Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Садуллаев, С. А. Имомкулов, Продолжение сепаратно-аналитических функций, заданных на части границы области, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 234–243

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2692>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 11:38:34

ПРОДОЛЖЕНИЕ СЕПАРАТНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ

А. С. Садуллаев, С. А. Имомкулов

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – область с гладкой границей ∂D , $E \subset \partial D$ – граничное подмножество положительной меры Лебега, $\text{mes}(E) > 0$, а $F \subset G$ – неплюриполярный компакт в сильно псевдовыпуклой области $G \subset \mathbb{C}^m$. В работе доказано, что любая сепаратно-аналитическая на множестве $X = (D \times F) \cup (E \times G)$ функция, с некоторым дополнительным условием, голоморфно продолжается в область $\hat{X} = \{(z, w) \in D \times G : \omega_{\text{in}}^*(z, E, D) + \omega^*(w, F, G) < 1\}$, где ω^* – P -мера, а ω_{in}^* – внутренняя P -мера.

Библиография: 13 названий.

Фундаментальная теорема Хартогса [1] (см. также [2]) утверждает, что если функция $f(z)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}^n$ по каждому из переменных z_j , $j = 1, 2, \dots, n$, то она будет голоморфной в D и по совокупности переменных.

Важный прикладной результат, развивающий теорему Хартогса, связан с сепаратно-аналитическими функциями, где аналитичность $f(z)$ по каждому переменному требуется не для всех фиксированных остальных переменных. Пусть даны две области $D \subset \mathbb{C}^n$, $G \subset \mathbb{C}^m$ и два множества $E \subset D$, $F \subset G$. Предположим, что функция $f(z, w)$ первоначально определенная на множестве $E \times F$ обладает следующими свойствами:

- а) для любого фиксированного $w^0 \in F$ функция $f(z, w^0)$ голоморфно продолжается в D ;
- б) для любого фиксированного $z^0 \in E$ функция $f(z^0, w)$ голоморфно продолжается в G .

В этом случае $f(z, w)$ определяет некоторую функцию на множестве $X = (D \times F) \cup (E \times G)$, которая называется *сепаратно-аналитической* функцией.

Задача состоит в том, чтобы определить область $\hat{X}$, $X \subset \hat{X}$, куда функция $f(z, w)$ голоморфно продолжается по совокупности переменных. Впервые эта задача поставлена Хукухарой [3]. В одномерном случае $n = m = 1$ поставленная задача решена Сичаком [4], а в общем случае Захарютой (полное доказательство этого результата приведено в работах [5], [6]). Пусть $f(z, w)$ – сепаратно-аналитическая функция на множестве $X = (D \times F) \cup (E \times G)$, где $D \subset \mathbb{C}^n$, $G \subset \mathbb{C}^m$ – сильно псевдовыпуклые области и $E \subset D$, $F \subset G$ – замкнутые неплюриполярные множества. Тогда $f(z, w)$ голоморфно продолжается в область

$$\hat{X} = \{(z, w) \in D \times G : \omega^*(z, E, D) + \omega^*(w, F, G) < 1\},$$

где ω^* обозначает хорошо известную P -меру. Она определяется как экстремальная плюрисубгармоническая (psh) функция

$$\omega^*(z, E, D) = \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow z} \omega(\zeta, E, D),$$

где

$$\omega(z, E, D) = \sup\{u \in \text{psh}(D) : u|_D \leq 1, u|_E \leq 0\}.$$

P -мера множества $E \subset D$ и ее свойства подробно изучены в работах [7]–[9].

Гончаром [10], [11] доказана следующая теорема, которая является граничным вариантом теоремы о сепаратно-аналитических функциях. Пусть D и G – плоские жордановы области с гладкими границами, и пусть $E \subset \partial D$, $F \subset \partial G$ – граничные дуги. Если функция $f(z, w)$ непрерывна на множестве $((D \cup E) \times F) \cup (E \times (G \cup F))$ и сепаратно-аналитическая на $(D \times F) \cup (E \times G)$, то $f(z, w)$ голоморфно продолжается в область

$$\widehat{X} = \{(z, w) \in D \times G : \omega(z, E, D) + \omega(w, F, G) < 1\},$$

где ω – гармоническая мера.

Доказательство этой теоремы опирается на интегральную формулу Карлемана о восстановлении голоморфной функции по ее значениям, заданным на части границы $E \times F \subset \partial D \times \partial G$, и поэтому здесь существенно, чтобы области D и G были плоскими. Тем не менее, имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – область с гладкой границей ∂D , $E \subset \partial D$ – граничное подмножество положительной меры Лебега, $\text{mes}(E) > 0$, а $F \subset G$ – неплюриполярный компакт в сильно псевдовыпуклой области $G \subset \mathbb{C}^m$. Предположим, что функция $f(z, w)$, заданная на множестве $E \times F$, удовлетворяет следующим условиям сепаратной аналитичности (на $X = (D \times F) \cup (E \times G)$):

- а) для любого фиксированного $w^0 \in F$ функция $f(z, w^0)$ является сужением некоторой ограниченной голоморфной функции $\psi_{w^0}(z) \in O(D) \cap L^\infty(\overline{D})$, причем в каждой точке $\xi \in E$ угловой предел $\psi_{w^0}^*(\xi)$ существует и равен $f(\xi, w^0)$;
- б) для любого фиксированного $z^0 \in E$ функция $f(z^0, w)$, определенная на F , является сужением некоторой голоморфной функции $\Phi_{z^0}(w) \in O(G)$: $\Phi_{z^0}(w) = f(z^0, w)$ для всех $w \in F$.

Тогда $f(z, w)$ определяет некоторую сепаратно-аналитическую функцию на множестве X и голоморфно продолжается в область

$$\widehat{X} = \{(z, w) \in D \times G : \omega_{\text{in}}^*(z, E, D) + \omega^*(w, F, G) < 1\}.$$

Здесь O обозначает алгебру голоморфных функций и $\omega_{\text{in}}^*(z, E, D)$ – так называемая внутренняя P -мера граничного множества $E \subset \partial D$ (см. ниже п. 1).

Доказательство теоремы опирается на методы комплексной теории потенциала и теории пространств аналитических функций (см. [12], [5], [7]–[9]). В следующих двух пунктах мы приведем вкратце суть этих методов.

1. Чтобы перейти к граничному варианту сепаратно-аналитических функций, нам нужно понятие P -меры граничных множеств.

Пусть D – область с гладкой границей и $u(z)$ – (плюри)субгармоническая в D функция. Доопределим функцию $u(z)$ до границы области следующим образом:

$$\tilde{u}(\xi) = \sup_{\alpha > 1} \overline{\lim}_{A_\alpha(\xi) \ni z \rightarrow \xi} u(z), \quad \xi \in \partial D,$$

где $A_\alpha(\xi)$ представляет собой пересечение области D и конуса с вершиной в точке ξ :

$$A_\alpha(\xi) = \{z \in D : |z - \xi| < \alpha \rho(z, T_\xi)\}.$$

Здесь $\xi \in \partial D$, $\alpha > 1$, $\rho(z, T_\xi)$ – расстояние от точки z до касательной плоскости T_ξ к ∂D в точке ξ . Далее всюду в качестве граничного значения (плюри)субгармонической в D функции $u(z)$ мы будем брать, не оговаривая это каждый раз, значение $\tilde{u}(\xi)$, $\xi \in \partial D$.

P -мерой граничного множества $E \subset \partial D$ относительно области D называется плюрисубгармоническая в области D функция

$$\omega^*(z, E, D) = \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow z} \omega(\zeta, E, D), \quad z \in D,$$

где

$$\omega(z, E, D) = \sup\{u \in \text{psh}(D) : u|_D \leq 1, \tilde{u}|_E \leq 0\}.$$

Как и в случае $E \subset D$, для граничных подмножеств $E \subset \partial D$ функция $\omega(z, E, D)$ либо тождественно равна 1, либо нигде в D не равна 1. В первом случае существует ограниченная сверху плюрисубгармоническая в D функция $u(z) \not\equiv -\infty$ такая, что $\tilde{u}|_E = -\infty$, и поэтому такое множество E естественно назвать *плюриполярным граничным множеством*. Свойства P -меры граничных множеств изучены недостаточно. В частности, не известны следующие очень важные факты, которые хорошо известны для P -меры внутренних подмножеств области D .

ВОПРОС 1. Если $E_j \subset E_{j+1} \subset \partial D$, $j = 1, 2, \dots$, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, то верно ли, что $\omega^*(z, E_j, D) \downarrow \omega^*(z, E, D)$?

ВОПРОС 2. Является ли подмножество неплюрирегулярных точек множества $E \subset \partial D$ плюриполярным множеством?

Напомним, что точка $\xi \in E$, для которой $\tilde{\omega}^*(\xi, E, D) = 0$, называется *плюрирегулярной* и, следовательно, точка $\xi \in E$, для которой $\tilde{\omega}^*(\xi, E, D) > 0$, называется *неплюрирегулярной точкой*.

Заметим, что в одномерном случае ($n = 1$) множества $E \subset \partial D$ положительной меры и только они являются неполярными, т.е. $\omega^*(z, E, D) < 1$, $z \in D$, причем для них почти во всех точках $\xi \in E$ $\tilde{\omega}^*(\xi, E, D) = 0$.

В многомерном случае множества $E \subset \partial D$ с положительной мерой Лебега на ∂D также обладают этими свойствами: $\omega^*(z, E, D) < 1$ в D и почти все точки E являются

плюрирегулярными. Однако далеко не все подмножества $E \subset \partial D$ меры нуль являются плюриполярными. Заметим, что если $\omega_{\text{sh}}^*(z, E, D)$ – гармоническая мера множества $E \subset \partial D$, определяемая при помощи класса субгармонических функций $\text{sh}(D)$ как

$$\begin{aligned}\omega_{\text{sh}}(z, E, D) &= \sup\{u \in \text{sh}(D) : u|_D \leq 1, \tilde{u}|_E \leq 0\}, \\ \omega_{\text{sh}}^*(z, E, D) &= \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow z} \omega_{\text{sh}}(\zeta, E, D), \quad z \in D,\end{aligned}$$

то $\omega^*(z, E, D) \leq \omega_{\text{sh}}^*(z, E, D)$.

Из свойств гармонической меры вытекает, что $\omega_{\text{sh}}^*(z, E_j, D) \downarrow \omega_{\text{sh}}^*(z, E, D)$ при $E_j \uparrow E$, $j \rightarrow \infty$. Однако, аналогичный факт $\omega^*(z, E_j, D) \downarrow \omega^*(z, E, D)$ для P -меры зависит от положительного решения поставленного выше вопроса 1. А пока мы воспользуемся следующей, так называемой внутренней P -мерой граничных множеств.

Положим

$$\omega_{\text{in}}(z, E, D) = \sup\left\{\lim_{j \rightarrow \infty} \omega^*(z, E_j, D)\right\},$$

где супремум берется по всем последовательностям $E_j \subset E_{j+1} \subset E$, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Тогда регуляризация $\omega_{\text{in}}^*(z, E, D)$ является плюрисубгармонической функцией и называется внутренней P -мерой множества E . Ясно, что $\omega^*(z, E, D) \leq \omega_{\text{in}}^*(z, E, D) \leq \omega_{\text{sh}}^*(z, E, D)$ и почти для всех точек $\xi \in E$ угловые пределы $\tilde{\omega}_{\text{in}}^*(\xi, E, D) = 0$.

2. Пусть $F \subset G$ – некоторый неплюриполярный компакт в строго псевдовыпуклой области $G \subset \mathbb{C}^m$. С областью G будем связывать некоторое гильбертово пространство H_0 из цепочки вложенных пространств голоморфных функций

$$O(\overline{G}) \subset H_0 \subset CO(\overline{G}), \quad (1)$$

где $O(\overline{G})$ – пространство голоморфных на замыкании $\overline{G}$ функций, а $CO(\overline{G})$ – пространство голоморфных в G и непрерывных на $\overline{G}$ функций. В качестве H_0 можно взять, например, пространство Соболева $W_2^l \cap O(G)$, $l > m$. Определим также гильбертово пространство H_1 как замыкание пространства $O(\overline{G})$ относительно нормы

$$\|\varphi\|_{H_1} = \left(\int_F |\varphi(w)|^2 d\sigma \right)^{1/2},$$

где $d\sigma = (dd^c \omega^*(w, F, G))^m$ – мера, сосредоточенная на F . Ясно, что H_0 плотно и вполне непрерывно вложено в H_1 . Поэтому существует общий ортогональный базис $h_k(w) \in H_0$ такой, что

$$\|h_k\|_{H_0} = \mu_k, \quad \|h_k\|_{H_1} = 1, \quad \frac{1}{L} k^{1/m} \leq \ln \mu_k \leq L k^{1/m}, \quad L - \text{константа}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(см. [12], [13]). Отметим, что такое конструктивное построение пространства H_1 стало возможным благодаря комплексной теории потенциала, построенной в начале 80-х годов прошлого века. Тесная связь меры $d\sigma$ с плюриполярностью позволяло получить нужную оценку для элементов базиса $\{h_k(w)\}$, которая была использована в работах В. П. Захарюты (докторская диссертация, 1984 г.), Садуллаева [5], Нгуен Тхан Вана и Зериахи [6] и др.

Любой элемент $f \in H_0$ разлагается в ряд

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k h_k,$$

где $a_k = (f, h_k)_{H_0} \cdot \mu_k^{-2} = (f, h_k)_{H_1}$. Приведем некоторые оценки для h_k , которые мы применяем ниже. Из непрерывности вложений (1) вытекает, что

$$\|h_k\|_{\overline{G}} \leq C \cdot \|h_k\|_{H_0} = C \mu_k, \quad (2)$$

где $\|\cdot\|_{\overline{G}}$ – равномерная норма, а C – константа, не зависящая от k .

Теперь рассмотрим множества $A_k = \{z \in F : |h_k(w)| > k\}$. Согласно неравенству Чебышева

$$\sigma(A_k) \leq \frac{1}{k^2} \int_F |h_k(w)|^2 d\sigma = \frac{1}{k^2} \|h_k\|_{H_1}^2 = \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma(A_k) < \infty$ и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma\left(\bigcup_{k=s}^{\infty} A_k\right) = 0.$$

Положим $F_s = F \setminus \bigcup_{k=s}^{\infty} A_k$, $F_0 = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_s$. Тогда $\sigma(F \setminus F_0) = 0$. Отсюда нетрудно показать, что

$$\omega^*(w, F_s, G) \downarrow \omega^*(w, F, G)$$

при $s \rightarrow \infty$. При фиксированном s по построению $|h_k(w)| < k$ для всех $w \in F_s$ и $k \geq s$. Из этого и оценки (2), применяя теорему о двух константах, мы получим

$$|h_k(w)| \leq k^{1-\omega^*(w, F_s, G)} (C \mu_k)^{\omega^*(w, F_s, G)}, \quad k \geq s.$$

Значит, для всех $w \in G$ имеет место оценка

$$|h_k(w)| \leq C(s) k \cdot \mu_k^{\omega^*(w, F_s, G)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $C(s)$ – константа, не зависящая от k .

3. Переходим к доказательству теоремы. Введем обозначение

$$F_N = \left\{ w \in F : \sup_{z \in D} |f(z, w)| \leq N \right\}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Тогда $F = \bigcup_{N=1}^{\infty} F_N$ и, начиная с некоторого N_0 , все F_N , $N \geq N_0$, будут неплюриполярными. Покажем, что $F_N \subset G$ – компакт и функция $f(z, w)$ непрерывна на множестве $D \times F_N$. Фиксируем предельную для F_N точку $w^0 \in F$ и положим

$$\varphi_w(z) = f(z, w) - f(z, w^0), \quad w \in F_N.$$

Тогда семейство $\{\varphi_w(z)\}_{w \in F_N}$ равномерно ограничено и, следовательно, равностепенно непрерывно внутри D . Граничные значения $\varphi_w^*(\xi)$, $\xi \in E$, существуют и

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \varphi_w^*(\xi) = 0,$$

ибо при любом фиксированном $\xi \in E$ по условию теоремы функция $f(\xi, w) \in O(G)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$E_k = \left\{ \xi \in E : |\varphi_w^*(\xi)| < \varepsilon, w \in F_N, |w - w^0| < \frac{1}{k} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда $E_k \subset E_{k+1}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$. Начиная с некоторого k_0 , множества E_k , $k \geq k_0$, имеют положительную меру, т.е.

$$\omega_{\text{sh}}^*(z, E_k, D) < 1, \quad z \in D.$$

По теореме о двух константах, имеем

$$|\varphi_w(z)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{1-\omega_{\text{sh}}^*(z, E_k, D)} \quad k \geq k_0, \quad z \in D, \quad w \in F_N, \quad |w - w^0| < \frac{1}{k}. \quad (4)$$

При фиксированном $z^0 \in D$ существует $k \geq k_0$ такое, что

$$\varepsilon^{1-\omega_{\text{sh}}^*(z^0, E_k, D)} \leq 2 \cdot \varepsilon^{1-\omega_{\text{sh}}^*(z^0, E, D)}.$$

Поэтому для такого k из (4) получим

$$|\varphi_w(z^0)| \leq 2 \text{const} \cdot \varepsilon^{1-\omega_{\text{sh}}^*(z^0, E, D)}, \quad w \in F_N, \quad |w - w^0| < \frac{1}{k}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|w - w^0| < \delta$, $w \in F_N$, имеет место неравенство

$$|f(z^0, w) - f(z^0, w^0)| < \varepsilon.$$

Отсюда, во-первых, вытекает, что $|f(z^0, w^0)| \leq N$, и значит, так как $z^0 \in D$ произвольное, то $w^0 \in F_N$. Во-вторых, вместе с равностепенной непрерывностью $f(z, w)$ по z мы получаем непрерывность $f(z, w)$ в $D \times F_N$, ибо для любой фиксированной точки $(z^0, w^0) \in D \times F_N$ и для достаточно близких к (z^0, w^0) точек $(z, w) \in D \times F_N$ имеем

$$|f(z, w) - f(z^0, w^0)| \leq |f(z, w) - f(z^0, w)| + |f(z^0, w) - f(z^0, w^0)| \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Теперь фиксируем строго псевдовыпуклую область G' такую, что $F \subset G' \subset G$, и построим для $F_N \subset G'$ гильбертово пространство $H_0 \subset H_1$ и общий ортогональный базис $\{h_k(w)\}$, удовлетворяющий условиям (2), (3).

Сопоставим функции $f(z, w)$ формальный ряд Фурье–Хартогса

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z) h_k(w), \quad (5)$$

где $z \in D$, $w \in F_N$ и коэффициенты $a_k(z)$ определяются обычными формулами пространства H_1 :

$$a_k(z) = \int_{F_N} f(z, w) \overline{h_k}(w) d\sigma, \quad k = 1, 2, \dots$$

Покажем, что ряд (5) равномерно сходится внутри области

$$\widehat{X}_N = \{(z, w) \in D \times G' : \omega_{\text{in}}^*(z, E, D) + \omega^*(w, F_N, G') < 1\}.$$

Ясно, что $a_k(z) \in O(D)$ и

$$|a_k(z)| \leq N \int_{F_N} |\overline{h_k}(w)| d\sigma \leq N\sigma(F), \quad z \in D; \quad (6)$$

кроме того, для любого фиксированного $\xi \in E$ угловой предел

$$\overline{\lim}_{A_\alpha(\xi) \ni z \rightarrow \xi} f(z, w) = f(\xi, w)$$

существует для всех $w \in F_N$ и $f(z, w)$ непрерывна на множестве $(\overline{D} \cap A_\alpha(\xi)) \times F_N$, $\alpha > 1$. Поэтому для любого $\xi \in E$ угловые пределы $a_k^*(\xi)$ существуют и

$$a_k^*(\xi) = \int_{F_N} f(\xi, w) \overline{h_k}(w) d\sigma, \quad k = 1, 2, \dots,$$

причем неравенство (6) сохраняется и для $a_k^*(\xi)$, $\xi \in E$.

Для более точной оценки $a_k(z)$ мы воспользуемся голоморфностью $f(\xi, w)$, $\xi \in E$, в области $G \supset \supset G'$. Так как для любого фиксированного $\xi \in E$ функция $f(\xi, w) \in H_0$, то $a_k^*(\xi) = (f, h_k)_{H_1} = \mu_k^{-2} (f, h_k)_{H_0}$. Следовательно,

$$|a_k^*(\xi)| \leq \frac{1}{\mu_k^2} \|f\|_{H_0} \cdot \|h_k\|_{H_0} \leq \frac{\|f\|_{H_0}}{\mu_k}, \quad \xi \in E. \quad (7)$$

Положим $E_j = \{\xi \in E : \|f\|_{H_0} \leq j\}$. Тогда $E_j \subset E_{j+1}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E$. Начиная с некоторого j_0 , все E_j , $j \geq j_0$, имеют положительную меру. Используя (6), (7) и теорему о двух константах, имеем

$$|a_k(z)| \leq (N\sigma(F_N))^{\omega^*(z, E_j, D)} \cdot \left(\frac{j}{\mu_k}\right)^{1-\omega^*(z, E_j, D)}. \quad (8)$$

Теперь используем оценку (3) базиса $h_k(w)$. Построим последовательность $F_{N,s} \subset F_N$ такую, что

$$\omega^*(w, F_{N,s}, G') \downarrow \omega^*(w, F_N, G') \quad \text{при } s \rightarrow \infty$$

и для каждого $k \geq s$ имеет место оценка

$$|h_k(w)| \leq C(s) k \mu_k^{\omega^*(w, F_{N,s}, G')}, \quad w \in G',$$

где $C(s)$ – константа, не зависящая от k . Объединяя это с (8), получим

$$\begin{aligned} |a_k(z)h_k(w)| &\leq C(N, j, s)k\mu_k^{\omega^*(w, F_{N,s}, G')} \mu_k^{\omega^*(z, E_j, D)-1} \\ &\leq C(N, j, s)ke^{L\sqrt[k]{\omega^*(w, F_{N,s}, G')+\omega^*(z, E_j, D)-1}}} \end{aligned} \quad (9)$$

при $N \geq N_0$, $j \geq j_0$, $k \geq s$. Отсюда вытекает, что ряд (5) сходится равномерно внутри открытого множества

$$\widehat{X}_{N,j,s} = \{(z, w) \in D \times G' : \omega^*(z, E_j, D) + \omega^*(w, F_{N,s}, G') < 1\}.$$

Устремив $s \rightarrow \infty$, мы получим, что ряд равномерно сходится внутри области

$$\widehat{X}_{N,j} = \{(z, w) \in D \times G' : \omega^*(z, E_j, D) + \omega^*(w, F_N, G') < 1\}.$$

Затем, устремляя $j \rightarrow \infty$, мы получаем, что ряд (5) равномерно сходится в области

$$\widehat{X}_N = \{(z, w) \in D \times G' : \omega_{\text{in}}^*(z, E, D) + \omega^*(w, F_N, G') < 1\}$$

и его сумма $S(z, w)$ голоморфна в $\widehat{X}_N$.

Докажем, что $S(z, w)$ является голоморфным продолжением функции $f(z, w)$. Для этого воспользуемся оценкой (9). Обозначим через F'_N и E'_j совокупности плюрирегулярных точек соответственно F_N , $N \geq N_0$, и E_j , $j \geq j_0$.

Тогда

$$E'_j \subset E'_{j+1}, \quad \text{mes}(E'_j) = \text{mes}(E_j), \quad j \geq j_0,$$

и если мы положим $E' = \bigcup_{j \geq j_0} E'_j$, то $\text{mes}(E \setminus E') = 0$.

Покажем, что $S(z, w) \equiv f(z, w)$ на $D \times F'_N$ и на $E' \times G$ в смысле угловых пределов: $S^*(\xi, w) \equiv f(\xi, w)$. Действительно, фиксируем $\xi \in E'$ и $w^0 \in G'$. Тогда $\xi \in E'_j$ для некоторого $j \geq j_0$, а $\omega^*(w^0, F_{N,s}, G') = \theta < 1$ для некоторого s . Для любого фиксированного конуса $A_\alpha(\xi)$ и для некоторого $\delta > 0$ P -мера

$$\omega^*(z, E_j, D) < \frac{1-\theta}{2}$$

при всех $z \in A_\alpha(\xi) \cap D \cap \{z : |z - \xi| < \delta\}$ и, значит,

$$(A_\alpha(\xi) \cap D \cap \{z : |z - \xi| < \delta\}) \times \{w^0\} \subset \widehat{X}_{N,j,s}.$$

Рассмотрим на этом множестве оценку

$$\begin{aligned} |S(z, w^0) - f(\xi, w^0)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)h_k(w^0) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^*(\xi)h_k(w^0) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^l |a_k(z) - a_k^*(\xi)| |h_k(w^0)| + \sum_{k=l+1}^{\infty} |a_k(z)h_k(w^0)| + \sum_{k=l+1}^{\infty} |a_k^*(\xi)h_k(w^0)| \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и оценим каждую сумму отдельно. Для $z \in A_\alpha(\xi) \cap D \cap \{z : |z - \xi| < \delta\}$ согласно (9)

$$|a_k(z)h_k(w^0)| \leq C(N, j, s)ke^{L\sqrt[k]{\omega^*(z, E_j, D) + \omega^*(w^0, F_{N,s}, G') - 1}}, \quad k \geq s,$$

где

$$\omega^*(z, E_j, D) + \omega^*(w^0, F_{N,s}, G') - 1 < \frac{1 - \theta}{2} + \theta - 1 < 0.$$

Следовательно, существует натуральное число l такое, что

$$II = \sum_{k=l+1}^{\infty} |a_k(z)h_k(w^0)| < \varepsilon$$

равномерно по z . Сумма III также будет не больше, чем ε , если мы выбираем l достаточно большим, ибо числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^*(\xi)h_k(w^0)$$

является абсолютно сходящимся. Теперь для фиксированного l

$$I = \sum_{k=1}^l |a_k(z) - a_k^*(\xi)| |h_k(w^0)| \rightarrow 0$$

при $z \rightarrow \xi$ из-за непрерывности $a_k(z)$ на $A_\alpha(\xi) \cap \overline{D}$. Таким образом, в силу произвольности ε мы получим, что

$$\lim_{A_\alpha(\xi) \ni z \rightarrow \xi} S(z, w^0) = f(\xi, w^0)$$

и $S^*(\xi, w^0) = f(\xi, w^0)$ на $E' \times G'$.

Для доказательства тождества $S \equiv f$ на $D \times F'_N$ заметим, что $D \times F'_N \subset \widehat{X}_{N,j}$ и поэтому для фиксированного $w^0 \in F'_N$ функция $S(z, w^0) \in O(D)$ и угловые пределы $S^*(\xi, w^0) = f(\xi, w^0)$ на множестве E' , $\text{mes}(E') > 0$.

Остается воспользоваться известной теоремой Привалова о том, что если $D \subset \mathbb{C}$ — плоская область со спрямляемой границей ∂D и $f(z)$ — голоморфная (не обязательно ограниченная!) в D функция, для которой угловые пределы $f^*(\xi)$ равны нулю на некотором множестве $E \subset \partial D$ положительной длины, то $f(z) \equiv 0$ в D .

Рассматривая сечение D всевозможными комплексными прямыми l , для которых $l \cap E'$ имеет положительную длину, мы убедимся, что голоморфная в D функция $S(z, w^0) - f(z, w^0) \equiv 0$. Это означает, что $S \equiv f$ на $D \times F'_N$. Отсюда вытекает, что построенный для $F_N \subset G'$ ряд (5) определяет голоморфную в $\widehat{X}_N$ функцию $S(z, w)$, которая является голоморфным продолжением сепаратно-аналитической функции $f(z, w)$. Так как функция $S(z, w)$ не зависит от N и G' и область G сильно псевдовыпуклая, то устремив $N \rightarrow \infty$ и $G' \rightarrow G$, мы получим голоморфную в области

$$\widehat{X} = \{(z, w) \in D \times G : \omega_{\text{in}}^*(z, E, D) + \omega^*(w, F, G) < 1\}$$

функцию $S(z, w)$, которая тождественно равна $f(z, w)$ на множестве $D \times F'$, где $F' = \bigcup_{N=1}^{\infty} F'_N$, и в смысле углового значения на $E' \times G$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hartogs F. Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiben // Math. Ann. 1906. V. 62. P. 1–88.
- [2] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1985.
- [3] Hukuhara M. L'extensions du theoreme d'Osgood et de Hartogs. Kansu-hoteisiki ogobi Oyo-Kaiseki. V. 48, 1930.
- [4] Siciak J. Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of $\mathbb{C}^n$ // Ann. Pol. Math. 1966. V. 22. №1. P. 145–171.
- [5] Садуллаев А. Плюрисубгармонические функции // Соврем. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1985. С. 65–113.
- [6] Nguyen Thanh Van, Zeriah A. Une extension du théorème de Hartogs sur les fonctions séparément analytiques // Analyse Complexe Multivariables / ed. A. Meril. Recents Developments. Rene: Editel, 1991. P. 183–194.
- [7] Садуллаев А. С. Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества // Матем. сб. 1982. Т. 119 (161). №1. С. 96–118.
- [8] Садуллаев А. С. Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях // УМН 1981. Т. 36. №4. С. 53–105.
- [9] Bedford E., Taylor B. A. A new capacity for plurisubharmonic functions // Acta. Math. 1982. V. 149. P. 1–40.
- [10] Gonchar A. A. On analytic continuation from the “edge of the wedge” // Ann. Acad. Sci. Fin. Ser. A I Math. 1985. V. 10. P. 221–225.
- [11] Гончар А. А. К теореме Н. Н. Боголюбова “острие клина” // Тр. МИАН 2000. Т. 228. С. 24–31.
- [12] Захарюта В. П. Экстремальные плюрисубгармонические функции, гильбертовы шкалы и изоморфизмы пространств аналитических функций многих переменных, I, II // Теория функций, функциональный анализ и их приложения 1974. №19. С. 133–157; 1974. №21. С. 65–83.
- [13] Митягин Б. С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // УМН 1961. Т. 16. №4. С. 63–132.

Ургенчский государственный университет
E-mail: sadullaev@mail.ru, sevdi@rambler.ru

Поступило
04.04.2005