Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Скворцов, Н. Н. Холщевникова, Сравнение двух обобщенных тригонометрических интегралов, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 278–287

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:42:20

УДК 517.5

СРАВНЕНИЕ ДВУХ ОБОБЩЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

В. А. Скворцов, Н. Н. Холщевникова

В работе сравниваются P^2 -интеграл Джеймса и T^2 -интеграл. Строится сходящийся почти всюду тригонометрический ряд, сумма которого T^2 -, но не P^2 -интегрируема. Библиография: 6 названий.

В работе сравниваются P^2 - и T^2 -интегралы. Это *обобщенные тригонометрические интегралы*, т.е. такие обобщающие интеграл Лебега интегралы, которые позволяют всякий всюду сходящийся тригонометрический ряд рассматривать как ряд Фурье в смысле этого интеграла. Как известно, сам интеграл Лебега таким свойством не обладает, например, сумма всюду сходящегося ряда $\sum_{n=2}^{\infty} (\sin nx)/(\ln n)$ не интегрируема по Лебегу на $[0, 2\pi)$. Сходящиеся всюду тригонометрические ряды являются рядами Фурье в смысле $(T_{2s})_0$ и (T_{2s}) тотализаций Данжуа, MZ-интеграла Марцинкевича и Зигмунда, P^2 -интеграла Джеймса, SCP-интеграла Беркилла и ряда других интегралов (см. обзор [1]).

Для дальнейшего нам понадобится ряд определений.

Второй симметрической производной или *второй производной Шварца* функции F , определенной в окрестности точки x , называется

$$D^2 F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{h^2}, \quad \text{где } \Delta_h^2 F(x) = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x).$$

Верхней и нижней производными Шварца называются

$$\overline{D}^2 F(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{h^2} \quad \text{и} \quad \underline{D}^2 F(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{h^2}$$

соответственно.

Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$. Функции $M(x)$ и $m(x)$ называются P^2 -*мажорантой* и P^2 -*минорантой* для f на $[a, b]$, если

- 1) $M(x)$ и $m(x)$ непрерывны на $[a, b]$;
- 2) $M(a) = M(b) = m(a) = m(b) = 0$;
- 3) $\underline{D}^2 M(x) \geq f(x) \geq \overline{D}^2 m(x)$ почти всюду на (a, b) ;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00206.

- 4) $\underline{D}^2 M(x) \neq -\infty$, $\overline{D}^2 m(x) \neq +\infty$ для всех x из (a, b) за исключением, быть может, счетного множества E , на котором $M(x)$ и $m(x)$ гладкие, т.е. для $x \in E$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 M(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 m(x)}{h} = 0.$$

Как известно, из этого определения следует, что разность $M(x) - m(x)$ является выпуклой функцией и, следовательно, $M(x) - m(x) \leq 0$.

Функция f называется P^2 -интегрируемой на (a, x, b) , где $a < x < b$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существуют P^2 -мажоранта M и P^2 -миноранта m такие, что $m(x) - M(x) < \varepsilon$. Если f является P^2 -интегрируемой на (a, x_0, b) для некоторого $a < x_0 < b$, то она является также P^2 -интегрируемой на (a, x, b) для всякого $a < x < b$ и функция

$$\Phi(x) = \sup_M M(x) = \inf_m m(x)$$

(здесь $\sup$ и $\inf$ берутся по множеству всех мажорант и минорант соответственно) называется *неопределенным P^2 -интегралом* или *P^2 -примитивной* для f на $[a, b]$, а $f - P^2$ -интегрируемой на $[a, b]$.

Отметим, что заменить в условии 4) определения P^2 -мажорант и P^2 -минорант исключительное счетное множество E на какое-либо совершенное множество нельзя (при формальном сохранении во всем остальном определения мы просто не получим никаких интегрируемых функций).

По определению для 2π -периодической функции f , имеющей на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$ P^2 -примитивную $\Phi(x)$, *первый определенный P^2 -интеграл* от f по отрезку $[0, 2\pi]$ положим равным $-\Phi(0)/\pi$ и обозначим

$$(P^2) \int_0^{2\pi} f(x) dx = -\frac{\Phi(0)}{\pi}.$$

При таком определении определенного P^2 -интеграла коэффициенты всюду сходящегося тригонометрического ряда задаются обычными формулами Фурье (иногда значение этого интеграла берется равным $-\Phi(0)$ — см. для сравнения [1] и [2]).

Возможность восстановления коэффициентов всюду сходящегося тригонометрического ряда по его сумме подсказывалась теоремой единственности Кантора, в силу которой коэффициенты такого ряда однозначно определяются его суммой. Также однозначно определяется тригонометрический ряд по его сумме вне какого-либо множества единственности. В [3] дано определение T^2 -интеграла, который позволяет восстанавливать коэффициенты тригонометрического ряда, сходящегося вне некоторого совершенного множества единственности. Напомним, что множество $E \subset [0, 2\pi)$ называется *множеством единственности*, кратко *U -множеством*, если из сходимости ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

к нулю на $[0, 2\pi) \setminus E$ следует, что все коэффициенты ряда равны нулю.

В [3] “достаточными” множествами единственности названы некоторые специальные множества единственности, включающие в себя H -множества Райхмана и $H^{(s)}$ -множества Пятецкого-Шапиро (см. [4, гл. 14]). Через F_σ^{SU} обозначим класс всех множеств, которые являются объединениями счетного числа “достаточных” U -множеств.

Непрерывные функции $M(x)$ и $m(x)$ называются T^2 -мажорантой и T^2 -минорантой для f на $[0, 2\pi]$, если

- 1) $M(x) = ax^2 + M_1(x)$ и $m(x) = bx^2 + m_1(x)$, где M_1 и m_1 — 2π -периодические функции с коэффициентами Фурье порядка $o(1/n^2)$;
- 2) $M(2\pi) = m(2\pi) = 0$;
- 3) $\underline{D}^2 M(x) \geq f(x) \geq \overline{D}^2 m(x)$ почти всюду на $(0, 2\pi)$;
- 4) $\underline{D}^2 M(x) \neq -\infty$ и $\overline{D}^2 m(x) \neq +\infty$ для всех $x \in (0, 2\pi)$, за исключением, быть может, множества $E \in F_\sigma^{SU}$.

(Отметим, что из условия 1) следует, что функции M и m гладкие на $(0, 2\pi)$.)

Функция f называется T^2 -интегрируемой на $[0, 2\pi]$, если

$$\sup_M M(0) = \inf_m m(0) = I$$

и (определенный) T^2 -интеграл от f по отрезку $[0, 2\pi]$ есть

$$(T^2) \int_0^{2\pi} f(x) dx = -\frac{I}{\pi}.$$

При этом для любого $x \in [0, 2\pi]$ будет выполняться равенство

$$\sup_M M(x) = \inf_m m(x) = F(x)$$

и функция F называется неопределенным T^2 -интегралом или T^2 -примитивной для f на $[0, 2\pi]$.

Сравнивая определения T^2 - и P^2 -мажорант и минорант, видим, что условие 1) сужает, а условие 4), наоборот, расширяет класс мажорант и минорант для T^2 -интеграла по сравнению с P^2 -интегралом.

В [3] доказано, что всякая суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция является T^2 -интегрируемой и T^2 -интеграл от нее равен интегралу Лебега. Справедлива также (см. [3])

ТЕОРЕМА А. Пусть тригонометрический ряд (1) сходится к конечной функции f для всех x из $[0, 2\pi)$, за исключением, быть может, множества E , где $E \in F_\sigma^{SU}$. Тогда $f(x)$, $f(x) \cos nx$, $f(x) \sin nx$ T^2 -интегрируемы на $[0, 2\pi]$ и

$$a_n = \frac{1}{\pi} (T^2) \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} (T^2) \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (3)$$

Если множество E в теореме А счетно, то сумма ряда (1) является также P^2 -интегрируемой на $(-2\pi, 0, 2\pi)$ и формулы для коэффициентов (2) и (3) верны, если в них вместо T^2 -интеграла взять P^2 -интеграл. В общем же случае, как мы покажем ниже, P^2 -интеграл не решает задачу восстановления коэффициентов рядов, удовлетворяющих условиям теоремы А.

Основным результатом данной работы является построение примера функции, которая T^2 -интегрируема на $[0, 2\pi]$, но не является P^2 -интегрируемой. А именно, будет построен

ПРИМЕР тригонометрического ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, сходящегося к конечной функции f на $[0, 2\pi] \setminus F$, где $F \cap [0, \pi]$ – троичное канторовское множество на $[0, \pi]$, причем f не интегрируема на $[0, 2\pi]$ с помощью P^2 -интеграла, но T^2 -интегрируема на $[0, 2\pi]$ в силу теоремы А.

Введем обозначения. Для удобства последующие построения будем проводить на отрезке $[0, 1]$. Пусть E – канторовское троичное множество на $[0, 1]$. Для $n \in \mathbb{N}$ смежные интервалы множества E длины $1/3^n$ назовем *интервалами ранга n* и обозначим через $u_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, нумеруя их слева направо. *Отрезками ранга n* назовем отрезки длины $1/3^n$, остающиеся после удаления из отрезка $[0, 1]$ всех интервалов рангов, не превосходящих n . Эти отрезки обозначим $r_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \dots, 2^n$ (также нумеруя их слева направо), и сам отрезок $[0, 1]$ обозначим через $r_1^{(0)}$. Когда нам не важен номер j интервала или отрезка ранга n , будем обозначать их просто $u^{(n)}$ или $r^{(n)}$.

Положим $E_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} r_j^{(n)}$; тогда $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Заметим, что $r_j^{(n)} = r_{2j-1}^{(n+1)} \cup u_j^{(n+1)} \cup r_{2j}^{(n+1)}$, откуда следует, что при любом $k > n$ на отрезке $r_j^{(n)}$ находятся 2^{k-n} отрезков ранга k .

Разобьем построение примера на две части.

Приведем сначала конструкцию функций g , которые не являются P^2 -интегрируемыми. Эта конструкция является модификацией примера, данного в [5], приспособленной для наших целей.

Часть 1. Построение функций g , не интегрируемых P^2 на $[0, 1]$.

Для подынтервала $J = (a, b)$ отрезка $[0, 1]$ положим

$$g(J, x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[a + \frac{b-a}{4}, a + 3\frac{b-a}{4} \right], \\ -1, & x \in \left(a, a + \frac{b-a}{4} \right) \cup \left(a + 3\frac{b-a}{4}, b \right), \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus (a, b). \end{cases}$$

Пусть $\{k_s\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Положим

$$j(s) = s - 2^{n-1} + 1, \quad \text{если } 2^{n-1} \leq s \leq 2^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Определим функции g_s для номеров $2^{n-1} \leq s \leq 2^n - 1$ следующим образом:

$$g_s(x) = A_s \sum_{i: u_i^{(k_s)} \subset r_{j(s)}^{(n-1)}} g(u_i^{(k_s)}, x), \quad (5)$$

где число $A_s > 0$ выберем так, что

$$\int_0^1 |g_s(x)| dx = \frac{n}{2^n}. \quad (6)$$

Заметим, что на каждом отрезке $r_j^{(n-1)}$ находится 2^{k_s-n} интервалов $u_i^{(k_s)}$. Отсюда и из (6) следует, что

$$A_s \cdot \frac{1}{3^{k_s}} \cdot 2^{k_s-n} = \frac{n}{2^n}. \quad (7)$$

Отметим также, что по построению $\int_0^1 g_s(x) dx = 0$ и носители функций g_s и g_k не пересекаются, если $s \neq k$ (носителем функции называется замыкание множества точек, в которых функция не равна нулю).

Положим $g = \sum_{s=1}^{\infty} g_s$ (в силу сказанного выше в каждой точке x или $g(x) = 0$, или $g(x) = g_s(x)$ для некоторого s). Покажем, что функция g не является P^2 -интегрируемой на $[0, 1]$.

Для дальнейшего нам потребуются также функции $G_s(x) = \int_0^x g_s(t) dt$. Отметим, что функции G_s линейны на интервалах постоянства функций g_s , равны нулю вне интервалов $u^{(k_s)}$ и

$$\int_{u^{(k_s)}} G_s(x) dx = 0.$$

Носители функций G_s не пересекаются для различных номеров s , так как совпадают с носителями функций g_s . Из вида функций G_s следует, что для любого $x \in E \cap (0, 1)$

$$\int_x^{x+h} G_s(t) dt \leq 0 \quad \text{и} \quad \int_{x-h}^x G_s(t) dt \geq 0 \quad (8)$$

(при $x+h, x-h \in [0, 1]$), в силу чего

$$-\frac{1}{h} \int_0^h G_s(x+t) dt \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{h} \int_0^h G_s(x-h+t) dt \geq 0. \quad (9)$$

Если $u_i^{(k_s)} = (\alpha_i, \beta_i) \subset r_{j(s)}^{(n-1)}$, то (см. (4), (5))

$$-\int_{\alpha_i}^{(\alpha_i+\beta_i)/2} G_s(t) dt = \int_{(\alpha_i+\beta_i)/2}^{\beta_i} G_s(t) dt = \frac{A_s}{16 \cdot 3^{k_s}}. \quad (10)$$

Для любой точки $x_i \in E$, находящейся в достаточно малой левой полукрестности точки α_i , интервал $J = (2x_i - (\alpha_i + \beta_i)/2, (\alpha_i + \beta_i)/2)$ лежит внутри отрезка $r_i^{(k_s-1)}$. Полагая $h_i = (\alpha_i + \beta_i)/2 - x_i$, имеем $J = (x_i - h_i, x_i + h_i)$. На интервале $(x_i - h_i, x_i)$ функция G_s равна нулю. Учитывая (9), (10) и то, что $h_i \leq 1/3^{k_s}$, получаем

$$-\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_i+h_i} G_s(t) dt + \frac{1}{h_i} \int_{x_i-h_i}^{x_i} G_s(t) dt \geq \frac{A_s}{16 \cdot 3^{k_s}}. \quad (11)$$

Просуммировав (11) по всем i , для которых $u_i^{(k_s)}$ лежит в $r_{j(s)}^{(n-1)}$, и учитывая (7), получим

$$\sum_{i: u_i^{(k_s)} \subset r_{j(s)}^{(n-1)}} \left(-\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_i+h_i} G_s(t) dt + \frac{1}{h_i} \int_{x_i-h_i}^{x_i} G_s(t) dt \right) \geq \frac{A_s}{16 \cdot 3^{k_s}} \cdot 2^{k_s-n} = \frac{n}{2^{n+4}}. \quad (12)$$

Положим $G = \sum_{s=1}^{\infty} G_s$. Так как носители функций G_s не пересекаются и $|G_s(x)| \leq n/2^n$ для $2^{n-1} \leq s \leq 2^n - 1$, ввиду (6) функция G непрерывна как сумма равномерно

сходящегося ряда непрерывных функций G_s . Учитывая возможность почленного интегрирования ряда, определяющего G , и неравенства (9) и (12), получим

$$\sum_{i: u_i^{(k_s)} \subset r_j^{(n-1)}} \left(-\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_i+h_i} G(t) dt + \frac{1}{h_i} \int_{x_i-h_i}^{x_i} G(t) dt \right) \geq \frac{n}{2^{n+4}} \quad (13)$$

(где j и s связаны равенством (4)) для выбранных соответствующим образом x_i и h_i .

Допустим, что g является P^2 -интегрируемой на $[0, 1]$. Функция $m(x) = \int_0^x G(t) dt$ является P^2 -минорантой для g , так как $D^2 m(x) = g(x)$ всюду на смежных интервалах множества E за исключением счетного множества точек, и так как

$$\Delta_h^2 m(x) = \int_x^{x+h} G(t) dt - \int_{x-h}^x G(t) dt,$$

то в силу (8) $\overline{D}^2 m(x) \leq 0$ для $x \in E$.

Пусть $M(x) - P^2$ -мажоранта для g . Как известно (см., например, [6]), можно считать, что $\underline{D}^2 M(x) > 0$ на множестве E (как множестве нулевой меры). Функция $R(x) = (M(x) - m(x))'$, как производная выпуклой функции $M(x) - m(x)$ определена всюду, за исключением, быть может, счетного множества, и является неубывающей функцией. Можно доопределить $R(x)$ так, чтобы она стала неубывающей на всем интервале $(0, 1)$. Тогда приращение функции R должно быть конечным на любом отрезке, содержащемся в интервале $(0, 1)$.

Для каждого $x \in E \cap (0, 1)$ определим число $\delta(x) > 0$ такое, что

$$\Delta_h^2 M(x) > 0 \quad \text{для всех } 0 < h < \delta(x). \quad (14)$$

Так как $R(x)$ — неубывающая функция, то

$$\begin{aligned} R(x+h) - R(x-h) &\geq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} R(t) dt - \frac{1}{h} \int_{x-h}^x R(t) dt \\ &= \frac{1}{h} (M(t) - m(t))|_x^{x+h} - \frac{1}{h} (M(t) - m(t))|_{x-h}^x \\ &= \frac{1}{h} \Delta_h^2 (M(x) - m(x)) = \frac{1}{h} \Delta_h^2 M(x) - \frac{1}{h} \Delta_h^2 m(x) \end{aligned}$$

и, следовательно, для тех x и h , для которых выполнено (14),

$$R(x+h) - R(x-h) > -\frac{1}{h} \Delta_h^2 m(x) = -\frac{1}{h} \int_x^{x+h} G(t) dt + \frac{1}{h} \int_{x-h}^x G(t) dt. \quad (15)$$

Положим $C_m = \{x \in E : \delta(x) > 1/m\}$. Поскольку $E \cap (0, 1) = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$, то в соответствии с теоремой Бэра найдется такой номер m , что C_m плотно на некоторой порции множества E . Уменьшая при необходимости эту порцию, будем считать, что C_m плотно на пересечении E с отрезком $r_j^{(p)}$ таким, что его длина $|r_k^{(p)}| = 1/3^p < 1/m$.

В силу оценки (13) на каждом $r_j^{(n-1)} \subset r_k^{(p)}$ найдутся непересекающиеся интервалы $(x_i - h_i, x_i + h_i)$ с $x_i \in C_m$ такие, что сумма приращений функции R на них в соответствии с (13) и (15) превосходит $n/2^{n+4}$. Тогда сумма приращений функции R по всем $r_j^{(n-1)}$, содержащимся в $r_k^{(p)}$, превосходит

$$\frac{n}{2^{n+4}} \cdot 2^{n-1-p} = \frac{n}{2^{p+5}}.$$

Поскольку в этих рассуждениях n является произвольным натуральным числом, большим p , то полученная оценка противоречит конечности приращения монотонной функции на каждом отрезке, лежащем внутри интервала $(0, 1)$. Первая часть построения завершена.

Далее эту конструкцию мы используем при построении T^2 -, но не P^2 -интегрируемой функции при специально подобранной последовательности k_s .

Часть 2. Построение тригонометрического ряда $\sum_{s=1}^{\infty} a_k \cos \pi k x$, сходящегося к конечной функции τ на $[0, 1] \setminus E$, причем τ не является P^2 -интегрируемой на $[0, 1]$.

Построение проведем по индукции.

На первом шаге положим $k_1 = 1$. По k_1 построим функцию g_1 из части 1. Затем определим на прямой четную функцию f_1 с периодом 2, имеющую три непрерывные производные, равную нулю на $[0, 1]$ там, где g_1 равна нулю, и удовлетворяющую условиям

$$\int_0^1 |g_1(x) - f_1(x)| dx < \frac{1}{6}, \quad \int_0^1 f_1(x) dx = 0.$$

Номер m_1 выберем таким образом, чтобы для частной суммы $S_{m_1}(f_1, x)$ ряда Фурье функции f_1 (по тригонометрической системе с периодом 2) выполнялись неравенства

$$|f_1(x) - S_{m_1}(f_1, x)| < \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad |f_1''(x) - S_{m_1}''(f_1, x)| < \frac{1}{4},$$

и положим $\tau_1(x) = S_{m_1}(f_1, x)$. На этом первый шаг завершен.

Пусть осуществлен $n - 1$ шаг построения. На r -м шаге (для $r = 1, 2, \dots, n - 1$) мы определили числа k_s , функции g_s и f_s , числа m_s и тригонометрические полиномы τ_s , последовательно для $s = 2^{r-1}, 2^{r-1} + 1, \dots, 2^r - 1$ таким образом, что выполняются условия

$$k_s > k_{s-1} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{3^{k_s}} \sum_{m=1}^{m_{s-1}} (m+1)^4 < \frac{1}{4^r}. \quad (16)$$

Для функций g_s , построенных по k_s , согласно части 1 выполняются условия

$$\int_0^1 g_s(x) dx = 0, \quad \int_0^1 |g_s(x)| dx = \frac{r}{2^r} \quad (17)$$

и f_s — четные функции на прямой, имеющие период 2, трижды непрерывно дифференцируемые, равные нулю на $[0, 1]$ там, где функции g_s обращаются в нуль, и

$$\int_0^1 f_s(x) dx = 0, \quad \int_0^1 |g_s(x) - f_s(x)| dx < \frac{1}{2^s \cdot 3^{k_s}}. \quad (18)$$

Числа $m_s > m_{s-1}$ определены так, что для тригонометрического полинома

$$\tau_s(x) = \sum_{m=m_{s-1}+1}^{m_s} a_m \cos \pi m x,$$

где $a_m = a_m(f_s)$ — коэффициенты Фурье функции f_s , справедливы неравенства

$$|f_s(x) - \tau_s(x)| < \frac{12}{4^r}, \quad |f_s''(x) - \tau_s''(x)| < \frac{12}{4^r}, \quad (19)$$

$$\sum_{m=1}^{m_{s-1}} |a_m(f_s)| < \frac{1}{4^r}. \quad (20)$$

На n -м шаге нам надо определить числа k_s , функции g_s , f_s , числа m_s и тригонометрические полиномы τ_s для $s = 2^{n-1}, \dots, 2^n - 1$ так, чтобы выполнялись условия (16)–(20) для $r = n$. Опишем это построение.

По числу m_{s-1} (для $s = 2^{n-1}, \dots, 2^n - 1$) число k_s определим так, чтобы выполнялось условие (16) при $r = n$.

Зная k_s , функцию g_s строим согласно части 1 так, что выполняется условие (17) при $r = n$. Функцию f_s определим на прямой так, чтобы она была четной, имела период 2, имела бы три непрерывные производные, обращалась в нуль на $[0, 1]$ там, где g_s равна нулю, и выполнялось условие (18).

Оценим коэффициенты Фурье (разложения в ряд по косинусам на $[0, 1]$) функции g_s :

$$\begin{aligned} |a_m(g_s)| &= 2 \left| \int_0^1 g_s \cos \pi m x \, dx \right| \\ &\leq 2^{k_s-n} \cdot 4A_s \max_i \left| \int_{\frac{i}{3^{k_s}}}^{\frac{i}{3^{k_s}} + \frac{1}{4 \cdot 3^{k_s}}} \cos \pi m x \, dx - \int_{\frac{i}{3^{k_s}} + \frac{1}{4 \cdot 3^{k_s}}}^{\frac{i}{3^{k_s}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{k_s}}} \cos \pi m x \, dx \right| \\ &\leq 2^{k_s-n} \cdot 4A_s \max_i \left| \int_{\frac{i}{3^{k_s}}}^{\frac{i}{3^{k_s}} + \frac{1}{4 \cdot 3^{k_s}}} \left(\cos \pi m x - \cos \pi m \left(x + \frac{1}{4 \cdot 3^{k_s}} \right) \right) dx \right| \\ &\leq 2^{k_s-n} \cdot 4A_s \frac{1}{4 \cdot 3^{k_s}} \max_x \left| \cos \pi m x - \cos \pi m \left(x + \frac{1}{4 \cdot 3^{k_s}} \right) \right| \leq \frac{n}{2^n} \cdot \frac{\pi m}{4 \cdot 3^{k_s}}. \end{aligned}$$

Тогда ввиду (18) имеем

$$|a_m(f_s)| \leq |a_m(g_s)| + |a_m(f_s - g_s)| \leq \frac{\pi m n}{4 \cdot 2^n \cdot 3^{k_s}} + \frac{2}{2^s \cdot 3^{k_s}} \leq \frac{\pi m n}{2^n \cdot 3^{k_s}}.$$

В силу (16) для $r = n$

$$\sum_{m=1}^{m_{s-1}} |a_m(f_s)| \leq \frac{\pi n}{2^n \cdot 3^{k_s}} \sum_{m=1}^{m_{s-1}} m < \frac{\pi}{3^{k_s}} \sum_{m=1}^{m_{s-1}} m < \frac{1}{4^n},$$

т.е. выполняется условие (20) при $r = n$. Так как коэффициенты Фурье $a_m(f_s'')$ второй производной f_s'' и функции f_s связаны формулой

$$a_m(f_s'') = -\pi^2 m^2 a_m(f_s),$$

то

$$\sum_{m=1}^{m_{s-1}} |a_m(f_s'')| \leq \frac{\pi^3 n}{2^n \cdot 3^{k_s}} \sum_{m=1}^{m_{s-1}} m^3 < \frac{\pi^2}{4^n}. \quad (21)$$

Определим теперь $m_s > m_{s-1}$ таким образом, чтобы

$$|f_s(x) - S_{m_s}(f_s, x)| \leq \frac{1}{4^n} \quad \text{и} \quad |f_s''(x) - S_{m_s}''(f_s, x)| \leq \frac{1}{4^n}, \quad (22)$$

это возможно, так как ряд Фурье функции f_s'' , имеющей непрерывную производную, равномерно к ней сходится.

Положим

$$\tau_s(x) = S_{m_s}(f_s, x) - S_{m_{s-1}}(f_s, x),$$

тогда ввиду (21) и (22)

$$|f_s(x) - \tau_s(x)| \leq \frac{12}{4^n} \quad \text{и} \quad |f_s''(x) - \tau_s''(x)| \leq \frac{12}{4^n}. \quad (23)$$

Таким образом, выполняется условие (19) для данного s и $r = n$.

Далее определяем число k_{s+1} так, чтобы выполнялось условие (16), и продолжаем построение для всех номеров s , меньших 2^n . Таким образом, построение на n -м шаге выполнено.

В силу принципа математической индукции построение можно выполнить для всякого натурального n .

Положим теперь

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} f_s(x), \quad g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} g_s(x), \quad \tau(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \tau_s(x)$$

(заметим, что при разных s носители функций f_s не пересекаются, так же, как и носители функций g_s , поэтому ряды, определяющие f и g , всюду сходятся на $[0, 1]$. Учитывая это и (23), замечаем, что ряд для τ также всюду сходится).

Если записать последовательно члены полиномов τ_s (т.е. в ряде для τ раскрыть скобки), то получится тригонометрический ряд $T = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \pi k x$ коэффициенты которого стремятся к нулю, так как в силу (17) и (18)

$$|a_k| \leq \frac{n}{2^{n-2}} \quad \text{для} \quad k \geq m_{2^{n-1}}.$$

Покажем, что ряд T сходится вне множества E на $[0, 1]$. Пусть (α, β) — смежный интервал E . Если все функции g_s обращаются в нуль на (α, β) , то и f_s равны нулю на (α, β) и в силу неравенств (23) ряды $\sum_{s=1}^{\infty} \tau_s(x)$ и $\sum_{s=1}^{\infty} \tau_s''(x)$ равномерно сходятся на (α, β) .

Если для некоторого s_0 функция g_{s_0} принимает на (α, β) ненулевые значения, то все остальные функции g_s и f_s (с $s \neq s_0$) обращаются в 0 на (α, β) . Тогда в силу (23) ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} \tau_s(x) = \tau_{s_0}(x) + \sum_{s \neq s_0} \tau_s(x), \quad \sum_{s=1}^{\infty} \tau_s''(x) = \tau_{s_0}''(x) + \sum_{s \neq s_0} \tau_s''(x)$$

равномерно сходятся на (α, β) . Отсюда следует, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} \tau_s''(x) = \tau''(x), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Пусть $\delta > 0$ и функция $\lambda(x)$ имеет три непрерывные производные, $\lambda(x) = 1$ на $(\alpha + \delta, \beta - \delta)$, $\lambda(x) = 0$ вне $(\alpha + \delta/2, \beta - \delta/2)$. Как известно (см. [4, гл. 1, с. 71]), формальное произведение ряда T на $\lambda(x)$ равномерно равносходится с $\lambda(x) \cdot T$ на $[0, 1]$ (т.е. разность рядов σ и $\lambda(x) \cdot T$ равномерно сходится к нулю). Частичные суммы ряда T с номерами m_s равномерно сходятся к $\tau(x)$ на (α, β) . Тогда частичные суммы ряда σ с номерами m_s равномерно сходятся к $\lambda(x)\tau(x)$ на интервале $(\alpha + \delta/2, \beta - \delta/2)$ и к нулю вне $(\alpha + \delta/2, \beta - \delta/2)$. Следовательно, ряд σ является рядом Фурье дважды непрерывно дифференцируемой функции $\lambda(x)\tau(x)$ и, значит, так как ее коэффициенты Фурье имеют порядок $o(1/n^2)$, равномерно сходится. Так как $\lambda(x) = 1$ на $(\alpha + \delta, \beta - \delta)$, то ряд T равномерно сходится к $\tau(x)$ на $(\alpha + \delta, \beta - \delta)$. В силу произвольности δ ряд T сходится к $\tau(x)$ на (α, β) . Таким образом, T сходится к $\tau(x)$ на дополнении к E .

В силу (18) и (23) разность функций $g(x) - \tau(x)$ интегрируема по Лебегу на $[0, 1]$, и, следовательно, функция τ не является P^2 -интегрируемой на $[0, 1]$, так как иначе и g была бы P^2 -интегрируемой на $[0, 1]$. Вторая часть построения выполнена.

Завершим теперь построение примера.

Рассмотрим ряд

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

с коэффициентами a_k ряда T . Из определения P^2 -интеграла и части 2 следует, что сумма ряда S не является P^2 -интегрируемой на $[0, 2\pi]$, а также на всяком содержащем $[0, 2\pi]$ отрезке, в частности, на $[-2\pi, 2\pi]$. Пусть F — канторовское троичное множество на $[0, \pi]$. Тогда

$$F = \{y : y = \pi x, x \in E\} \quad \text{и} \quad 2\pi - F = \{y : y = 2\pi - x, x \in F\}.$$

Ряд S сходится на $[0, 2\pi] \setminus (F \cup (2\pi - F))$. Так как F и $2\pi - F$ являются H -множествами, то множество $F \cup (2\pi - F)$ принадлежит классу F_{σ}^{SU} . В силу теоремы А сумма ряда S является T^2 -интегрируемой функцией на $[0, 2\pi]$. Пример построен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Виноградова И. А., Скворцов В. А. Обобщенные интегралы и ряды Фурье // Итоги науки и техн. Матем. анализ. Москва: ВИНТИ, 1970.
- [2] James R. D. A generalized integral II // Canad. J. Math. 1950. №3. Р. 297–306.
- [3] Холщевникова Н. Н. Обобщенный тригонометрический интеграл // Изв. НАН Армении. Сер. матем. 2001. Т. 36. №4. С. 82–89.
- [4] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [5] Скворцов В. А. Связь между некоторыми интегралами // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1967. №4. С. 68–71.
- [6] Скляренко В. А. Об интегрировании по частям в SCP-интеграле Беркилля // Матем. сб. 1980. Т. 112(154). №4(8). С. 630–646.

(В. А. Скворцов) Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
(Н. Н. Холщевникова) Московский государственный
технический университет “Станкин”
E-mail: kholsh@stankin.ru

Поступило
11.11.2004
Исправленный вариант
27.04.2005