Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Новиков, Критерий равномерной сходимости интерполяционного процесса Лагранжа–Якоби, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 254–266

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2693>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:10:18

УДК 517.51

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕССА ЛАГРАНЖА–ЯКОБИ

В. В. Новиков

Получено равномерное и достаточное условие сходимости на отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$ интерполяционного процесса Лагранжа с узлами Якоби. Условие сформулировано в терминах вторых разностей интерполируемой функции и использует ее значения только в узлах интерполяции. В качестве следствий упомянутого результата получен ряд известных признаков равномерной сходимости.

Библиография: 9 названий.

Пусть $\alpha, \beta > -1$ и $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ и нормированных условием $P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$; пусть

$$-1 < x_{n,n} < x_{n-1,n} < \dots < x_{1,n} < 1 \quad (1)$$

– нули многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания.

Для функции $f \in C[-1, 1]$ обозначим через $L_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий ее в узлах n -й строки матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)} = \{x_{k,n} : k = \overline{1, n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Одна из основных проблем теории интерполирования функций связана с поиском условий на $f \in C[-1, 1]$, гарантирующих при фиксированной матрице узлов $\mathfrak{M}$ сходимость к f соответствующего интерполяционного процесса $\{L_n(\mathfrak{M}, f, x)\}$. Большая часть полученных в этой связи результатов формулируется в терминах некоторых структурных свойств функции f и, так или иначе, использует ее значения на всем изучаемом интервале (см., например, [1]–[4]). В то же время, функция из $C[-1, 1]$ вполне определяется своими значениями на счетном всюду плотном в $[-1, 1]$ множестве, а к таким множествам относится большинство матриц $\mathfrak{M} \subset [-1, 1]$. Это дает основание предположить, что условия сходимости интерполяции можно получать, исходя только из интерполяционных данных.

Впервые, насколько нам известно, подобное достаточное условие было получено Приваловым в 1982 г. для $\{L_n^{(-1/2, -1/2)}(f, x)\}$ [5], а через некоторое время им же был найден и критерий [6] сходимости данного процесса. Приведем эти результаты. Пусть

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00060.

$f \in C[-1, 1]$, $n \geq 3$ и

$$\begin{aligned}\tilde{T}_n(f) &:= \max_{-1 \leq p \leq n} \left| \sum_{k \in I_1} \frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{\psi(2k+1, n, p)} \right|, \\ \tilde{R}_n(f) &:= \max_{-1 \leq p \leq n} \left| \sum_{k \in I_2} \frac{f(x_{2k+1,n}) - 2f(x_{2k,n}) + f(x_{2k-1,n})}{\psi(2k, n, p)} \right|,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\psi(m, n, p) &= \begin{cases} p - m & \text{при } |p - m| \leq 3([n/2] + 1), \\ p - m - 2n & \text{при } p - m > 3([n/2] + 1), \end{cases} \\ x_{-j+1,n} &:= x_{j,n}, \quad j = \overline{1, n}, \\ I_1 &= \left\{ k \in \mathbb{Z} : -\left[\frac{n}{2}\right] + 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right] - 1, \psi(2k+1, n, p) \neq 0 \right\}, \\ I_2 &= \left\{ k \in \mathbb{Z} : -\left[\frac{n}{2}\right] + 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right] - 1, \psi(2k, n, p) \neq 0 \right\}.\end{aligned}$$

Тогда условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_n(f) = 0 \quad (2)$$

является достаточным, а условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_n(f) = 0 \quad (3)$$

— необходимым и достаточным для равномерной сходимости на $[-1, 1]$ интерполяционного процесса $\{L_n^{(-1/2, -1/2)}(f, x)\}$. Тот факт, что признак, выраженный условием (2), не использует “избыточной” информации о функции f , обуславливает следующую его важную особенность.

Все известные к моменту выхода работы [5] признаки равномерной сходимости интерполяционного процесса $\{L_n^{(-1/2, -1/2)}(f, x)\}$ обеспечивали также и сходимость ряда Фурье–Чебышева функции f . Отчасти это связано со сходством конструкции полиномов $\{L_n^{(-1/2, -1/2)}(f, x)\}$ и частичных сумм ряда Фурье–Чебышева $\{S_n^{(-1/2, -1/2)}(f, x)\}$. С другой стороны, хорошо известным фактом является отсутствие равносходимости для этих двух последовательностей операторов. Наиболее яркий результат в этом направлении получен Эрдешем и Грюнвальдом [7] в 1938 г.: они построили пример функции $f \in C[-1, 1]$, для которой $\{S_n^{(-1/2, -1/2)}(f, x)\}$ сходится на $[-1, 1]$ равномерно, тогда как $\{L_n^{(-1/2, -1/2)}(f, x)\}$ всюду неограниченно расходится. Как выяснилось, справедливо и в некотором смысле противоположное утверждение [8]: существует непрерывная функция, для которой последовательность $\{L_n^{(-1/2, -1/2)}(f, x)\}$ равномерно сходится, а $\{S_n^{(-1/2, -1/2)}(f, x)\}$ расходится, следовательно, множества функций

$$\begin{aligned}U^{(-1/2, -1/2)} &:= \{f \in C[-1, 1] : S_n^{(-1/2, -1/2)}(f, x) \rightrightarrows f(x)\}, \\ S^{(-1/2, -1/2)} &:= \{f \in C[-1, 1] : L_n^{(-1/2, -1/2)}(f, x) \rightrightarrows f(x)\}\end{aligned}$$

пересекаются, но без включения одного в другое (точнее, в [8] рассмотрен равносильный обсуждаемому тригонометрический случай). Построенная в последней работе функция удовлетворяет условию (2), которое, таким образом, оказывается приспособленным для характеристики поведения именно интерполяционных процессов. Данное обстоятельство и выделяет условие (2) в ряду других известных признаков.

Основным результатом настоящей статьи являются дискретные критерий и признак равномерной сходимости строго внутри отрезка $[-1, 1]$ интерполяционного процесса $\{L_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)\}$ для произвольных $\alpha, \beta > -1$. В качестве следствий выводятся некоторые известные признаки сходимости. Отметим, что вопрос о соотношении множеств $U^{(\alpha, \beta)}$ и $S^{(\alpha, \beta)}$ для произвольных $\alpha, \beta > -1$ остается открытым и один из путей решения, как нам представляется, может быть связан с использованием полученных в данной работе условий.

Приведем необходимые для дальнейшего изложения обозначения и определения. Как обычно, символом ' $\asymp$ ' будем обозначать тот факт, что отношение рассматриваемых выражений ограничено снизу и сверху положительными постоянными для всех указанных значений аргумента; запись $a_n \sim b_n$ означает, что $a_n/b_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, в некоторых случаях, будем опускать второй индекс в выражениях типа $x_k = x_{k,n}$, $\theta_k = \theta_{k,n}$ и т.п.

Пусть $\omega(\delta)$ — *мажоранта модуля непрерывности*, т.е. неубывающая, полуаддитивная, непрерывная на $[0, 2]$ функция такая, что $\omega(0) = 0$, и $\omega(f, \delta)$ — модуль непрерывности функции $f \in C[a, b]$, $[a, b] \subseteq [-1, 1]$. Будем писать $f \in C_\omega[a, b]$, если $\omega(f, \delta) = O(\omega(\delta))$ на $[a, b]$, и $f \in C_{\overline{\omega}}[a, b]$, если для любых x и $\delta > 0$ таких, что $x, x+\delta \in [a, b]$, выполняется неравенство $f(x+\delta) - f(x) \geq -K\omega(\delta)$, где $K > 0$ зависит только от f .

Модулем изменения функции f на отрезке $[a, b] \subseteq [-1, 1]$ называется функция $v: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая следующим образом: $v(0, a, b, f) = 0$, а при $n \geq 1$

$$v(n, a, b, f) = \sup_{\pi_n} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} |f(t_{2k+1}) - f(t_{2k})|,$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям π_n отрезка $[-1, 1]$ посредством точек

$$-1 \leq a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b \leq 1.$$

Если $v(n)$, $n = 0, 1, \dots$, — произвольная неубывающая, выпуклая вверх функция такая, что $v(0) = 0$, то через $V[a, b, v(n)]$ будем обозначать класс функций $f \in C[a, b]$, для которых $v(n, a, b, f) = O\{v(n)\}$.

Пусть, далее, $f \in C[-1; 1]$, $n \geq 3$, отрезок $[a, b] \in (-1, 1)$ и $\varepsilon > 0$ таковы, что $-1 < a - \varepsilon < a < b < b + \varepsilon < 1$. Положим

$$R_n(f) = \max_{m: x_{m,n} \in [a, b]} \left| \sum_{k: 0 < |x_{m,n} - x_{2k,n}| < \varepsilon} \frac{f(x_{2k+1,n}) - 2f(x_{2k,n}) + f(x_{2k-1,n}))}{m - 2k} \right|,$$

$$T_n(f) = \max_{m: x_{m,n} \in [a, b]} \left| \sum_{k: 0 < |x_{m,n} - x_{2k+1,n}| < \varepsilon} \frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{m - 2k - 1} \right|$$

и обозначим

$$\varphi(x) = (1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}, \quad F(x) = \varphi(x)f(x). \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть отрезок $[a, b] \subset (-1, 1)$ и $\varepsilon > 0$ таковы, что $-1 < a - \varepsilon < a < b < b + \varepsilon < 1$. Тогда для равномерной сходимости к $f \in C[-1; 1]$ на отрезке $[a, b]$, интерполяционного процесса $\{L_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)\}$, $\alpha, \beta > -1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(F) = 0. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 2. В предположениях теоремы 1 условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(F) = 0 \quad (6)$$

является достаточным для равномерной сходимости к $f \in C[-1; 1]$ на отрезке $[a, b]$ интерполяционного процесса $\{L_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)\}$, $\alpha, \beta > -1$.

СЛЕДСТВИЕ 1 (Геронимус [1]). Если непрерывная функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-1, 1]$, то соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) = f(x) \quad (7)$$

выполняется равномерно на любом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$ при всех $\alpha, \beta > -1$.

СЛЕДСТВИЕ 2 (Сегё [9]). Если функция $f \in C[-1, 1]$ удовлетворяет условию Дини-Липшица: $f \in C_\omega$ для некоторой ω такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \log n = 0, \quad (8)$$

то соотношение (7) выполняется равномерно на любом отрезке $[-1 + \delta, 1 - \delta]$, где δ удовлетворяет оценкам $0 < \delta < (b - a)/2$.

СЛЕДСТВИЕ 3 (Неваи [2]). Пусть $f \in C[-1, 1]$. Если на интервале $(a, b) \subset [-1, 1]$ функция удовлетворяет одностороннему условию Дини-Липшица, т.е. существует мажоранта ω такая, что верно (8) и $f \in C_{\overline{\omega}}(a, b)$, то соотношение (7) выполняется равномерно на любом отрезке, лежащем внутри (a, b) .

СЛЕДСТВИЕ 4 (Пилипчук [3]). Пусть $[a, b] \subset (-1, 1)$ и функции $\omega(\delta)$ и $v(n)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq j \leq [(n-1)/2]} \left\{ \omega\left(\frac{1}{n}\right) \log j + \sum_{k=j+1}^{[(n-1)/2]} \frac{v(k)}{k^2} \right\} = 0. \quad (9)$$

Тогда для любой функции $f \in C_{\overline{\omega}}[a, b] \cap V[a, b, v(n)]$ и любого числа ε , $0 < \varepsilon < (b-a)/2$, равенство (7) справедливо равномерно на $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$.

Нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1 [9, с. 244]. Пусть $\alpha, \beta > -1$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = n^{-1/2} k(\theta) \cos(N\theta + \gamma) + O(n^{-3/2}), \quad \theta \in (0, \pi), \quad (10)$$

$$k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta-1/2}, \quad N = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad \gamma = -\alpha - \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Здесь величина $O(\cdot)$ равномерно ограничена на $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$, так что

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = O(n^{-1/2}) \quad (12)$$

равномерно на $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$.

ЛЕММА 2 [9, с. 247]. *Справедливы соотношения*

$$\frac{d}{d\theta} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = n^{1/2} k(\theta) (-\sin(N\theta + \gamma) + (n \sin \theta)^{-1}) O(1), \quad (13)$$

$$\frac{d}{d\theta} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta_k) \asymp k^{-\alpha-3/2} n^{\alpha+2}, \quad 0 < \theta_k \leq \frac{\pi}{2}, \quad (14)$$

$$\frac{d}{d\theta} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta_k) = O(n^{1/2}); \quad (15)$$

где $\alpha, \beta > -1$, $cn^{-1} \leq \theta \leq \pi - cn^{-1}$ и величина $O(\cdot)$ в (15) равномерно ограничена для всех k таких, что $\theta_k \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$.

ЛЕММА 3 [4, с. 31]. Пусть $\theta_{k,n} := \arccos x_{k,n}$. Тогда

$$\theta_{k,n} = \frac{1}{n} [\pi k + O(1)], \quad (16)$$

где $O(1)$ равномерно ограничено по $k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$. Если же $\theta_{k,n} \in [a, b] \subset (0, \pi)$, то

$$\theta_{k,n} = N^{-1} \left\{ \left(k - \frac{1}{2} \right) \pi - \gamma + K\pi + \alpha_{k,n} \right\}, \quad (17)$$

K — фиксированное целое число, зависящее только от a, b, α и β , а

$$\alpha_{k,n} = O(N^{-1}) \quad (18)$$

равномерно для всех k и n таких, что $\theta_{k,n} \in [a, b]$.

ЛЕММА 4 [9, с. 480]. Пусть $l_{k,n}^{(\alpha, \beta)}(x)$ — фундаментальный многочлен интерполяции Лагранжа с узлами (1), $\alpha, \beta > -1$. Тогда справедливо представление

$$l_{k,n}^{(\alpha, \beta)}(f, x) = \lambda_{k,n} K_n(x_{k,n}; x), \quad (19)$$

где

$$K_n(t; x) = \sum_{j=0}^{n-1} P_j^{(\alpha, \beta)}(t) P_j^{(\alpha, \beta)}(x)$$

— ядро интегрального оператора частичной суммы Фурье–Якоби,

$$\lambda_{k,n} = \int_{-1}^1 w(x) l_{k,n}^{(\alpha, \beta)}(x) dx$$

— числа Кристоффеля.

ЛЕММА 5 [9, с. 357]. Справедливо равенство

$$\lambda_{k,n} = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{1}{(1-x_{k,n}^2)[P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_{k,n})]^2}, \quad (20)$$

где $k = \overline{0, n}$, $\alpha, \beta > -1$, причем

$$c_n := 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \sim 1 \quad (21)$$

при $n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 6 [4, с. 282]. *Существуют постоянные c_1 и c_2 , зависящие только от α и β , такие, что*

$$\frac{c_1}{n} \leq \theta_{k+1,n} - \theta_{k,n} \leq \frac{c_2}{n}, \quad (22)$$

$$\frac{c_1 k}{n} \leq \theta_{k,n} \leq \frac{c_2 k}{n}, \quad (23)$$

$$\frac{c_1 |m - k|}{n} \leq |\theta_{m,n} - \theta_{k,n}| \leq \frac{c_2 |m - k|}{n}, \quad (24)$$

где $k, m = \overline{0, n}$, $n = 3, 4, \dots$.

ЛЕММА 7 [4, с. 284]. *Равномерно по $x \in [a, b] \subset (-1, 1)$ и k таким, что $x_{k,n} \in [a, b]$, имеем*

$$l_{k,n}^{(\alpha,\beta)}(x) = O\left(\frac{1}{|k - m| + 1}\right), \quad (25)$$

где m определяется из условия $x_{m+1,n} < x \leq x_{m,n}$.

ЛЕММА 8 [9, с. 262]. *Имеет место равенство*

$$K_n(\cos \theta; \cos \varphi) = 2^{-\alpha-\beta-2} k(\theta) k(\varphi) \left\{ \frac{\sin[(N + 1/2)(\varphi + \theta) + 2\gamma]}{\sin((\varphi + \theta)/2)} + \frac{\sin[(N + 1/2)(\varphi - \theta)]}{\sin((\varphi - \theta)/2)} + O(1) \right\}, \quad (26)$$

где $O(1)$ равномерно ограничена на $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$.

ЛЕММА 9 [2]. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Если отрезок $[a, b]$ и число $\varepsilon > 0$ таковы, что $-1 < a - \varepsilon < a < b < b + \varepsilon < 1$, то равномерно для всех $x \in [a, b]$ выполняется оценка*

$$f(x) - L_n^{(\alpha,\beta)}(f, x) = \frac{1}{2} \sum_{|x - x_{k,n}| < \varepsilon} [f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})] l_{k,n}^{(\alpha,\beta)}(x) + O\left\{\omega\left(f; \frac{\log n}{n}\right)\right\}. \quad (27)$$

ЛЕММА 10. *При любом $\delta \in (0, 1)$ равномерно по $x_{k,n} \in [-1 + \delta, 1 - \delta]$ имеем*

$$\lambda_{k,n} k(\theta_{k,n}) = \frac{c_n}{nk(\theta_{k,n})(1 + O(1/n))}. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5

$$\lambda_{k,n} = \frac{c_n}{(1 - x_{k,n}^2) [P_n^{(\alpha,\beta)'}(x_{k,n})]^2} = \frac{c_n}{\sin^2 \theta_{k,n} [P_n^{(\alpha,\beta)'}(x_{k,n})]^2}.$$

Далее, с учетом (13) и (17) найдем

$$\begin{aligned}
 P_n^{(\alpha, \beta)'}(\cos \theta_k) &= \frac{n^{1/2} k(\theta_k)}{\sin \theta_k} \left\{ -\sin \left(\frac{N((k-1/2)\pi - \gamma + K\pi + \alpha_{k,n})}{N} + \gamma \right) + \frac{O(1)}{n \sin \theta_k} \right\} \\
 &= \frac{n^{1/2} k(\theta_k)}{\sin \theta_k} \left\{ (-1)^{k+K-1} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_{k,n} \right) + \frac{O(1)}{n \sin \theta_k} \right\} \\
 &= \frac{n^{1/2} k(\theta_k)}{\sin \theta_k} (-1)^{k+K} \left\{ 1 + O(\alpha_{k,n}^2) + \frac{O(1)}{n \sin \theta_k} \right\} \\
 &= (-1)^{k+K} \frac{n^{1/2} k(\theta_k)}{\sin \theta_k} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

(константа в $O(\cdot)$ зависит от δ). Подставляя полученное выражение, будем иметь

$$\lambda_k k(\theta_k) = k(\theta_k) c_n \sin^{-2} \theta_k [P_n^{(\alpha, \beta)'}(\cos \theta_k)]^{-2} = \frac{k(\theta_k) c_n}{\sin^2 \theta_k} \cdot \frac{\sin^2 \theta_k}{n k^2(\theta_k) (1 + O(1))}.$$

ЛЕММА 11. Пусть отрезок $[a, b]$ и число $\varepsilon > 0$ таковы, что

$$-1 < a - \varepsilon < a < b < b + \varepsilon < 1.$$

Тогда для любой функции $f \in C[-1, 1]$ равномерно по $x \in [a, b]$ выполняется оценка

$$\begin{aligned}
 f(x) - L_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) &= \frac{(-1)^{m+1} c_n \pi^{1/2} k(\theta) \sin \xi \pi}{2^{\alpha+\beta+3}} \\
 &\quad \times \sum_{k: 0 < |x_m - x_{2k}| < \varepsilon} \frac{F(x_{2k+1}) - 2F(x_{2k}) + F(x_{2k-1}))}{m - 2k} + o(1), \quad (29)
 \end{aligned}$$

где функция F , числа m и $\xi \geq 0$ определяются соответственно из условия (4), неравенства

$$x_{m+1} < x \leq x_m, \quad x_0 := 1, \quad x_{n+1} := -1$$

и равенства

$$\theta = \arccos x = N^{-1} \left\{ \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi + \xi \pi - \gamma + K\pi + \alpha_{m,n} \right\}. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$I = I(m, n, \varepsilon) := \{k : 0 < |x_m - x_k| < \varepsilon\}, \quad J = J(m, n, \varepsilon) := \{k : 0 < |x_m - x_{2k}| < \varepsilon\}.$$

Используя лемму 9, можно записать (обозначив $\Delta f_k := f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})$)

$$f(x) - L_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) = \frac{1}{2} \sum_{k \in I} \Delta f_k l_k + o(1).$$

Теперь, с учетом (19) и (26) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I} \Delta f_k l_k &= 2^{-\alpha-\beta-2} k(\theta) \sum_{k \in I} \Delta f_k \lambda_k k(\theta_k) \left\{ \frac{\sin[(N+1/2)(\theta_k + \theta) + 2\gamma]}{\sin((\theta_k + \theta)/2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin[(N+1/2)(\theta_k - \theta)]}{\sin((\theta_k - \theta)/2)} + O(1) \right\} \\ &\equiv S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned}$$

Оценим S_1 . Учитывая (28) и то, что $\sin \theta_k / \sin[(\theta_k + \theta)/2] \leq 2$ для указанных θ и θ_k , имеем

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \frac{C(a, b)}{n} \sum_{k \in I} \left| \Delta f_k c_n k(\theta_k) \frac{\sin[(N+1/2)(\theta_k + \theta) + 2\gamma]}{k(\theta_k)(1 + O(1)) \sin((\theta_k + \theta)/2)} \right| \\ &\leq \frac{C(a, b, \varepsilon)}{n} \sum_{k \in I} \frac{|\Delta f_k|}{k(\theta_k) \sin \theta_k} \cdot \frac{\sin \theta_k}{\sin((\theta_k + \theta)/2)} \\ &\leq \frac{C(a, b, \varepsilon)}{n} \sum_{k \in I} |\Delta f_k| \leq C(a, b, \varepsilon) \omega\left(f, \frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогично,

$$|S_3| \leq \frac{C(a, b, \varepsilon)}{n} \sum_{k \in I} \frac{|\Delta f_k| c_n}{k(\theta_k)(1 + O(1/n))} \leq \frac{C(a, b, \varepsilon)}{n} \sum_{k \in I} |\Delta f_k| \leq C(a, b, \varepsilon) \omega\left(f, \frac{1}{n}\right). \quad (32)$$

Обратимся к сумме S_2 . Прежде всего заметим, что, заменив в S_2 величины $[f(\theta_{i+1}) - f(\theta_i)]/k(\theta_i)$ на $f(\theta_{i+1})/k(\theta_{i+1}) - f(\theta_i)/k(\theta_i)$, мы получим сумму S'_2 , отличающуюся от S_2 на величину порядка $o(1)$ равномерно для всех $x \in [a, b]$.

Действительно, в силу (22) и (25) для всех $i \in I$ имеем (далее константы C могут зависеть от $\alpha, \beta, a, b, \varepsilon$)

$$\left| \frac{f(\theta_{i+1})}{k(\theta_{i+1})} - \frac{f(\theta_i)}{k(\theta_i)} - \frac{f(\theta_{i+1})}{k(\theta_i)} + \frac{f(\theta_i)}{k(\theta_i)} \right| = \left| f(\theta_{i+1}) \left(\frac{1}{k(\theta_i)} - \frac{1}{k(\theta_{i+1})} \right) \right| \leq C \frac{\|f\|}{n},$$

так что с учетом (24)

$$\begin{aligned} |S_2 - S'_2| &\leq \frac{C c_n}{n^2} \left(\sum_{k \in I \setminus \{m; m+1\}} + \sum_{k=m, m+1} \right) \left| \frac{\sin[(N+1/2)(\theta - \theta_k)]}{[1 + O(1/n)] \sin((\theta - \theta_k)/2)} \right| \cdot \|f\| \\ &\leq \frac{C}{n^2} \left\{ \sum_{k \in I \setminus \{m; m+1\}} \frac{1}{|\sin((\theta - \theta_k)/2)|} + 2(2N+1) \right\} \\ &\leq \frac{C}{n^2} \left(\sum_{k \leq m-1} \frac{1}{\theta_m - \theta_k} + \sum_{k \geq m+2} \frac{1}{\theta_k - \theta_{m+1}} \right) + \frac{C}{n} \leq \frac{C \log n}{n} = o(1). \end{aligned}$$

Итак, обозначив $F(\cos \theta) = f(\cos \theta)/k(\theta)$, мы сможем записать

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta)}{n} \sum_{k \in I} \frac{\Delta F_k \sin[(N+1/2)(\theta - \theta_k)]}{[1 + O(1/n)] \sin((\theta - \theta_k)/2)} + o(1) \\ &= \frac{\pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta)}{n} \sum_{k \in I} \frac{\Delta F_k \sin[(N+1/2)(\theta - \theta_k)]}{\sin((\theta - \theta_k)/2)} \\ &\quad + \frac{\pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta)}{n} O\left(\frac{1}{n}\right) O(2N+1) \operatorname{card} I \cdot \omega\left(F|_{\Delta}; \frac{1}{n}\right) + o(1) \\ &= \frac{\pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta)}{n} \sum_{k \in I} \frac{\Delta F_k \sin[(N+1/2)(\theta - \theta_k)]}{\sin((\theta - \theta_k)/2)} + o(1), \end{aligned}$$

где $F|_{\Delta}$ — сужение функции F на множество $\Delta := [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$.

Далее, поскольку

$$\left| \frac{1}{\sin((\theta - \theta_k)/2)} - \frac{1}{(\theta - \theta_k)/2} \right| < \frac{\pi}{12} \left| \frac{\theta - \theta_k}{2} \right| < \frac{\pi^2}{24},$$

получаем

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta)}{n} \sum_{k \in I} \frac{\Delta F_k \sin[(N+1/2)(\theta - \theta_k)]}{\theta - \theta_k} \\ &\quad + \frac{\pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta)}{n} \sum_{k \in I} O(1) \Delta F_k \sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)(\theta - \theta_k)\right] + o(1) \\ &= \frac{\pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta)}{n} \sum_{k \in I} \frac{\Delta F_k \sin[(N+1/2)(\theta - \theta_k)]}{\theta - \theta_k} + o(1). \end{aligned}$$

Теперь, приняв во внимание (16), запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta - \theta_k} - \frac{n}{\pi(m - k)} &= \frac{[(\pi m/n - \theta) + (\theta_k - \pi k/n)]n}{\pi[\theta_m - \theta_k + O(n^{-1})](m - k)} \\ &= \frac{O(n^{-1})n}{\pi[\pi m/n - \pi k/n + O(n^{-1})](m - k)} = \frac{O(1)n}{[m - k + O(1)](m - k)}. \end{aligned}$$

Константа C в $O(\cdot)$ зависит только от α и β , поэтому, взяв $k_0 = k_0(\alpha, \beta) = [C] + 1$, получим $|m - k + O(1)| \geq |m - k| - k_0$, так что

$$\left| \frac{1}{\theta - \theta_k} - \frac{n}{\pi(m - k)} \right| \leq \frac{k_0 n}{(|m - k| - k_0)|m - k|}, \quad |m - k| \geq k_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\left| \frac{c_n k(\theta)}{n} \sum_{k \in I: |k-m| > k_0} \frac{\Delta F_k \sin[(N+1/2)(\theta - \theta_k)]}{\theta - \theta_k} \left(\frac{1}{\theta - \theta_k} - \frac{n}{\pi(m - k)} \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{c_n k(\theta)}{n} \sum_{k \in I: |k-m| > k_0} \frac{\Delta F_k \sin[(N+1/2)(\theta - \theta_k)] k_0 n}{(|m - k| - k_0)|m - k|} \right| \\ &= O\left\{ \omega\left(F|_{\Delta}; \frac{1}{n}\right) \right\} = o(1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_2 &= \pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta) \sum_{k \in I: |k-m| > k_0} \frac{\Delta F_k \sin[(N+1/2)(\theta-\theta_k)]}{m-k} \\ &\quad + \frac{\pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta)}{n} O\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right) \omega\left(F|_{\Delta}; \frac{1}{n}\right)\right\} \cdot 2k_0 + o(1) \\ &= \pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta) \sum_{k \in I} \frac{\Delta F_k \sin[(N+1/2)(\theta-\theta_k)]}{m-k} + o(1). \end{aligned}$$

Далее, в силу леммы 3 имеем

$$\cos\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right) \frac{\theta_{k+1}-\theta_k}{2}\right\} = \cos\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right) N^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_{k+1,n} - \alpha_{k,n}\right)\right\} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

так что

$$\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta_{k+1}) = -\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta_k) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (33)$$

равномерно по указанным k и θ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} S_2 &= -\pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta) \sum_{k \in J} \left(\frac{\Delta F_{2k+1}}{m-2k-1} - \frac{\Delta F_{2k}}{m-2k} \right) \sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta_{2k})\right] \\ &\quad + O\left\{\omega\left(F|_{\Delta}; \frac{1}{n}\right) n^{-1} \log n\right\} + o(1) \\ &= -\pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta) \sum_{k \in J} \frac{\Delta^2 F_{2k}}{m-2k} \sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta_{2k})\right] \\ &\quad + O\left\{\sum_{k \in J} \frac{\omega(F|_{\Delta}; 1/n)}{(m-2k-1)(m-2k)}\right\} + o(1) \\ &= -\pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta) \sum_{k \in J} \frac{\Delta^2 F_{2k}}{m-2k} \sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta_{2k})\right] + o(1). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь выражение

$$B_k := \xi \pi + \alpha_{m,n} - \alpha_{2k,n},$$

где ξ определяется соотношением (30), а $\alpha_{i,n}$ — соотношением (17). Имеем

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k \in J} \left\{ \sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta_{2k}) - (-1)^m \sin B_k \cos \frac{(m-2k)\pi + B_k}{N} \right\} \frac{\Delta^2 F_{2k}}{m-2k} \right| \\ &= \left| (-1)^m \sum_{k \in J} \cos \frac{(m-2k)\pi + B_k}{N} \cos B_k \frac{\Delta^2 F_{2k}}{m-2k} \right| \\ &\leq \sum_{k \in J} \frac{\pi}{N} |\Delta^2 F_{2k}| + \sum_{k \in J} \left| \frac{\Delta^2 F_{2k}}{N(m-2k)} \right| = O\left\{\omega\left(F|_{\Delta}; \frac{1}{n}\right)\right\} = o(1). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\sin B_k &= \sin \xi \pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \cos \frac{(m-2k)\pi + B_k}{N} = \cos \frac{(m-2k)\pi}{N} + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \left| \sum_{k \in J} \frac{1 - \cos((m-2k)\pi/N)}{m-2k} \right| &\leq 2 \sum_{k \in J} \frac{\sin^2((m-2k)\pi/(2N))}{|m-2k|} \\ &\leq \frac{2\pi^2}{N^2} \sum_{k \in J} (m-2k) = O(1),\end{aligned}$$

где $O(\cdot)$ равномерно ограничено для всех указанных k и θ . Получаем

$$\begin{aligned}S_2 &= \pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta) (-1)^{m+1} \sum_{k \in J} \frac{\Delta^2 F_{2k}}{m-2k} \sin B_k \cos \frac{(m-2k)\pi + B_k}{N} + o(1) \\ &= \pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta) (-1)^{m+1} \sin \xi \pi \sum_{k \in J} \frac{\Delta^2 F_{2k}}{m-2k} \cos \frac{(m-2k)\pi + B_k}{N} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k \in J} \frac{\Delta^2 F_{2k}}{m-2k} + o(1) \\ &= \pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta) (-1)^{m+1} \sin \xi \pi \sum_{k \in J} \frac{\Delta^2 F_{2k}}{m-2k} \cos \frac{(m-2k)\pi}{N} + o(1) \\ &= \pi^{1/2} 2^{-\alpha-\beta-2} c_n k(\theta) (-1)^{m+1} \sin \xi \pi \sum_{k \in J} \frac{\Delta^2 F_{2k}}{m-2k} + o(1).\end{aligned}$$

Утверждение леммы теперь следует из полученного выражения для S_2 , соотношений (31) и (32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. *Достаточность* сразу следует из леммы 11. Для доказательства *необходимости* предположим, что (5) нарушено, т.е. существуют последовательности $\{n_i\}_{i=1}^\infty$, $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ и число $q > 0$ такие, что

$$\left| \sum_{k \in J} \frac{\Delta^2 F_{2k}}{m_i - 2k} \right| > q \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$t_i = \cos N_i^{-1} \left\{ \left(m_i - \frac{1}{2} \right) \pi - \gamma + K\pi + \alpha_{m,n} + \frac{\pi}{4} \right\} = \cos \left(\theta_{m_i, n_i} + \frac{\pi}{4N_i} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}|f(x) - L_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)| &= \left| Ck \left(\theta_{m_i, n_i} + \frac{\pi}{4N_i} \right) (-1)^{m+1} \sin \left(\frac{1}{4} R_{n_i, \varepsilon}(F) \right) \right| \\ &\geq C \sin \frac{q}{4} \min k(\theta) = q_1 > 0.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассуждая как при доказательстве леммы 11, трудно проверить, что

$$R_n(F) \leq T_n(F) + \max_{m: x_{m,n} \in [a,b]} \left| \sum_{k: 0 < |x_{m,n} - x_{2k,n}| < \varepsilon} \frac{F(x_{2k,n}) - F(x_{2k-1,n})}{m - 2k} \right| + o(1).$$

Повторяя, с очевидными изменениями, доказательство леммы 1 из [5], убедимся, что первое и второе слагаемые в правой части последнего неравенства одновременно стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, условие (6) влечет условие (5), которое в силу доказанной теоремы 1 равносильно сходимости интерполяционного процесса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЙ. Докажем сначала следствие 4. Обозначим $a' = a + \varepsilon$, $b' = b - \varepsilon$. Очевидно, что равномерно по m выполняется оценка

$$\left| \sum_{k: 0 < |x_m - x_{2k+1}| < \varepsilon} \frac{F(x_{2k+1,n}) - F(x_{2k,n})}{m - 2k - 1} \right| \leq \sum_{k: 0 < |x_k - x_m| < \varepsilon} \left| \frac{\Delta F_k}{m - k} \right|. \quad (34)$$

Обозначим через A множество индексов последней суммы, а через B множество тех $k \in A$, для которых $(F(x_{k+1}) - F(x_k))/(m - k) < 0$, и запишем

$$\sum_{k \in A} \left| \frac{\Delta F_k}{m - k} \right| = \sum_{k \in A} \frac{\Delta F_k}{m - k} - 2 \sum_{k \in B} \frac{\Delta F_k}{m - k} \stackrel{\text{def}}{=} S_1 + S_2.$$

Выберем последовательность номеров $p(n) \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \log p(n) = 0,$$

обозначим

$$A' := \{k \in A : 0 < |m - k| \leq p(n)\}, \quad A'' := \{k \in A : |m - k| > p(n)\}$$

и оценим сумму S_1 , используя преобразование Абеля:

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \sum_{k \in A'} \left| \frac{\Delta F_k}{m - k} \right| + \left| \sum_{k \in A''} \frac{\Delta F_k}{m - k} \right| \\ &\leq \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \log p(n) + \sum_{k \in A: |m-k| \geq p(n)+1} \frac{\|F\|}{(m-k)(m-k+1)} + O\left\{\frac{1}{p(n)}\right\} \\ &= \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \log p(n) + O\left\{\frac{1}{p(n)}\right\} = o(1). \end{aligned} \quad (35)$$

Зафиксируем теперь любой номер j , $1 \leq j \leq [(n-1)/2]$, и введем обозначения

$$B' := \{k \in B : |m - k| \leq j\}, \quad B'' := \{k \in B : |m - k| > j\},$$

тогда будем иметь

$$0 \leq S_2 = -2 \sum_{k \in B} \frac{\Delta F_k}{m - k} \leq -2 \left(\sum_{k \in B'} + \sum_{k \in B''} \right) \frac{\Delta F_k}{m - k} \stackrel{\text{def}}{=} S_1^{(1)} + S_2^{(2)}. \quad (36)$$

В силу ограниченности на $[a, b] \subset (-1, 1)$ функций φ и φ' (см. (4)) условие $f \in C_{\varpi}[a, b] \cap V[a, b, v(n)]$ влечет за собой условие $F \in C_{\varpi}[a, b] \cap V[a, b, v(n)]$. Следовательно, для $k \in B$ будет $\Delta F_k \geq -K_F \omega(1/n)$, поэтому

$$0 \leq S_2^{(1)} \leq C \omega\left(\frac{1}{n}\right) \log j. \quad (37)$$

Сумма $S_2^{(2)}$ оценивается так же, как и S_1 , с помощью преобразования Абеля:

$$\begin{aligned} S_2^{(2)} &\leq -2 \sum_{k \in B''} \frac{\Delta F_k}{m-k} \leq -2 \sum_{k \in B''} \left| \frac{\Delta F_k}{m-k} \right| \\ &\leq 4 \sum_{2k \in B: |m-2k| \geq j+1} \frac{v(|m-k|, a, b, F)}{|m-k|(|m-k|+1)} + O\left\{\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)\right\} \\ &\leq C \sum_{k=j+1}^{[(n-1)/2]} \frac{v(k)}{k^2} + o(1). \end{aligned} \quad (38)$$

Теперь, принимая во внимание соотношения (34)–(38), убеждаемся, что (9) влечет за собой условие (6) для отрезка $[a', b']$ и числа ε , откуда в силу теоремы 2 следует равномерная сходимость на $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$.

В работе [3] показано, что признак из следствия 4 не слабее признака Неваи, частным случаем которого, очевидно, является признак Сегё. Остается доказать следствие 1. Если функция $f \in [a, b]$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, то $v(n, a, b, f)$ ограничена на $\{0\} \cup \mathbb{N}$, так что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v(k, a, b, f)/k^2$ сходится. Выбрав последовательность $\{p(n)\}$ как при выводе соотношения (35), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \log p(n) + \sum_{k=p(n)+1}^{[(n-1)/2]} \frac{v(k, a, b, f)}{k^2} \right\} = 0.$$

Таким образом, интерполяционный процесс сходится в силу следствия 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Геронимус Я. Л. О сходимости интерполяционного процесса Лагранжа с узлами в корнях ортогональных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27. С. 529–560.
- [2] Неваи Г. П. Замечания об интерполировании // Acta Math. Sci. Hungar. 1974. V. 25. P. 123–144.
- [3] Пилипчук С. С. О признаках сходимости интерполяционных процессов // Изв. вузов. Матем. 1979. № 12. С. 39–44.
- [4] Привалов А. А. Теория интерполирования функций. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1990.
- [5] Привалов А. А. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 2. С. 228–243.
- [6] Привалов А. А. Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Изв. вузов. Матем. 1986. № 5. С. 49–59.
- [7] Erdős P., Grünwald G. Über einen Faber'schen Satz // Ann. of Math. 1938. V. 39. P. 257–261.
- [8] Новиков В. В. О расходимости ряда Фурье функции со сходящимся интерполяционным процессом Лагранжа // Analysis Math. 2003. V. 29. P. 289–317.
- [9] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.

Технологический институт
Саратовского государственного технического университета
E-mail: novikov@engels.san.ru

Поступило
16.07.2004