Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Голубов, Модифицированный двоичный интеграл и производная дробного порядка на $\mathbb{R}_+$, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 213–233

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2691>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:42:41

УДК 517.5

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ДВОИЧНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ПРОИЗВОДНАЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА НА $\mathbb{R}_+$

Б. И. Голубов

Для функций из пространства Лебега $L(\mathbb{R}_+)$ вводятся модифицированный сильный двоичный интеграл J_α и производная $D^{(\alpha)}$ дробного порядка $\alpha > 0$. Устанавливаются критерии их существования для данной функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$. Найдено счетное множество собственных функций операторов $D^{(\alpha)}$ и J_α , $\alpha > 0$. Доказаны равенства $D^{(\alpha)}(J_\alpha(f)) = f$ и $J_\alpha(D^{(\alpha)}(f)) = f$ при условии $\int_{\mathbb{R}_+} f(x) dx = 0$. Установлена неограниченность линейного оператора $J_\alpha: L_{J_\alpha} \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$, где L_{J_α} – его естественная область определения. Аналогичное утверждение доказано для оператора $D^{(\alpha)}: L_{D^{(\alpha)}} \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$. Кроме того, для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и данной точки $x \in \mathbb{R}_+$ введены модифицированная двоичная производная $d^{(\alpha)}(f)(x)$ и модифицированный двоичный интеграл $j_\alpha(f)(x)$. Доказаны равенства $d^{(\alpha)}(J_\alpha(f))(x) = f(x)$ и $j_\alpha(D^{(\alpha)}(f)) = f(x)$ в каждой двоичной точке Лебега функции f .

Библиография: 31 название.

Введение. В настоящее время известно много определений производных и интегралов дробного порядка, связанных с именами Н. Абея, Ж. Лиувилля, Б. Римана, Н. Я. Сониной, М. Рисса, Г. Вейля, Б. Секефальви-Надя и др. Все операторы дробного интегрирования и дифференцирования являются операторами свертки того или иного типа. Теория интегралов и производных дробного порядка и некоторые их приложения изложены в книге [1]. Отдельные приложения дробных производных и интегралов имеются в книгах Зигмунда [2], Снеддона [3], Джрбашяна [4], Бутцера и Несселя [5], Бутцера и Требелса [6], Дэвиса [7] и др.

В 1967 г. Гиббс [8] ввел так называемую двоичную производную, тесно связанную с преобразованием Фурье–Уолша (см. [9]). С тех пор это определение обобщалось и видоизменялось в различных направлениях. Обширная библиография по теории и приложениям гиббсовских производных и связанных с ними интегралов, появившаяся к 1989 г., приведена в [10] и содержит более 180 наименований. Работы, посвященные этой тематике, продолжают выходить и по настоящее время. Теория двоичного интегрирования и дифференцирования подробно излагается, например, в книге [11], а некоторые ее аспекты – в книге [12].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00206.

Отметим, что известны понятия точечных и так называемых сильных двоичных производных и интегралов. Сильные двоичные производные и интегралы определяются для функций из тех или иных функциональных пространств. При этом сами функции могут быть заданы либо на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, либо на $[0, 1]$, либо на двоичных группах K или G , где группа K изоморфна модифицированной полуоси $\mathbb{R}_+^*$, а группа G — модифицированному отрезку $[0, 1]^*$.

В работе [13] Бутцер и Вагнер для функций $f \in L(G)$ ввели понятие сильной двоичной производной $D(f) \in L(G)$ и доказали, что функции ортонормированной на G системы Уолша–Пэли $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяют условиям $D(w_n) = nw_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, т.е. являются собственными функциями оператора D . В той же работе для функций $f \in L(G)$ введен сильный двоичный интеграл $I(f) \in L(G)$. Доказано, что $D(I(f)) = I(D(f)) = f$, если $\hat{f}(0) \equiv \int_G f(x) d\mu(x) = 0$. Таким образом, установлена основная теорема интегрального исчисления для двоичного анализа. В той же работе доказано, что следующие три условия равносильны:

- а) существует $D(f) = g$;
- б) существует такая функция $g \in L(G)$, что $\hat{g}(n) = n\hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где $\hat{f}(n) = \int_G f(x)w_n(x) d\mu(x)$ — коэффициенты Фурье–Уолша функции f , а μ — мера Хаара на G , нормированная условием $\mu(G) = 1$;
- в) существует такая функция $g \in L(G)$, что $f = I(g) + \hat{f}(0)$.

В другой работе тех же авторов [14] введено понятие сильной двоичной производной $\bar{D}$ для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и доказано равенство $(\bar{D}(f))^\sim(x) = x\tilde{f}(x)$, где $\tilde{f}$ — преобразование Фурье–Уолша функции f . Пал [15] доказал, что если $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и $xf(x) \in L(\mathbb{R}_+)$, то f в любой точке $x \in \mathbb{R}_+$ имеет точечную двоичную производную Бутцера–Вагнера, равную $(tf(t))^\sim(x)$.

Вагнер [16] для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$ определил сильный двоичный интеграл $\bar{I}(f)$ и доказал равенства $\bar{D}(\bar{I}(f)) = f$ и $\bar{I}(\bar{D}(f)) = f$ (последнее — при условии $\hat{f}(0) = 0$). В этой же работе доказан следующий критерий: пара функций $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ связана равенством $g = \bar{I}(f)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)/x$, $x > 0$.

Онневир [17] ввел модифицированную сильную двоичную производную $D^{(1)}(f)$ для функций $f \in L(G)$ и доказал равенства $D^{(1)}(w_k) = 2^n w_k$, где $2^n \leq k < 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. В работах [17] и [18] введены также две сильные двоичные производные $D^{(1)}(f)$ и $D^{[1]}(f)$ для функций $f \in L(K)$. В [18] установлено, что производные $D^{(1)}$ и $D^{[1]}$ дифференцируют один и тот же набор функций $f \in L(K)$, не совпадающий с $L(K)$. В работе [19] Онневир определил точечную производную $d_p^{(\alpha)}(f)(x)$ и сильную производную $D_p^{(\alpha)}(f)$ дробного положительного порядка α для функций f , заданных на компактной группе G_p , являющейся счетной суммой циклических групп порядка $p \geq 2$. При этом сильная производная $D_p^{(\alpha)}(f)$ определена для функций из пространств $L^q(G_p)$, $1 \leq q < \infty$, и $C(G_p)$ (пространство непрерывных функций на группе G_p). Он получил формулы для производных порядка α от функций — характеров группы G_p . Из них следует, что характеры группы G_p являются собственными функциями оператора $D_p^{(\alpha)}$. В той же работе [19] введен сильный интеграл $I_p^{(\alpha)}$ дробного положительного порядка α и установлены равенства $D_p^{(\alpha)}(I_p^{(\alpha)}(f)) = f$ и $I_p^{(\alpha)}(D_p^{(\alpha)}(f)) = f$ при условии $\int_{G_p} f(x) d\mu(x) = 0$. Найдены критерии для того, чтобы пара функций f, g была связана равенством $g = I_p^{(\alpha)}(f)$ или равенством $g = D_p^{(\alpha)}(f)$.

Отметим, что подобные результаты для дробных двоичных производных и интегралов типа Бутцера–Вагнера получены в работе [20].

В данной работе вводятся модифицированный сильный двоичный интеграл (МСДИ) $J_\alpha(f)$ и модифицированная сильная двоичная производная (МСДП) $D^{(\alpha)}(f)$ дробного порядка $\alpha > 0$ для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$. Отметим, что рассматриваемая нами производная $D^{(\alpha)}(f)$ для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$ фактически является модификацией производной Онневира [21], который рассматривал функции $f \in L(K)$. В работе доказывается аналог упомянутого выше критерия Вагнера: пара функций $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ связана равенством $g = J_\alpha(f)$, $\alpha > 0$, тогда и только тогда, когда $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(x) = (h(x))^\alpha f(x)$, где $h(x) = 2^{-n}$, $2^n \leq x < 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, а $\tilde{f}$ – преобразование Фурье–Уолша функции f . Доказано равенство $D^{(\alpha)}(J_\alpha(f)) = f$, а при условии $\tilde{f}(0) = 0$ – равенство $J_\alpha(D^{(\alpha)}(f)) = f$. Кроме того, найдено счетное множество собственных функций операторов $D^{(\alpha)}$ и J_α , $\alpha > 0$. Доказано, что при последовательном сильном двоичном дифференцировании (интегрировании) порядки производных (интегралов) складываются.

Помимо модифицированных сильных двоичных производных и интегралов дробного порядка введены также модифицированная двоичная производная (МДП) $d^{(\alpha)}(f)(x)$ и модифицированный двоичный интеграл (МДИ) $j_\alpha(f)(x)$ дробного порядка $\alpha > 0$ в заданной точке $x \in \mathbb{R}_+$. Доказано, что условие $h^\alpha f \in L(\mathbb{R}_+)$ (соответственно условие $h^{-\alpha} \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$) достаточно для того, чтобы функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ имела МДИ (соответственно МДП) порядка $\alpha > 0$ в любой точке $x \in \mathbb{R}_+$. Доказано, что МСДИ (МСДП) порядка $\alpha > 0$ функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ в каждой двоичной точке Лебега $x \in \mathbb{R}_+$ функции f (следовательно, почти всюду на $\mathbb{R}_+$) имеет МДП (МДИ) порядка α , равную $f(x)$ (равный $f(x)$). Также установлено, что каждая собственная функция оператора $D^{(\alpha)}$ (соответственно J_α) имеет модифицированные двоичные производные (соответственно интегралы) дробного порядка $\alpha > 0$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$. Наконец, доказано, что при условиях $f, h^{-\alpha} f \in L(\mathbb{R}_+)$ (соответственно $f, h^\alpha f \in L(\mathbb{R}_+)$) преобразование Фурье–Уолша $\tilde{f}(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ имеет двоичную производную (соответственно двоичный интеграл) порядка $\alpha > 0$.

Отметим, что часть результатов данной работы для случая $\alpha = 1$ доказана нами в [22]. Однако определение точечных производных и интегралов первого порядка в [22] несколько отличается от введенных в данной статье.

1. Основные определения и вспомогательные результаты. Как обычно, через $\mathbb{R}_+$ обозначается положительная полуось $[0, +\infty)$, а через $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, – пространство измеримых на $\mathbb{R}_+$ по мере Лебега функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|.$$

При этом вместо $L^1(\mathbb{R}_+)$ будем писать $L(\mathbb{R}_+)$. Через $\mathbb{Z}$ обозначается множество всех целых чисел, а через $\mathbb{Z}_+$ – множество всех целых неотрицательных чисел.

Напомним определение преобразования Фурье–Уолша, которое впервые появилось в работе Файна [9] (см. также [11, гл. 9] и [12, гл. 6]). Для числа $x \in \mathbb{R}_+$ и натурального n положим

$$x_n \equiv [2^n x] \pmod{2}, \quad x_{-n} \equiv [2^{1-n} x] \pmod{2}, \quad (1.1)$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a , а числа x_n и x_{-n} по определению равны 0 или 1. Отметим, что x_{-n} (соответственно x_n) для $n \in \mathbb{N}$ является n -м двоичным разрядом целой (соответственно дробной) части числа $x \in \mathbb{R}_+$. При этом двоично-рациональным

числам $x \in \mathbb{R}_+$ сопоставляются конечные двоичные разложения, т.е. $x_n = 0$ для $n \geq n(x)$.

Поскольку $x_{-n} = 0$ для $n \geq n(x)$, для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ определено целое неотрицательное число

$$t(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_{-n} + x_{-n} y_n).$$

Обобщенные функции Уолша определяются для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ равенством

$$\psi(x, y) = (-1)^{t(x, y)}. \quad (1.2)$$

Обобщенные функции Уолша обладают следующими свойствами: $\psi(x, y) = \psi(y, x)$, $\psi(x, 0) \equiv 1$ для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Преобразование Фурье–Уолша $F[f] \equiv \tilde{f}$ функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ задается равенством

$$F[f](x) \equiv \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x, y) f(y) dy \quad (1.3)$$

(см. [11, гл. 9] или [12, гл. 6]). Если же $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то $F[f] \equiv \tilde{f}$ определяется как предел по норме пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$ последовательности функций

$$\int_0^{2^n} f(y) \psi(x, y) dy, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Преобразование Фурье–Уолша (1.3) имеет свойства, аналогичные свойствам обычного преобразования Фурье. Очевидно, для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ ее преобразование Фурье–Уолша ограничено и $\|\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L(\mathbb{R}_+)}$. Поэтому из сходимости последовательности функций f_n к функции f в метрике $L(\mathbb{R}_+)$ вытекает, что $\tilde{f}_n$ сходится к $\tilde{f}$ равномерно на $\mathbb{R}_+$. Справедлив также аналог теоремы Планшереля.

ТЕОРЕМА А. Если $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, то $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}_+)$, причем $\|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$, $F[\tilde{f}] = f$.

Отметим также следующий результат.

ТЕОРЕМА В. Если $f, g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ или $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$\int_{\mathbb{R}_+} \tilde{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \tilde{g}(x) dx.$$

На $\mathbb{R}_+$ введем операцию сложения $\oplus$, положив для $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$: $x \oplus y = z$, где число z в двоичной системе счисления имеет двоичные разряды $z_n \equiv x_n + y_n \pmod{2}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$, а x_n, y_n вычисляются по правилу (1.1). Отметим, что $z = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n 2^{-n}$, причем случай $z_n = 1$ для $n \geq n(z)$ не исключается.

Обобщенные функции Уолша (1.2) удовлетворяют равенству

$$\psi(x \oplus y, t) = \psi(x, t) \psi(y, t), \quad (1.4)$$

если $t, x, y \in \mathbb{R}_+$, $x \oplus y$ двоично иррационально. Таким образом, при фиксированных t и x равенство (1.4) выполняется для всех $y \in \mathbb{R}_+$ за исключением счетного множества.

Отметим, что обобщенные функции Уолша с целым неотрицательным аргументом выражаются через функции Уолша в нумерации Пэли с помощью равенств

$$\psi(x, k) = w_k(x - [x]), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (1.5)$$

Теорема об обращении преобразования Фурье–Уолша справедлива не только для класса $L^2(\mathbb{R}_+)$. Чтобы сформулировать ее для класса $L(\mathbb{R}_+)$, напомним определение W -непрерывности функции. Функцию $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ назовем W -непрерывной в точке $x \in \mathbb{R}_+$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ при $x \oplus y < \delta$ (см. [12, гл. 1]). (Это свойство функции f в книге [12, с. 50] называется ее ρ^* -непрерывностью в точке x .)

Отметим, что для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ ее преобразование Фурье–Уолша $\tilde{f}$ является W -непрерывной функцией на $\mathbb{R}_+$ (см. [12, теорема 6.1.5]).

ТЕОРЕМА С. Пусть функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ является W -непрерывной в точке $x \in \mathbb{R}_+$ и $\tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x, y) \tilde{f}(y) dy.$$

Введем понятие двоичной точки Лебега функции. Точку $x \in \mathbb{R}_+$ назовем двоичной точкой Лебега локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функции f , если f определена в точке x и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \int_0^{2^{-n}} |f(x \oplus t) - f(x)| dt = 0.$$

Почти все точки локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функции f являются ее двоичными точками Лебега. Очевидно, что точка W -непрерывности функции является ее двоичной точкой Лебега.

Введем так называемый обобщенный интеграл Дирихле–Уолша функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$:

$$S_y(f)(x) = \int_0^y \tilde{f}(t) \psi(x, t) dt. \quad (1.6)$$

ТЕОРЕМА D. Если точка $x \in \mathbb{R}_+$ является двоичной точкой Лебега функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2^{-n}}(f)(x) = f(x).$$

Если при этом $\tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x, y) \tilde{f}(y) dy.$$

Утверждение теоремы D доказано в книге [11, с. 430] для точки W -непрерывности функции, но доказательство остается справедливым и для двоичной точки Лебега.

Из теоремы D вытекает

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. При условиях $f, \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x, y) \tilde{f}(y) dy \quad \text{почти всюду на } \mathbb{R}_+.$$

ТЕОРЕМА Е. Если $f \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{2^n}(f) - f\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{2^{-n}}(f)\|_{L(\mathbb{R}_+)} = |\tilde{f}(0)|.$$

Все эти теоремы о преобразованиях Фурье–Уолша можно найти, например, в [11, гл. 9] или [12, гл. 6].

Ниже нам понадобятся следующие две леммы.

ЛЕММА 1.1 [23, лемма 1]. Для функций

$$a_{m,n}(x) = 2^{-n} \psi(x, m2^{-n}) X_{[0,2^n)}(x), \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.7)$$

справедливы равенства $\tilde{a}_{m,n}(x) = X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})}(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, где X_E — характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}_+$.

ЛЕММА 1.2 [24, лемма 3]. Если $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, то существует единственное целое число r , при котором справедливо вложение $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}) \subset [2^r, 2^{r+1})$.

Определим функцию $h: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ равенствами

$$h(x) = 2^{-n}, \quad 2^n \leq x < 2^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.8)$$

ЛЕММА 1.3. Для $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{Z}$ во всякой точке $x > 0$ определена функция

$$W_n^\alpha(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{2^{-n}}^{2^m} \psi(x, y) (h(y))^\alpha dy, \quad (1.9)$$

причем

$$W_n^\alpha(x) = \begin{cases} -2^{(\alpha-1)n} & \text{для } 2^{n-1} \leq x < 2^n, \\ -2^{(\alpha-1)n} + 2(1-2^{-\alpha}) \sum_{i=0}^k 2^{(n-i)(\alpha-1)} & \text{для } 2^{n-k-2} \leq x < 2^{n-k-1}, \\ & k = 0, 1, \dots, \\ 0 & \text{для } x \geq 2^n. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.8) и (1.9) имеем

$$\begin{aligned} W_n^\alpha(x) &= \sum_{k=-n}^{+\infty} 2^{-k\alpha} \left(\int_0^{2^{k+1}} \psi(x, y) dy - \int_0^{2^k} \psi(x, y) dy \right) \\ &\equiv \sum_{k=-n}^{+\infty} 2^{-k\alpha} (D_{2^{k+1}}(x) - D_{2^k}(x)). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Согласно лемме Пэли

$$D_{2^k}(x) = 2^k X_{[0, 2^{-k})}(x) \quad (1.11)$$

(см., например, [11, с. 428]). Поэтому из (1.10) следует, что $W_n^\alpha(x) = 0$ для $x \geq 2^n$. Для каждого $x > 0$ ряд в правой части (1.10) является конечной суммой, так как лишь

конечное число его членов отлично от нуля. Применяя преобразование Абеля, из (1.10) и (1.11) получим

$$\begin{aligned} W_n^\alpha(x) &= -2^{n\alpha} D_{2^{-n}}(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} (2^{(n-i)\alpha} - 2^{(n-i-1)\alpha}) D_{2^{-n+i+1}}(x) \\ &= -2^{n(\alpha-1)} X_{[0, 2^n)}(x) + 2(1 - 2^{-\alpha}) \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{(n-i)(\alpha-1)} X_{[0, 2^{n-i-1})}(x). \end{aligned}$$

Отсюда для $2^{n-1} \leq x < 2^n$ имеем $W_n^\alpha(x) = -2^{(\alpha-1)n}$. Если же $2^{n-k-2} \leq x < 2^{n-k-1}$, $k = 0, 1, \dots$, то

$$W_n^\alpha(x) = -2^{(\alpha-1)n} + 2(1 - 2^{-\alpha}) \sum_{i=0}^k 2^{(n-i)(\alpha-1)}.$$

Лемма доказана.

Если $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a$, и одновременно $g(x) = O(f(x))$, $x \rightarrow a$, то будем писать $f(x) \approx g(x)$, $x \rightarrow a$. Из леммы 1.3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- а) если $0 < \alpha < 1$, то $W_n^\alpha(x) \approx x^{\alpha-1}$, $x \rightarrow +0$;
- б) $W_n^1(x) \approx \log_2(1/x)$, $x \rightarrow +0$;
- в) если $\alpha > 1$, то функция $W_n^\alpha(x)$ ограничена на $(0, 2^n)$;
- г) если $\alpha > 0$, $0 < \delta < 2^n$, то функция $W_n^\alpha(x)$ ограничена на $(\delta, 2^n)$.

Учитывая, что $W_n^\alpha(x) = 0$ для $x \geq 2^n$, из следствия 1.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *При любых $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{Z}$ справедливо включение $W_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+)$.*

ЛЕММА 1.4. *Если $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{Z}$, то $\widetilde{W}_n^\alpha(x) = \varphi_n^\alpha(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$, где*

$$\varphi_n^\alpha(x) = (h(x))^\alpha X_{[2^{-n}, +\infty)}(x). \quad (1.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании равенства (1.10) имеем

$$\widetilde{W}_n^\alpha(x) = \sum_{k=-n}^{+\infty} 2^{-k\alpha} [\widetilde{D}_{2^{k+1}}(x) - \widetilde{D}_{2^k}(x)].$$

Поскольку $\widetilde{D}_{2^k} = X_{[0, 2^k)}$, $k \in \mathbb{Z}$ (см. [11, с. 435]), из предыдущего равенства и (1.12) получим

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_n^\alpha(x) &= \sum_{k=-n}^{+\infty} 2^{-k\alpha} [X_{[0, 2^{k+1})}(x) - X_{[0, 2^k)}(x)] \\ &= \sum_{k=-n}^{+\infty} 2^{-k\alpha} X_{[2^k, 2^{k+1})}(x) = \varphi_n^\alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. При любых $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $\widetilde{W}_n^\alpha(0) = 0$.

Для $\alpha > 0$ положим

$$\Lambda_n^\alpha(x) = \int_0^{2^n} (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (1.13)$$

ЛЕММА 1.5. Если $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, то

- а) $\Lambda_n^\alpha(x) = 2^{n(\alpha+1)} / (2^{\alpha+1} - 1)$ для $0 \leq x < 2^{-n}$;
б) $\Lambda_n^\alpha(x) = C_n^\alpha 2^{-i(\alpha+1)}$ для $2^{-n+i} \leq x < 2^{-n+i+1}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, где

$$C_n^\alpha = -\frac{1 - 2^{-\alpha}}{1 - 2^{-\alpha-1}} \cdot 2^{(n-1)(\alpha+1)}. \quad (1.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (1.8) функции $h(x)$ и равенства (1.13) подобно равенству (1.10) получим

$$\Lambda_n^\alpha(x) = \sum_{k=-n}^{+\infty} 2^{-(k+1)\alpha} [D_{2^{-k}}(x) - D_{2^{-k-1}}(x)], \quad (1.15)$$

где $D_{2^k}(x)$ определяется равенством (1.11). Следовательно,

$$\Lambda_n^\alpha(x) = \sum_{k=-n}^{+\infty} 2^{-(k+1)\alpha} [2^{-k} X_{[0, 2^k)}(x) - 2^{-k-1} X_{[0, 2^{k+1})}(x)].$$

Отсюда, применяя преобразование Абеля, приходим к равенству

$$\Lambda_n^\alpha(x) = 2^{(n-1)\alpha} 2^n X_{[0, 2^{-n})}(x) + (2^{-\alpha} - 1) \sum_{k=-n+1}^{+\infty} 2^{-k(\alpha+1)} X_{[0, 2^k)}(x). \quad (1.16)$$

Следовательно,

$$\Lambda_n^\alpha(x) = 2^{(n-1)\alpha} 2^n + (2^{-\alpha} - 1) \sum_{k=-n+1}^{+\infty} 2^{-k(\alpha+1)} = \frac{2^{n(\alpha+1)}}{2^{\alpha+1} - 1}$$

для $x \in [0, 2^{-n})$, и утверждение а) леммы доказано.

Если же $2^{-n+i} \leq x < 2^{-n+i+1}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, то из (1.16) получим

$$\Lambda_n^\alpha(x) = (2^{-\alpha} - 1) \sum_{k=-n+1+i}^{+\infty} 2^{-k(\alpha+1)} = C_n^\alpha 2^{-i(\alpha+1)},$$

где C_n^α определяется равенством (1.14). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Для $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ функция Λ_n^α ограничена на $\mathbb{R}_+$ и $\Lambda_n^\alpha(x) \approx x^{-\alpha-1}$, $x \rightarrow +\infty$.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Для $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ справедливо включение $\Lambda_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+)$.

2. Модифицированный сильный двоичный интеграл дробного порядка.

Напомним определение двоичной свертки $f * g$ двух функций $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y)g(x \oplus y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Как и в случае обычной свертки, $f * g \in L(\mathbb{R}_+)$, $(f * g)^\sim = \tilde{f}\tilde{g}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Если $\alpha > 0$ и $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$, причем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * W_n^\alpha - g\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0, \quad (2.1)$$

то функцию $g \equiv J_\alpha(f)$ назовем *модифицированным сильным двоичным интегралом* (МСДИ) *порядка α функции f* .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\alpha > 0$ и $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$. Функция g является МСДИ порядка α функции f тогда и только тогда, когда

$$\tilde{g}(0) = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)(h(x))^\alpha \quad \text{для } x > 0. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть $g = J_\alpha(f)$ при некотором $\alpha > 0$. Тогда из (2.1) и (1.3) следует, что существует равномерный на $\mathbb{R}_+$ предел

$$\tilde{g}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n^\alpha * f)^\sim(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{W}_n^\alpha(x) \tilde{f}(x). \quad (2.3)$$

Согласно лемме 1.4 $\tilde{W}_n^\alpha(x) = \varphi_n^\alpha(x)$ для $x \in \mathbb{R}_+$, а поэтому из (2.3) и (1.12) следует (2.2), что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть $\alpha > 0$ и две функции $f, g \in L(\mathbb{R}_+)$ связаны равенствами (2.2). Докажем, что последовательность $\{f * W_n^\alpha\}_{n=0}^{+\infty}$ фундаментальна в пространстве $L(\mathbb{R}_+)$, а ее предел в этом пространстве совпадает с g , т.е. $g = J_\alpha(f)$.

Действительно, согласно лемме 1.4 и равенству (1.12) имеем

$$(f * W_n^\alpha - f * W_m^\alpha)^\sim = \tilde{f}(\tilde{W}_n^\alpha - \tilde{W}_m^\alpha) = \tilde{f}h^\alpha[X_{[0,2^{-n})} - X_{[0,2^{-m})}]. \quad (2.4)$$

Поэтому

$$f * W_n^\alpha(\cdot) - f * W_m^\alpha(\cdot) = \int_{2^{-m}}^{2^{-n}} \tilde{f}(t)(h(t))^\alpha \psi(\cdot, t) dt. \quad (2.5)$$

На основании равенств (2.4) перепишем (2.5) в виде

$$f * W_n^\alpha - f * W_m^\alpha = S_{2^{-n}}(g) - S_{2^{-m}}(g), \quad n, m \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.6)$$

Но согласно теореме Е и первому из равенств (2.2) можно записать

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{2^{-n}}(g)\|_{L(\mathbb{R}_+)} = |\tilde{g}(0)| = 0.$$

Поэтому из равенства (2.6) следует, что последовательность $\{f * W_n^\alpha\}_{n=0}^{+\infty}$ фундаментальна в пространстве $L(\mathbb{R}_+)$, т.е. сходится в этом пространстве к некоторой функции $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$. По определению $\varphi = J_\alpha(f)$. Но тогда согласно уже доказанному необходимо выполняются равенства $\tilde{\varphi}(0) = 0$ и $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{f}(x)(h(x))^\alpha$ для $x > 0$. Отсюда и из (2.2) следует, что $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{g}(x)$ для $x \in \mathbb{R}_+$. В силу теоремы единственности для преобразования Фурье–Уолша имеем $g = \varphi \equiv J_\alpha(f)$. Теорема доказана.

Для сильного двоичного интеграла первого порядка в смысле Бутцера–Вагнера результат, подобный теореме 2.1, доказан в работе [16].

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\alpha, \beta > 0$ и функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ имеет МСДИ $\varphi = J_\alpha(f)$ порядка α , а функция φ имеет МСДИ $g = J_\beta(\varphi)$ порядка β . Тогда функция f имеет МСДИ $J_{\alpha+\beta}(f)$ порядка $\alpha + \beta$, причем $J_{\alpha+\beta}(f) = J_\beta(J_\alpha(f))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.1 (необходимость) из условия $\varphi = J_\alpha(f)$ имеем $\tilde{\varphi}(0) = 0$ и $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{f}(x)(h(x))^\alpha$ для $x > 0$, а из условия $g = J_\beta(\varphi)$ имеем $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(x) = \tilde{\varphi}(x)(h(x))^\beta$ для $x > 0$. Следовательно, $\tilde{g}(0) = 0$ и $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)(h(x))^{\alpha+\beta}$ для $x > 0$. Поэтому из той же теоремы 2.1 (достаточность) вытекает, что $g = J_{\alpha+\beta}(f)$. Теорема доказана.

Обозначим через L_{J_α} область определения оператора J_α , т.е. множество всех функций $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$, имеющих МСДИ порядка α . Очевидно, L_{J_α} является линейным подпространством в $L(\mathbb{R}_+)$.

ТЕОРЕМА 2.3. При любом $\alpha > 0$ каждая из функций $a_{m,n}(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, определяемых равенствами (1.7), имеет МСДИ порядка α и является собственной функцией оператора $J_\alpha: L_{J_\alpha} \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$ с собственным числом $2^{-r\alpha}$, где целое число $r = r(m, n)$ однозначно определяется вложением $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}] \subset [2^r, 2^{r+1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь тем, что $(f * g)^\sim = \tilde{f}\tilde{g}$, и леммами 1.1 и 1.4, получим

$$(a_{m,n} * W_k^\alpha)^\sim = \tilde{a}_{m,n} \tilde{W}_k^\alpha = X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})} \varphi_k^\alpha. \quad (2.7)$$

Поскольку $m \in \mathbb{N}$, из (1.12) следует, что функция в правой части равенства (2.7) принадлежит $L(\mathbb{R}_+)$. Поэтому на основании замечания 1.1 имеем

$$(a_{m,n} * W_k^\alpha)(\cdot) = \int_{\mathbb{R}_+} X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})}(y) \varphi_k^\alpha(y) \psi(\cdot, y) dy. \quad (2.8)$$

Согласно лемме 1.2 найдется отрезок $[2^r, 2^{r+1})$, который содержит $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})$. Такой отрезок, очевидно, только один. Из (1.12) следует, что при $k \geq -r$ функция φ_k^α на отрезке $[2^r, 2^{r+1})$ принимает постоянное значение $2^{-r\alpha}$. Поэтому из (2.8) получим

$$(a_{m,n} * W_k^\alpha)(\cdot) = 2^{-r\alpha} \int_{\mathbb{R}_+} X_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n})}(y) \psi(\cdot, y) dy. \quad (2.9)$$

Применяя лемму 1.1 и замечание 1.1, из (2.9) получим

$$(a_{m,n} * W_k^\alpha) = 2^{-r\alpha} a_{m,n}. \quad (2.10)$$

Это равенство доказано для всех $k \geq -r$. Из равенства (2.10) при $k \rightarrow +\infty$ согласно определению 2.1 вытекает утверждение теоремы 2.3.

Из теоремы 2.2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.1. При $\alpha > 0$ справедливы равенства $J_\alpha(a_{1,n}) = 2^{n\alpha} a_{1,n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Из этого следствия вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.2. При $\alpha > 0$ линейный оператор $J_\alpha: L_{J_\alpha} \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$ неограничен.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В нашей работе [22] доказано, что линейная оболочка системы функций (1.7) плотна в двоичном пространстве Харди $H(\mathbb{R}_+)$. Поэтому область определения оператора J_α плотна в $H(\mathbb{R}_+)$ при любом $\alpha > 0$.

Известно, что система функций

$$\{\bar{a}_{m,n}\}_{m=0}^{+\infty}, \quad \bar{a}_{m,n}(x) = 2^{-n/2}\psi(x, m2^{-n}),$$

при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ ортонормирована на $\Delta_n = [0, 2^n)$ (см. [12, теорема 1.5.6]) и полна в $L^p(\Delta_n)$, $1 \leq p \leq \infty$ [25].

Отметим, что существование сильного двоичного интеграла первого порядка в смысле Бутцера–Вагнера от функций $a_{m,n}(x) = \psi(x, m2^{-n})X_{[0,2^n)}(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, установлено в работе Пала и Шипша [26]. В ней доказано, что линейная оболочка этой системы функций плотна в метрике пространства $L(\mathbb{R}_+)$ в множестве всех функций, имеющих сильный двоичный интеграл первого порядка в смысле Бутцера–Вагнера.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Функция $a_n \equiv a_{0,n} = 2^{-n}X_{[0,2^n)}$, где $n \in \mathbb{Z}$, не имеет МСДИ порядка $\alpha > 0$. Таким образом, в теореме 2.3 условие $m \in \mathbb{N}$ нельзя заменить условием $m \in \mathbb{Z}_+$.

Действительно, предположим, что найдутся такие $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{Z}$, что МСДИ $J_\alpha(a_n)$ существует. Тогда согласно теореме 1.1 для $x > 0$ должно выполняться равенство

$$\tilde{J}_\alpha(a_n)(x) = \tilde{a}_n(x) = 2^{-n}(h(x))^\alpha \tilde{X}_{[0,2^n)}(x).$$

Поскольку $\tilde{D}_{2^k} = X_{[0,2^k)}$, $k \in \mathbb{Z}$ (см. [11, с. 435]), из предыдущего равенства согласно теореме С и равенству (1.11) получим

$$\tilde{J}_\alpha(a_n)(x) = 2^{-n}(h(x))^\alpha D_{2^n}(x) = (h(x))^\alpha X_{[0,2^{-n})}(x). \quad (2.11)$$

Преобразование Уолша $\tilde{J}_\alpha(a_n)(x)$ функции $J_\alpha(a_n) \in L(\mathbb{R}_+)$ должно быть ограничено на $\mathbb{R}_+$, а функция в правой части равенства (2.11) не ограничена в правой окрестности 0, так как $h(x) \approx 1/x$ при $x \rightarrow +0$. Это противоречие доказывает, что МСДИ $J_\alpha(a_n)$ не существует.

3. Модифицированная сильная двоичная производная дробного порядка. Модифицированная сильная двоичная производная дробного порядка $\alpha > 0$ вводится с помощью ядер

$$\Lambda_n^\alpha(x) = \int_0^{2^n} (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (3.1)$$

Отметим, что равенство (3.1) можно записать в виде

$$\Lambda_n^\alpha(x) = \tilde{\psi}_n^\alpha(x), \quad (3.2)$$

где

$$\psi_n^\alpha(x) = \begin{cases} (h(x))^{-\alpha} X_{[0,2^n)}(x) & \text{для } x > 0, \\ 0 & \text{для } x = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Функция $\psi_n^\alpha(x)$ при $\alpha > 0$ интегрируема и W -непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Поэтому из (3.1) и (3.2) на основании следствия 1.5 и теоремы С следует, что $\tilde{\Lambda}_n^\alpha(x) = \psi_n^\alpha(x)$ на $\mathbb{R}_+$. В частности, $\tilde{\Lambda}_n^\alpha(0) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Если для функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует такая функция $\varphi \in L(\mathbb{R}_+)$, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * \Lambda_n^\alpha - \varphi\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0, \quad (3.4)$$

то функцию $\varphi \equiv D^{(\alpha)}(f)$ назовем *модифицированной сильной двоичной производной* (МСДП) *порядка α функции f* .

ТЕОРЕМА 3.1. Если $\varphi, f \in L(\mathbb{R}_+)$, то функция φ является МСДП порядка $\alpha > 0$ от функции f тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\varphi}(0) = 0, \quad \tilde{\varphi}(x) = \tilde{f}(x)(h(x))^{-\alpha}, \quad x > 0. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть функция φ является МСДП порядка $\alpha > 0$ от функции f . Тогда выполняется равенство (3.4). Поэтому существует равномерный на $\mathbb{R}_+$ предел

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x) \tilde{\Lambda}_n^\alpha(x). \quad (3.6)$$

Так как $\tilde{\Lambda}_n^\alpha(x) = \psi_n^\alpha(x)$ на $\mathbb{R}_+$, то из (3.3) и (3.6) вытекают равенства (3.5).

Достаточность. Пусть для функций $\varphi, f \in L(\mathbb{R}_+)$ выполняются равенства (3.5). Тогда из (1.6) и (3.5) имеем

$$S_{2^n}(\varphi)(x) = \int_0^{2^n} \tilde{\varphi}(t) \psi(x, t) dt. \quad (3.7)$$

С другой стороны, используя (3.2) и (3.3), имеем

$$(f * \Lambda_n^\alpha)^\sim = \tilde{f} \tilde{\Lambda}_n^\alpha = \tilde{f} h^{-\alpha} X_{[0, 2^n]}.$$

Поэтому

$$(f * \Lambda_n^\alpha)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (f * \Lambda_n^\alpha)^\sim(t) \psi(x, t) dt = \int_0^{2^n} \tilde{f}(t)(h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt.$$

Отсюда на основании (3.5) получаем

$$(f * \Lambda_n^\alpha)(x) = \int_0^{2^n} \tilde{\varphi}(t) \psi(x, t) dt.$$

Из этого равенства и из (3.7) имеем $S_{2^n}(\varphi)(x) = (f * \Lambda_n^\alpha)(x)$ для всех $n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}_+$. Но согласно теореме Е

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_{2^n}(\varphi) - \varphi\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * \Lambda_n^\alpha - \varphi\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0,$$

т.е. $\varphi = D^{(\alpha)}(f)$. Теорема доказана.

Для сильной двоичной производной первого порядка в смысле Бутцера–Вагнера результат, подобный теореме 3.1, доказан в работе [16]. При другом определении МСДП порядка $\alpha > 0$ теорема 3.1 фактически доказана в работе [21].

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если у функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует МСДП $D^{(\alpha)}(f)$ порядка $\alpha > 0$ и выполняется равенство $\tilde{f}(0) = 0$, то у $D^{(\alpha)}(f)$ существует МСДИ порядка α , причем $J_\alpha(D^{(\alpha)}(f)) = f$.

Действительно, в предположениях следствия на основании теоремы 3.1 справедливы равенства $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}(x) = D^{(\alpha)}(f) \sim (x)(h(x))^\alpha$, $x > 0$. Но тогда согласно теореме 2.1 заключаем, что $f = J_\alpha(D^{(\alpha)}(f))$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\alpha, \beta > 0$ и функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ имеет МСДП $\varphi = D^{(\alpha)}(f)$ порядка α , а функция φ имеет МСДП $g = D^{(\beta)}(\varphi)$ порядка β . Тогда функция f имеет МСДП $D^{(\alpha+\beta)}(f)$ порядка $\alpha + \beta$, причем $D^{(\alpha+\beta)}(f) = D^{(\beta)}(D^{(\alpha)}(f))$.

Эта теорема доказывается на основании теоремы 3.1 точно так же, как теорема 2.2 доказывается на основании теоремы 2.1.

Для функций на компактной группе G_p (см. введение) результат, аналогичный теореме 3.2, доказан Онневиром [19].

ТЕОРЕМА 3.3. Если у функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ при некотором $\alpha > 0$ существует МСДИ $J_\alpha(f)$, то у $J_\alpha(f)$ существует МСДП порядка α , причем $D^{(\alpha)}(J_\alpha(f)) = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть у функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует МСДИ $J_\alpha(f)$. Нам надо доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|J_\alpha(f) * \Lambda_n^\alpha - f\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 0, \quad (3.8)$$

где Λ_n^α определяется равенством (3.1). Для этого заметим, что $(J_\alpha(f) * \Lambda_n^\alpha)^\sim = J_\alpha(f)^\sim \tilde{\Lambda}_n^\alpha$. Отсюда на основании теоремы 2.1 и равенства $\tilde{\Lambda}_n^\alpha = \tilde{\psi}_n^\alpha$ имеем

$$(J_\alpha(f) * \Lambda_n^\alpha)^\sim(x) = \tilde{f} h^\alpha \psi_n^\alpha(x) = \tilde{f} X_{[0, 2^n)}(x), \quad x > 0. \quad (3.9)$$

Поэтому из (3.9) согласно замечанию 1.1 получим

$$J_\alpha(f) * \Lambda_n^\alpha = \int_0^{2^n} \tilde{f}(y) \psi(\cdot, y) dy = S_{2^n}(f),$$

где $S_y(f)$ – обобщенный интеграл Дирихле–Уолша (1.6). Отсюда на основании теоремы Е следует равенство (3.8). Теорема доказана.

Для $\alpha = 1$ и сильных двоичных производных и интегралов в смысле Бутцера–Вагнера результаты, подобные следствию 3.1 и теореме 3.3, доказаны в работе [16].

На основании теоремы 2.3 у каждой из функций (1.7) существует МСДИ порядка $\alpha > 0$. Поэтому из теорем 3.3 и 2.3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.2. При любом $\alpha > 0$ каждая из функций $a_{m,n}(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, определяемых равенствами (1.7), является собственной функцией оператора $D^{(\alpha)}$, причем $D^{(\alpha)}(a_{m,n}) = 2^{r\alpha} a_{m,n}$, где целое число r однозначно определяется из вложения $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}] \subset [2^r, 2^{r+1})$.

Из этого следствия вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.3. При $\alpha > 0$ справедливы равенства $D^{(\alpha)}(a_{m,0}) = 2^{r\alpha} a_{m,0}$, $2^r \leq m < 2^{r+1}$, где $r = 0, 1, \dots$.

Обозначим через $L_{D^{(\alpha)}}$ множество всех функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$, для каждой из которых существует МСДП $D^{(\alpha)}(f)$. Очевидно, $L_{D^{(\alpha)}}$ является линейным подпространством в $L(\mathbb{R}_+)$. Из следствия 3.4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Линейный оператор $D^{(\alpha)}: L_{D^{(\alpha)}} \rightarrow L(\mathbb{R}_+)$ неограничен.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Функции $a_n \equiv a_{0,n} = 2^{-n} X_{[0,2^n)}$, где $n \in \mathbb{Z}$, имеют МСДП порядка $\alpha > 0$, причем

$$D^{(\alpha)}(a_n)(\cdot) = \int_0^{2^{-n}} (h(t))^{-\alpha} \psi(\cdot, t) dt. \quad (3.10)$$

Для доказательства этого рассмотрим свертку

$$(a_n * \Lambda_k^\alpha)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (a_n * \Lambda_k^\alpha)^\sim(t) \psi(x, t) dt = \int_0^{2^{-n}} \tilde{a}_n(t) (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt.$$

Согласно лемме 1.1 $\tilde{a}_n(t) \equiv \tilde{a}_{0,n}(x) = X_{[0,2^{-n})}(t)$. Поэтому предыдущее равенство при $k > -n$ примет вид

$$(a_n * \Lambda_k^\alpha)(x) = \int_0^{2^k} X_{[0,2^{-n})}(t) (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt = \int_0^{2^{-n}} (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt \equiv F_n(x). \quad (3.11)$$

Правая часть равенства (3.11) не зависит от k , если $k > -n$. Докажем, что $F_n \in L(\mathbb{R}_+)$.

Из (3.11), используя определение (1.8) функции $h(x)$, получим

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{i=n}^{+\infty} \int_{2^{-i-1}}^{2^{-i}} (h(t))^{-\alpha} \psi(x, t) dt = \sum_{i=n}^{+\infty} 2^{-(i+1)\alpha} \int_{2^{-i-1}}^{2^{-i}} \psi(x, t) dt \\ &= \sum_{i=n}^{+\infty} 2^{-(i+1)\alpha} \{D_{2^{-i}}(x) - D_{2^{-i-1}}(x)\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

На основании (1.11) имеем $\|D_{2^{-i}}\|_{L(\mathbb{R}_+)} = 1$, $i \in \mathbb{Z}$. Поэтому из (3.12) вытекает неравенство

$$\|F_n\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leq \sum_{i=n}^{+\infty} 2^{-(i+1)\alpha} = \frac{2^{-(n+1)\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}} < +\infty.$$

Учитывая это и переходя к пределу в равенстве (3.11) при $k \rightarrow +\infty$ по норме пространства $L(\mathbb{R}_+)$, заключаем, что функция a_n имеет МСДП порядка $\alpha > 0$ и справедливо равенство (3.10).

Отметим, что в отличие от функций $a_{m,n}(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, которые являются собственными функциями оператора $D^{(\alpha)}$, $\alpha > 0$, функции $a_{0,n} = 2^{-n} X_{[0,2^n)}$ не являются собственными функциями этого оператора.

Действительно, из (3.12) легко следует, что

$$\tilde{F}_n(0) \equiv \int_{\mathbb{R}_+} F_n(x) dx = 0.$$

Поэтому, учитывая, что $D^{(\alpha)}(a_{0,n}) = F_n$, видим невозможность равенства $D^{(\alpha)}(a_{0,n}) = \lambda_n a_{0,n} = \lambda_n 2^{-n} X_{[0,2^n)}$ ни при какой постоянной λ_n .

4. Модифицированная точечная двоичная производная и интеграл дробного порядка. В работе Бутпера и Вагнера [27] подробно изучалась двоичная точечная производная натурального порядка и ее связь с сильным двоичным интегралом того же порядка. Здесь определяются и изучаются модифицированные точечные двоичные производные и интегралы дробного порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Если $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и при некотором $\alpha > 0$ в точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует конечный предел

$$d^{(\alpha)}(f)(x) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2^n} (h(y))^{-\alpha} \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy, \quad (4.1)$$

то число $d^{(\alpha)}(f)(x)$ назовем *модифицированной двоичной производной (МДП) порядка α функции f в точке x* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Если $\alpha > 0$, а функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ такова, что $h^{-\alpha} \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$, то МДП $d^{(\alpha)}(f)(x)$ существует и W -непрерывна в любой точке $x \in \mathbb{R}_+$, причем

$$d^{(\alpha)}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (h(y))^{-\alpha} \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование конечного предела (4.1) и равенство (4.2) в любой точке $x \in \mathbb{R}_+$ легко следует из условия $h^{-\alpha} \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$ на основании определения 4.1. Таким образом, функция $d^{(\alpha)}(f)(x)$ является преобразованием Фурье–Уолша функции $h^{-\alpha} \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$. Поэтому она W -непрерывна на $\mathbb{R}_+$ (см. [11, с. 417] или [12, с. 129]). Предложение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Если $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и при некотором $\alpha > 0$ в точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует конечный предел

$$j_\alpha(f)(x) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{2^{-n}}^{2^n} (h(y))^\alpha \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy,$$

то число $j_\alpha(f)(x)$ назовем *модифицированным двоичным интегралом (МДИ) порядка α функции f в точке x* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Если $\alpha > 0$, а функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ такова, что $h^\alpha \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$, то МДИ $j_\alpha(f)(x)$ существует и W -непрерывен в любой точке $x \in \mathbb{R}_+$, причем

$$j_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (h(y))^\alpha \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy.$$

Доказательство мы опускаем, поскольку оно аналогично доказательству предложения 4.1.

Следующую теорему можно считать аналогом классической теоремы о дифференцировании интеграла Лебега по его верхнему пределу (см. [28, гл. 9]).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\alpha > 0$, а функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ имеет МСДИ $J_\alpha(f)$ порядка α . Тогда во всякой двоичной точке Лебега $x \in \mathbb{R}_+$ функции f и, следовательно, почти всюду на $\mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$d^{(\alpha)}(J_\alpha(f))(x) = f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 2.1 и равенство (1.6), имеем

$$\int_0^{2^n} (h(y))^{-\alpha} \tilde{J}_\alpha(f)(y) \psi(x, y) dy = \int_0^{2^n} \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy = S_{2^n}(f)(x). \quad (4.3)$$

Если $x \in \mathbb{R}_+$ — двоичная точка Лебега функции f , то правая часть этого равенства при $n \rightarrow +\infty$ стремится к $f(x)$ на основании теоремы Д. Поэтому из равенства (4.3) согласно определению 4.1 вытекает равенство $d^{(\alpha)}(J_\alpha(f))(x) = f(x)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Каждая функция системы (1.7) при $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ имеет МДП порядка $\alpha > 0$ в любой точке $x \in \mathbb{R}_+$, причем $d^{(\alpha)}(a_{m,n})(x) = 2^{r\alpha} a_{m,n}(x)$, где целое число $r = r(m, n)$ однозначно определяется вложением $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}] \subset [2^r, 2^{r+1})$.

Действительно, согласно теореме 2.3 каждая функция системы (1.7) имеет МСДИ любого порядка $\alpha > 0$, причем

$$J_\alpha(a_{m,n}) = 2^{-r\alpha} a_{m,n}, \quad (4.4)$$

где целое число $r = r(m, n)$ однозначно определяется вложением $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}] \subset [2^r, 2^{r+1})$. Но так как для функции $a_{m,n}$ любая точка $x \in \mathbb{R}_+$ является двоичной точкой Лебега, применяя теорему 4.1 к равенству (4.4), имеем

$$a_{m,n}(x) = d^\alpha(J_\alpha(a_{m,n}))(x) = 2^{-r\alpha} d^\alpha(a_{m,n})(x),$$

что эквивалентно утверждению следствия.

Отметим, что для функций $f \in L[0, 1]$ при условии $\int_0^1 f(x) dx = 0$ и натуральных r известно равенство $(I_r f)^{[r]}(x) = f(x)$ почти всюду, где $I_r f(f^{[r]})$ — сильный двоичный интеграл (двоичная точечная производная) порядка r в смысле Бутцера–Вагнера. Это доказал Шипп [29], отвечая на вопрос Вагнера [30]. Для функций $f \in L(\mathbb{R}_+)$, имеющих интеграл первого порядка $I_1 f$ в смысле Бутцера–Вагнера, равенство $(I_1 f)^{[1]}(x) = f(x)$ почти всюду доказали Пал и Шипп (см. [31] или [11, с. 445]). Однако в этих результатах не давалась характеристика точек, составляющих множество полной меры, в которых справедливы указанные равенства.

Следующую теорему можно считать аналогом классической теоремы Лебега о восстановлении функции по ее производной (см. [28, гл. 9]).

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\alpha > 0$, а функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ имеет МСДП $D^{(\alpha)}(f)$ порядка α . Тогда во всякой двоичной точке Лебега $x \in \mathbb{R}_+$ функции f и, следовательно, почти всюду на $\mathbb{R}_+$ справедливо равенство $j_\alpha(D^{(\alpha)}(f))(x) = f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 3.1 и равенство (1.6), имеем

$$\begin{aligned} \int_{2^{-n}}^{2^n} (h(y))^\alpha \tilde{D}^{(\alpha)}(f)(y) \psi(x, y) dy &= \int_{2^{-n}}^{2^n} \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy \\ &= S_{2^n}(f)(x) - \int_0^{2^{-n}} \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Если $x \in \mathbb{R}_+$ — двоичная точка Лебега функции f , то правая часть этого равенства при $n \rightarrow +\infty$ стремится к $f(x)$ на основании теоремы Д и ограниченности преобразования Фурье–Уолша $\tilde{f}$ функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$. Поэтому из равенства (4.5) согласно определению 4.2 вытекает равенство $j_\alpha(D^{(\alpha)}(f))(x) = f(x)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Каждая функция системы (1.7) при $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ имеет МДИ порядка $\alpha > 0$ в любой точке $x \in \mathbb{R}_+$, причем $j_\alpha(a_{m,n})(x) = 2^{-r\alpha} a_{m,n}(x)$, где целое число $r = r(m, n)$ однозначно определяется вложением $[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}] \subset [2^r, 2^{r+1})$.

Это следствие выводится из теоремы 4.2 и следствия 3.3 точно так же, как следствие 4.1 выведено из теорем 4.1 и 2.3.

Аналог теоремы 4.2 доказан в работе [27], где дан критерий того, что почти всюду на $[0, 1]$ справедливо равенство

$$f(x) = \int_0^1 f(t) dt + (I_r f^{[r]})(x),$$

где r натуральное.

ТЕОРЕМА 4.3. Если у функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует МСДП $D^{(\alpha)}(f)$ некоторого порядка $\alpha > 0$ и $h^{-\alpha} \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$, то у функции f в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует МДП $d^{(\alpha)}(f)(x)$ порядка α , причем $D^{(\alpha)}(f)(x) = d^{(\alpha)}(f)(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 4.1 при условиях $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и $h^{-\alpha} \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$ у функции f в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует W -непрерывная МДП $d^{(\alpha)}(f)(x)$, причем

$$d^{(\alpha)}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (h(y))^{-\alpha} \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy. \quad (4.6)$$

А по теореме 2.1 $(D^{(\alpha)}(f))^\sim(x) = (h(x))^{-\alpha} \tilde{f}(x)$ при $x > 0$ и $(D^{(\alpha)}(f))^\sim(0) = 0$. Но так как $D^{(\alpha)}(f) \in L(\mathbb{R}_+)$ и $(D^{(\alpha)}(f))^\sim = h^{-\alpha} \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$, то согласно замечанию 1.1 почти всюду на $\mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$D^{(\alpha)}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (h(y))^{-\alpha} \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy. \quad (4.7)$$

Из (4.6) и (4.7) имеем $d^{(\alpha)}(f)(x) = D^{(\alpha)}(f)(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.4. Если у функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$ существует МСДИ $J_\alpha(f)$ некоторого порядка $\alpha > 0$ и $h^\alpha \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$, то у функции f в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует МДИ $j_\alpha(f)(x)$ порядка α , причем $J_\alpha(f)(x) = j_\alpha(f)(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Доказательство этой теоремы мы опускаем, поскольку оно аналогично доказательству теоремы 4.3.

Отметим, что для ядер Λ_n^α справедливо включение $\Lambda_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$ при $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha > 0$ (см. следствия 1.4 и 1.5). Поэтому свертка $(f * \Lambda_n^\alpha)(x)$ для функций $f \in L(\mathbb{R}_+) \cup L^\infty(\mathbb{R}_+)$ имеет смысл в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$. Этот факт позволяет ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Если $\alpha > 0$ и для функции $f \in L(\mathbb{R}_+) \cup L^\infty(\mathbb{R}_+)$ в точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует конечный предел

$$\bar{d}^{(\alpha)}(f)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f * \Lambda_n^\alpha)(x),$$

то число $\bar{d}^{(\alpha)}(f)(x)$ назовем *двоичной производной (ДП) порядка α функции f в точке x* .

ТЕОРЕМА 4.5. Обобщенная функция Уолша $\psi(\cdot, y) \equiv \psi_y(\cdot)$ имеет ДП порядка $\alpha > 0$ в любой точке $x \in \mathbb{R}_+$, причем $\bar{d}^{(\alpha)}(\psi_0)(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$, а для $y > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство $\bar{d}^{(\alpha)}(\psi_y)(x) \equiv (h(y))^{-\alpha} \psi_y(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\psi_0(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}_+$ и $\tilde{\Lambda}_n^\alpha(0) = 0$, то

$$(\Lambda_n^\alpha * \psi_0)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \Lambda_n^\alpha(t) dt = \tilde{\Lambda}_n^\alpha(0) = 0.$$

Отсюда при $n \rightarrow +\infty$ следует равенство $\bar{d}^{(\alpha)}(\psi_0)(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$. Если же $y > 0$, то, используя равенство (1.4) и равенство $\tilde{\Lambda}_n^\alpha(x) = \psi_n^\alpha(x)$, имеем

$$(\Lambda_n^\alpha * \psi_y)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \Lambda_n^\alpha(t) \psi_y(x \oplus t) dt = \psi_y(x) \int_{\mathbb{R}_+} \Lambda_n^\alpha(t) \psi_y(t) dt = \psi_n^\alpha(y) \psi_y(x), \quad (4.8)$$

где функция ψ_n^α определяется равенством (3.3). Из (4.8) при $n \rightarrow +\infty$ получаем равенство $\bar{d}^{(\alpha)}(\psi_y)(x) = (h(y))^{-\alpha} \psi_y(x)$. Теорема доказана.

Отметим, что ядра W_n^α принадлежат пространству $L(\mathbb{R}_+)$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$ (см. следствие 1.2). Поэтому свертка $(f * W_n^\alpha)(x)$ для функций $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ определена в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$. Этот факт позволяет ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Если $\alpha > 0$ и для функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ в точке $x \in \mathbb{R}_+$ существует конечный предел

$$\bar{j}_\alpha(f)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f * W_n^\alpha)(x),$$

то число $\bar{j}_\alpha(f)(x)$ назовем *двоичным интегралом (ДИ) порядка α функции f в точке x* .

ТЕОРЕМА 4.6. *Обобщенная функция Уолша $\psi(\cdot, y) \equiv \psi_y(\cdot)$ имеет ДИ порядка $\alpha > 0$ в любой точке $x \in \mathbb{R}_+$, причем $\bar{j}_\alpha(\psi_0)(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$, а для $y > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство $\bar{j}_\alpha(\psi_y)(x) = (h(y))^\alpha \psi_y(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\psi_0(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}_+$, на основании следствия 1.3 имеем $(W_n^\alpha * \psi_0)(x) = \widetilde{W}_n^\alpha(0) = 0$. Отсюда при $n \rightarrow +\infty$ следует равенство $\bar{j}_\alpha(\psi_0)(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$.

Если же $y > 0$, то, используя равенство (1.4) и лемму 1.4, имеем

$$(W_n^\alpha * \psi_y)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} W_n^\alpha(t) \psi_y(x \oplus t) dt = \psi_y(x) \int_{\mathbb{R}_+} W_n^\alpha(t) \psi_y(t) dt = \varphi_n^\alpha(y) \psi_y(x), \quad (4.9)$$

где функция φ_n^α определяется равенством (1.12). Из (4.9) при $n \rightarrow +\infty$ получаем равенство $\bar{j}_\alpha(\psi_y)(x) = (h(y))^\alpha \psi_y(x)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Нетрудно доказать, что функция $\varphi = X_{[0,1]}$ имеет ДП порядка $\alpha > 0$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$, причем $\bar{d}^{(\alpha)}(\varphi)(x) = (2^{\alpha+1} - 1)^{-1}$ для $x \in [0, 1)$ и

$$\bar{d}^{(\alpha)}(\varphi)(x) = -(1 - 2^{-\alpha}) \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k(\alpha+1)} X_{[0, 2^k)}(x)$$

для $x \geq 1$. Эта же функция имеет ДИ порядка $\alpha \in (0, 1)$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ и ни в одной точке $x \in \mathbb{R}_+$ не имеет ДИ порядка $\alpha \geq 1$.

Сравнивая эти результаты с двумя доказанными выше формулами $\bar{d}^{(\alpha)}(\psi_0)(x) \equiv 0$ и $\bar{j}_\alpha(\psi_0)(x) \equiv 0$, где $\psi_0(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}_+$, можно заключить, что наличие в данной точке ДП или ДИ порядка $\alpha > 0$ не является локальным свойством функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Если функция $f \in L(\mathbb{R}_+)$ при некотором $\alpha > 0$ удовлетворяет условию $h^\alpha \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$ (или условию $h^{-\alpha} \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$), то она имеет ДИ $\bar{j}_\alpha(f)(x)$ (соответственно ДП $\bar{d}^{(\alpha)}(f)(x)$) почти всюду на $\mathbb{R}_+$, причем $\bar{j}_\alpha(f)(x) = j_\alpha(f)(x)$ (соответственно $\bar{d}^{(\alpha)}(f)(x) = d^{(\alpha)}(f)(x)$) почти всюду.

Действительно, если $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и $h^\alpha \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$, то из равенства $(f * g)^\sim = \tilde{f} \tilde{g}$ и леммы 1.4 имеем

$$\begin{aligned} (f * W_n^\alpha)(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{f}(y) \widetilde{W}_n^\alpha(y) \psi(x, y) dy \\ &\equiv \int_{2^{-n}}^{+\infty} (h(y))^\alpha \tilde{f}(y) \psi(x, y) dy \quad \text{почти всюду на } \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

При $n \rightarrow +\infty$ правая часть этого равенства всюду на $\mathbb{R}_+$ имеет конечный предел $j_\alpha(f)(x)$. Значит, почти всюду на $\mathbb{R}_+$ существует и предел левой части $\bar{j}_\alpha(f)(x)$, совпадающий с $j_\alpha(f)(x)$.

Аналогично, при условиях $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и $h^{-\alpha} \tilde{f} \in L(\mathbb{R}_+)$ доказывается равенство $\bar{d}^{(\alpha)}(f)(x) = d^{(\alpha)}(f)(x)$ почти всюду, причем правая часть существует всюду на $\mathbb{R}_+$.

Рассмотрим вопрос о точечном двоичном дифференцировании преобразования Фурье–Уолша.

ТЕОРЕМА 4.7. Если $\alpha > 0$, $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и $h^{-\alpha}f \in L(\mathbb{R}_+)$, то в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ преобразование Фурье–Уолша f имеет ДП $\bar{d}^\alpha(f)(x)$ порядка α , причем $\bar{d}^\alpha(\tilde{f})(x) = (h^{-\alpha}f)^\sim(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом $x \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$(\tilde{f} * \Lambda_n^\alpha)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{f}(u) \Lambda_n^\alpha(x \oplus u) du = \int_{\mathbb{R}_+} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \psi(u, t) dt \right\} \Lambda_n^\alpha(x \oplus u) du. \quad (4.10)$$

Поскольку $|\psi(u, t)| \equiv 1$ и $f \in L(\mathbb{R}_+)$, $\Lambda_n^\alpha \in L(\mathbb{R}_+)$, на основании теоремы Фубини в повторном интеграле (4.10) можно поменять порядок интегрирования. В результате получим

$$\begin{aligned} (\tilde{f} * \Lambda_n^\alpha)(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \Lambda_n^\alpha(x \oplus u) \psi(u, t) du \right\} f(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \Lambda_n^\alpha(u) \psi(x \oplus u, t) du \right\} f(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь равенством (1.4), имеем

$$(\tilde{f} * \Lambda_n^\alpha)(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \Lambda_n^\alpha(u) \psi(u, t) du \right\} f(t) \psi(x, t) dt = \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{\Lambda}_n^\alpha(t) f(t) \psi(x, t) dt. \quad (4.11)$$

Учитывая равенство $\tilde{\Lambda}_n^\alpha(x) = \psi_n^\alpha(x)$ и (3.3), перепишем равенство (4.11) в виде

$$(\tilde{f} * \Lambda_n^\alpha)(x) = \int_0^{2^n} (h(t))^{-\alpha} f(t) \psi(x, t) dt. \quad (4.12)$$

Поскольку $h^{-\alpha}f \in L(\mathbb{R}_+)$, при $n \rightarrow +\infty$ правая часть в (4.12) имеет конечный предел $(h^{-\alpha}f)^\sim(x)$, а предел левой части по определению равен $\bar{d}^\alpha(\tilde{f})(x)$. Теорема доказана.

Теперь перейдем к вопросу о точечном двоичном интегрировании дробного порядка преобразования Фурье–Уолша.

ТЕОРЕМА 4.8. Если $\alpha > 0$, $f \in L(\mathbb{R}_+)$ и $h^\alpha f \in L(\mathbb{R}_+)$, то в каждой точке $x \in \mathbb{R}_+$ преобразование Фурье–Уолша f имеет ДИ $\bar{j}_\alpha(f)(x)$ порядка α , причем $\bar{j}_\alpha(\tilde{f})(x) = (h^\alpha f)^\sim(x)$.

Доказательство этой теоремы мы не приводим, поскольку оно аналогично доказательству теоремы 4.7.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
- [2] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [3] Sneddon I. N. The Use of Operators of Fractional Integration in Applied Mathematics. Appl. Mech. Ser. Warszawa-Poznan: PWN, 1979.
- [4] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
- [5] Butzer P. L., Nessel R. J. Fourier Analysis and Approximation. One-Dimensional Theory. V. 1. Basel-Stuttgart: Birkhäuser-Verlag, 1971.
- [6] Butzer P. L., Trebels W. Hilberttransformation, gebrochene Integration und Differentiation. Köln-Opladen: Westdeutschen-Verlag, 1968.

- [7] Davis H. T. The Theory of Linear Operators. Bloomington: Principia Press, 1936.
- [8] Gibbs J. E. Walsh Spectrometry, a Form of Spectral Analysis Well Suited to Binary Digital Computation. Teddington: Nat. Phys. Lab., UK, 1967.
- [9] Fine N. J. The generalized Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 69. P. 66–77.
- [10] Stanković R. S., Gibbs J. E. Bibliography of Gibbs derivatives // Theory and Applications of Gibbs Derivatives. Proc. First Intern. Workshop on Gibbs Derivatives (Kupari–Dubrovnik, September 26–28, 1989). Beograd: Math. Institute, 1989. P. XIV–XXIV.
- [11] Schipp F., Wade W. R., Simon P. Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. Budapest: Akademiai Kiado, 1990.
- [12] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.
- [13] Butzer P. L., Wagner H. J. Walsh series and the concept of a derivative // Appl. Anal. 1973. V. 3. № 1. P. 29–46.
- [14] Butzer P. L., Wagner H. J. A calculus for Walsh functions defined on $\mathbb{R}_+$ // Proc. Symp. Naval Res. Laboratory (April 18–20, 1973). Washington, DC. P. 75–81.
- [15] Pal J. On the connection between the concept of a derivative defined on the dyadic field and the Walsh–Fourier transform // Ann. Sci. Univ. Budapest. Sect. Math. 1975. V. 18. P. 49–54.
- [16] Wagner J. H. On dyadic calculus for functions defined on $\mathbb{R}_+$ // Theory and Applications of Walsh Functions. Proc. Symp: Hatfield Polytechnic, 1975. P. 101–129.
- [17] Onneweer C. W. Differentiation on p -adic or p -series field // Linear Spaces and Approximation. Intern. Ser. Numer. Math. V. 40. Basel: Birkhäuser, 1978. P. 187–198.
- [18] Onneweer C. W. On the definition of dyadic differentiation // Appl. Anal. 1979. V. 9. P. 267–278.
- [19] Onneweer C. W. Fractional differentiation on the group of integers of a p -adic or p -series field // Anal. Math. 1977. V. 3. P. 119–130.
- [20] Zelin He. The derivative and integrals of fractional order in Walsh–Fourier analysis with applications to approximation theory // J. Approximation Theory. 1983. V. 39. P. 361–373.
- [21] Onneweer C. W. Fractional derivatives and Lipschitz spaces on local fields // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 258. P. 923–931.
- [22] Голубов Б. И. О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 4. С. 37–60.
- [23] Голубов Б. И. Об аналоге неравенства Харди для преобразования Фурье–Уолша // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 3. С. 3–14.
- [24] Голубов Б. И. Об ограниченности двоичных операторов Харди и Харди–Литтлвуда в двоичных пространствах H и BMO // Anal. Math. 2000. Т. 26. С. 287–298.
- [25] Голубов Б. И. Двоичный аналог тауберовой теоремы Винера и смежные вопросы // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 1. С. 33–58.
- [26] Pal J., Schipp F. On the dyadic differentiability of dyadic integral functions on $\mathbb{R}^+$ // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Computatoria. 1987. V. 8. P. 91–108.
- [27] Butzer P. L., Wagner H. J. On dyadic analysis based on pointwise dyadic derivative // Anal. Math. 1975. V. 1. P. 171–196.
- [28] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
- [29] Schipp F. Über einen Ableitungsbegriff von P. L. Butzer und H. J. Wagner // Math. Balkanica. 1974. V. 4. P. 541–546.
- [30] Wagner J. H. Ein Differential- und Integralkalkül in der Walsh–Fourier Analysis mit Anwendungen. Köln–Opladen: Westdeutscher-Verlag, 1974.
- [31] Pal J., Schipp F. On the a.e. dyadic differentiability of dyadic integral on $\mathbb{R}_+$ // Theory and Applications of Gibbs Derivatives. Proc. First Intern. Workshop on Gibbs Derivatives (Kupari–Dubrovnik, September 26–28, 1989). Beograd: Math. Institute, 1989. P. 103–113.