}^N}^2}{2t} \right\}, \\ q^E(t, x, z) = \frac{p^E(t, x, z)}{\int_K p^E(t, x, z) \text{vol}_K(dz)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $t > 0$, $x \in K$, $f: \mathcal{B}([0, t], K) \rightarrow \mathbb{C}$ — ограниченная непрерывная функция. *Интегралом от функции f по мере $W_K^{x,E}$* называется

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \int_{K^n} f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n) q^E(t_1, x, x_1) q^E(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots \\ \times q^E(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \dots \text{vol}_K(dx_n),$$

где $f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)$ определяется аналогично случаю меры $W_K^{x,I}$.

Определим $c_{\Pi}^E(t, n, x)$ как

$$\int_{K^n} p^E(t_1, x, x_1) p^E(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p^E(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \dots \text{vol}_K(dx_n).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $t > 0$, $x \in K$, $f: \mathcal{B}([0, t], K) \rightarrow \mathbb{C}$ — ограниченная непрерывная функция. *Интегралом от функции f по мере $S_K^{x,E}$* называется

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} (c_{\Pi}^E(t, n, x))^{-1} \int_{K^n} f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n) p^E(t_1, x, x_1) p^E(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots \\ \times p^E(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \text{vol}_K(dx_1) \dots \text{vol}_K(dx_n),$$

где $f_{\Pi}^x(x_1, \dots, x_n)$ определяется аналогично случаю меры $W_K^{x,I}$.

Как показано в работах [1]–[4], меры $W_K^{x,I}$ и $W_K^{x,E}$ совпадают с мерой Винера W_K^x , соответствующей броуновскому движению в многообразии. Меры $S_K^{x,I}$ и $S_K^{x,E}$ — это соответственно внутренняя и внешняя поверхностные меры Смолянова, порожденные мерой Винера на множестве траекторий в объемлющем пространстве.

2. Постановка задачи. Пусть K — компактное риманово многообразие, $\dim K = m$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Шрёдингера с потенциалом $V: K \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} i \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \left(\frac{1}{2} \Delta_K f \right)(t, x) + V(x) f(t, x), & t \geq 0, \quad x \in K, \\ f(0, x) = f_0(x), & x \in K; \end{cases} \quad (1)$$

здесь $\Delta_K = -\operatorname{tr} \nabla^2$ — оператор Лапласа–Бельтрами на множестве функций, заданных на многообразии K .

Предполагаем, что $f_0 \in C(K)$, $f: [0, \infty) \times K \rightarrow \mathbb{C}$, $f(t, \cdot) \in C(K)$ для всех $t \geq 0$. Здесь $C(K)$ — банахово пространство комплекснозначных функций, непрерывных на K с нормой $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Нашей целью будет представление решения задачи (1) в виде функциональных интегралов по траекториям в K .

3. Переход от уравнения Шрёдингера к уравнению теплопроводности. Рассмотрим множество

$$\mathbf{K} = \bigcup_{x \in K} \{x + \sqrt{i}(K - x)\}.$$

Будем говорить, что функция $g: K \rightarrow \mathbb{C}$ принадлежит *классу* A , если выполнены следующие условия:

- 1) существует область O_g некоторого комплексного многообразия, замыкание которой содержит $\mathbf{K}$;
- 2) существует единственная аналитическая в O_g , непрерывная на $O_g \cup \mathbf{K}$ функция $\bar{g}$ такая, что ее сужение на K совпадает с g .

Если в условии 2) функция $\bar{g}$ является также дважды непрерывно дифференцируемой на $O_g \cup \mathbf{K}$, то мы будем говорить, что функция g принадлежит *классу* A_2 .

Пусть функции V и f_0 принадлежат классу A . Предположим, что уравнение Шрёдингера с потенциалом V и начальным условием f_0 имеет в $\mathbf{K}$ единственное решение $f(t, z)$, являющееся функцией класса A_2 по переменной z :

$$\begin{cases} i \frac{\partial f}{\partial t}(t, z) = \left(\frac{1}{2} \Delta_K^z f \right)(t, z) + V(z) f(t, z), & t \geq 0, \quad z \in \mathbf{K}, \\ f(0, z) = f_0(z), & z \in \mathbf{K}. \end{cases} \quad (2)$$

Оператор Δ_K^z на функциях класса A_2 определяется следующим образом: значение $(\Delta_K^z \bar{g})(z)$ равно значению в точке z аналитического продолжения функции $\Delta_K g$.

Для функций f_0, V класса A и функций $f(t, \cdot)$ класса A_2 для любого $y \in K$ и любого фиксированного $x \in K$ однозначно определены функции

$$\begin{aligned} \varphi^x(t, y) &= f(t, x + \sqrt{i}(y - x)), & \varphi_0^x(y) &= f_0(x + \sqrt{i}(y - x)), \\ U^x(y) &= -iV(x + \sqrt{i}(y - x)). \end{aligned}$$

Пусть символ y в записи Δ_K^y означает, что оператор Лапласа–Бельтрами Δ_K действует на переменную y . Тогда заметим, что

$$(\Delta_K^y \varphi^x)(t, y) = (i \Delta_K^z f)(t, z) \quad \text{для } z = x + \sqrt{i}(y - x).$$

Следовательно, для любого фиксированного $x \in K$ функция φ^x удовлетворяет задаче Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi^x}{\partial t}(t, y) = \left(-\frac{1}{2}\Delta_K^y \varphi^x\right)(t, y) + U(y)\varphi^x(t, y), & t \geq 0, \quad y \in K, \\ \varphi^x(0, y) = \varphi_0^x(y), & y \in K. \end{cases} \quad (3)$$

4. Представление решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера в виде функциональных интегралов. Из результатов работ [1]–[4] вытекает следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 1. Пусть K – компактное риманово многообразие размерности m , изометрически вложенное в пространство $\mathbb{R}^N$. Пусть $\Phi: K \rightarrow \mathbb{R}^N$ – изометрия, осуществляющая вложение. Пусть $\varphi^x(t, y)$ – решение задачи Коши (3) с начальным условием $\varphi_0^x \in C(K)$. Тогда $\varphi^x(t, y)$ может быть представлено

а) с помощью функционального интеграла по мере Винера W_K^y :

$$\varphi^x(t, y) = \int_{C([0, t], K)} \exp\left\{\int_0^t U^x(\xi(\tau)) d\tau\right\} \varphi_0^x(\xi(t)) W_K^y(d\xi); \quad (4)$$

б) с помощью функционального интеграла по внешней поверхностной мере Смолянова $S_K^{y, E}$:

$$\begin{aligned} \varphi^x(t, y) = c^E(t, y) \int_{C([0, t], K)} \exp\left\{\frac{1}{4} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau\right\} \exp\left\{-\frac{1}{8} \int_0^t r^2(\xi(\tau)) d\tau\right\} \\ \times \exp\left\{\int_0^t U^x(\xi(\tau)) d\tau\right\} \varphi_0^x(\xi(t)) S_K^{y, E}(d\xi), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } (c^E(t, y))^{-1} = \int_{C([0, t], K)} \exp\left\{\frac{1}{4} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{8} \int_0^t r^2(\xi(\tau)) d\tau\right\} S_K^{y, E}(d\xi);$$

в) с помощью функционального интеграла по внутренней поверхностной мере Смолянова $S_K^{y, I}$:

$$\begin{aligned} \varphi^x(t, y) = c^I(t, y) \int_{C([0, t], K)} \exp\left\{\frac{1}{6} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau\right\} \\ \times \exp\left\{\int_0^t U^x(\xi(\tau)) d\tau\right\} \varphi_0^x(\xi(t)) S_K^{y, I}(d\xi), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } (c^I(t, y))^{-1} = \int_{C([0, t], K)} \exp\left\{\frac{1}{6} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau\right\} S_K^{y, I}(d\xi).$$

Вернемся в формулах (4), (5) и (6) к обозначениям через f, f_0, V . Мы получим соответственно:

а) из формулы (4)

$$\begin{aligned}\varphi^x(t, y) &\equiv f(t, x + \sqrt{i}(y - x)) \\ &= \int_{C([0, t], K)} \exp \left\{ -i \int_0^t V(x + \sqrt{i}(\xi(\tau) - x)) d\tau \right\} f_0(x + \sqrt{i}(\xi(t) - x)) W_K^y(d\xi);\end{aligned}$$

б) из формулы (5)

$$\begin{aligned}\varphi^x(t, y) &\equiv f(t, x + \sqrt{i}(y - x)) \\ &= c^E(t, y) \int_{C([0, t], K)} \exp \left\{ \frac{1}{4} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{8} \int_0^t r^2(\xi(\tau)) d\tau \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -i \int_0^t V(x + \sqrt{i}(\xi(\tau) - x)) d\tau \right\} f_0(x + \sqrt{i}(\xi(t) - x)) S_K^{y, E}(d\xi), \\ \text{где } (c^E(t, y))^{-1} &= \int_{C([0, t], K)} \exp \left\{ \frac{1}{4} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{8} \int_0^t r^2(\xi(\tau)) d\tau \right\} S_K^{y, E}(d\xi);\end{aligned}$$

с) из формулы (6)

$$\begin{aligned}\varphi^x(t, y) &\equiv f(t, x + \sqrt{i}(y - x)) \\ &= c^I(t, y) \int_{C([0, t], K)} \exp \left\{ \frac{1}{6} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -i \int_0^t V(x + \sqrt{i}(\xi(\tau) - x)) d\tau \right\} f_0(x + \sqrt{i}(\xi(t) - x)) S_K^{y, I}(d\xi), \\ \text{где } (c^I(t, y))^{-1} &= \int_{C([0, t], K)} \exp \left\{ \frac{1}{6} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau \right\} S_K^{y, I}(d\xi).\end{aligned}$$

Так как $f(t, x) = \varphi^x(t, x)$, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть K — компактное риманово многообразие размерности m , изометрически вложенное в пространство $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$. Пусть V и f_0 — функции класса A . Пусть $f(t, x)$ — решение задачи Коши (1) с начальным условием f_0 и потенциалом V . Пусть $f(t, x)$ является функцией класса A_2 по переменной x . Тогда решение $f(t, x)$ задачи Коши (1) может быть представлено

а) с помощью функционального интеграла по мере Винера W_K^x :

$$f(t, x) = \int_{C([0, t], K)} \exp \left\{ -i \int_0^t V(x + \sqrt{i}(\xi(\tau) - x)) d\tau \right\} f_0(x + \sqrt{i}(\xi(t) - x)) W_K^x(d\xi);$$

б) с помощью функционального интеграла по внешней поверхностной мере Смолянова $S_K^{x, E}$:

$$\begin{aligned}
f(t, x) &= c^E(t, x) \int_{C([0, t], K)} \exp \left\{ \frac{1}{4} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{8} \int_0^t r^2(\xi(\tau)) d\tau \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ -i \int_0^t V(x + \sqrt{i}(\xi(\tau) - x)) d\tau \right\} f_0(x + \sqrt{i}(\xi(t) - x)) S_K^{x, E}(d\xi), \\
\text{где } (c^E(t, x))^{-1} &= \int_{C([0, t], K)} \exp \left\{ \frac{1}{4} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{8} \int_0^t r^2(\xi(\tau)) d\tau \right\} S_K^{x, E}(d\xi);
\end{aligned}$$

с) с помощью функционального интеграла по внутренней поверхностной мере Смолянова $S_K^{x, I}$:

$$\begin{aligned}
f(t, x) &= c^I(t, x) \int_{C([0, t], K)} \exp \left\{ \frac{1}{6} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ -i \int_0^t V(x + \sqrt{i}(\xi(\tau) - x)) d\tau \right\} f_0(x + \sqrt{i}(\xi(t) - x)) S_K^{x, I}(d\xi), \\
\text{где } (c^I(t, x))^{-1} &= \int_{C([0, t], K)} \exp \left\{ \frac{1}{6} \int_0^t \text{scal}(\xi(\tau)) d\tau \right\} S_K^{x, I}(d\xi).
\end{aligned}$$

Автор выражает глубокую признательность профессору О. Г. Смолянову за постановку задачи и полезные дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] фон Вайцзеккер Х., Смолянов О. Г., Виттих О. Диффузия на компактном римановом многообразии и поверхностные меры // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 4. С. 442–447.
- [2] фон Вайцзеккер Х., Смолянов О. Г., Виттих О., Сидорова Н. А. Поверхностные меры на траекториях в римановых многообразиях, порождаемые диффузиями // Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 4. С. 441–446.
- [3] фон Вайцзеккер Х., Виттих О., Смолянов О. Г., Сидорова Н. А. Поверхностные меры Винера на траекториях в римановых многообразиях // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 4. С. 458–463.
- [4] Smolyanov O. G., von Weizsäcker H., Wittich O. Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standart Brownian motions // Canad. Math. Soc. Conference Proc. 2000. V. 29. P. 589–602.
- [5] Doss H. Sur une resolution stochastique del'équation de Schroedinger à coefficients analytiques // Comm. Math. Phys. 1980. V. 73. № 3. P. 247–264.
- [6] Nash J. F. The imbedding problem for Riemannian manifolds // Ann. Math. 1956. V. 63. P. 20–63.
- [7] Butko Ya. A. Representations of the solution of the Cauchy–Dirichlet problem for the heat equation in a domain on a compact Riemannian manifold by functional integrals // Russ. J. Math. Phys. 2004. V. 11. № 2. P. 1–7.
- [8] Смолянов О. Г., Трумен А. Интегралы Фейнмана по траекториям в римановых многообразиях // Докл. РАН. 2003. Т. 392. № 2. С. 174–179.
- [9] Обрезков О. О. Формула Фейнмана для решения задачи Коши–Дирихле в ограниченной области // Матем. заметки. 2005. Т. 77. № 2. С. 316–320.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: boutko@mars.rags.ru

Поступило
25.10.2004
Исправленный вариант
17.10.2005