Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Т. Султанаев, Р. Т. Исламова, Исследование уравнения для парциальных волн с быстро осциллирующим потенциалом, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 288–293

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 05:10:05

УДК 517.2

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Я. Т. Султанаев, Р. Т. Исламова

В статье рассматривается дифференциальное уравнение для парциальных волн $\psi''(x) + [k^2 - (\lambda^2 - 1/4)/x^2 - V(x)]\psi(x) = 0$ и соответствующие ему интегральные уравнения. Получены оценки для решений этого дифференциального уравнения с граничными условиями при $x = 0$ и $x = \infty$. Установлены области аналитичности полученных волновых функций.

Библиография: 3 названия.

В данной работе выясняется характер поведения решений уравнения для парциальных волн

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) - \frac{l(l+1)}{x^2}\psi(x) - V(x)\psi(x) = 0 \quad (1)$$

с определенными граничными условиями при $x = 0$ и $x = \infty$ и устанавливаются области аналитичности полученных волновых функций. Уравнение (1) играет важную роль в теории рассеяния. Оно возникает при описании движения двух частиц в системе их центра тяжести при условии, что потенциалы взаимодействия зависят только от расстояния между частицами. В [1] исследуется уравнение с потенциалом, удовлетворяющим следующим условиям:

- 1) $V(x)$ почти всюду непрерывна;
- 2) $\int_c^\infty |V(x)| dx = M(c) < \infty$, $c > 0$;
- 3) $\int_0^a x|V(x)| dx = N(a) < \infty$, $a > 0$.

Условие 2) является весьма жестким, оно означает, что функция $V(x)$ не может быть осциллирующей на бесконечности. В нашей работе исследуется уравнение (1) с потенциалом $V(x)$, для которого кроме условий 1) и 3) выполняется следующее:

- 4) $\int^\infty V(x) dx$ сходится условно;
- 5) $|A(x)| = \left| \int_x^\infty V(t) dt \right| \leq a(x)$, где $a(x)$ — убывающая функция.

Отметим, что в [2, с. 38–41] аналогичная задача исследуется в случае, когда потенциал $V(x)$ является сингулярным в нуле, т.е.

$$xV(x) \in L^1(b, \infty), \quad b > 0, \quad A(x) \in L^1(0, a), \quad \lim_{x \rightarrow 0} xA(x) = 0.$$

Для удобства дальнейшего исследования уравнения (1) вместо l введем число $\lambda = l + 1/2$, после чего (1) переходит в уравнение

$$\psi''(x) + \left[k^2 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} - V(x) \right] \psi(x) = 0, \quad (2)$$

четное относительно λ .

1. Решения уравнения (2) с граничными условиями при $x = \infty$. При больших x будем исходить из укороченного уравнения:

$$\psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0. \quad (3)$$

Это уравнение получается из (2) при пренебрежении потенциалом и центробежным барьером. Заметим, что в [1] уравнение (3) является главной частью уравнения (2) при $x \rightarrow \infty$. Это вытекает из условия 2). В нашем случае функция $V(x)$ ему не удовлетворяет. Однако более детальное изучение интегрального уравнения, соответствующего уравнению (2), показывает, что и в этом случае (3) есть главная часть уравнения (2). Это основной наш результат.

Решения уравнения (3) имеют вид $\psi = \alpha e^{-ikx} + \beta e^{ikx}$. Будем искать решение $f(\lambda, k, x)$ полного уравнения (2) (решение Иоста) со следующим асимптотическим поведением:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{ikx} f(\lambda, k, x) = 1.$$

При $V(x) = 0$ такое решение имеет вид

$$[f(\lambda, k, x)]_{V(x)=0} = f_0(\lambda, k, x) = \left(\frac{\pi k x}{2} \right)^{1/2} e^{-(i\pi/2)(\lambda+1/2)} H_{\lambda}^{(2)}(kx),$$

где $H_{\lambda}^{(2)}(kx)$ – функция Ганкеля второго рода.

Используя метод вариации постоянных, получим следующее интегральное уравнение:

$$f(\lambda, k, x) = f_0(\lambda, k, x) + \int_x^{\infty} B(\lambda, k, x, y) V(y) f(\lambda, k, y) dy, \quad (4)$$

$$B(\lambda, k, x, y) = \frac{i}{2k} [f_0(\lambda, k, y) f_0(\lambda, -k, x) - f_0(\lambda, k, x) f_0(\lambda, -k, y)].$$

Далее, обозначив $A(y) = \int_y^{\infty} V(t) dt$ и интегрируя по частям, получим

$$f(\lambda, k, x) = f_0(\lambda, k, x) + \int_x^{\infty} \left[B(\lambda, k, x, y) \frac{\partial f(\lambda, k, y)}{\partial y} + \frac{\partial B(\lambda, k, x, y)}{\partial y} f(\lambda, k, y) \right] A(y) dy. \quad (5)$$

Продифференцируем уравнение (4) по x . Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\lambda, k, x)}{\partial x} &= \frac{\partial f_0(\lambda, k, x)}{\partial x} + A(x) f(\lambda, k, x) \\ &+ \int_x^{\infty} \left[\frac{\partial B(\lambda, k, x, y)}{\partial x} \frac{\partial f(\lambda, k, y)}{\partial y} + \frac{\partial^2 B(\lambda, k, x, y)}{\partial x \partial y} f(\lambda, k, y) \right] A(y) dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений (5) и (6). Введем формальные итерационные разложения:

$$\begin{aligned}
 f(\lambda, k, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\lambda, k, x), \\
 f_n(\lambda, k, x) &= \int_x^{\infty} \left[B(\lambda, k, x, y) \frac{\partial f_{n-1}(\lambda, k, y)}{\partial y} + \frac{\partial B(\lambda, k, x, y)}{\partial y} f_{n-1}(\lambda, k, y) \right] A(y) dy, \\
 \frac{\partial f(\lambda, k, x)}{\partial x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial f_n(\lambda, k, x)}{\partial x}, \\
 \frac{\partial f_n(\lambda, k, x)}{\partial x} &= A(x) f_{n-1}(\lambda, k, x) \\
 &\quad + \int_x^{\infty} \left[\frac{\partial B(\lambda, k, x, y)}{\partial x} \frac{\partial f_{n-1}(\lambda, k, y)}{\partial y} + \frac{\partial^2 B(\lambda, k, x, y)}{\partial x \partial y} f_{n-1}(\lambda, k, y) \right] A(y) dy.
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

В [1] было показано, что если $k \neq 0$, то при всяком $\lambda = \mu + i\sigma$ имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
 |f_0(\lambda, k, x)| &< \left(\frac{c|k|x}{1 + |k|x} \right)^{-|\mu|+1/2} e^{bx}, \\
 |B(\lambda, k, x, y)| &\leq ce^{|b|y+bx} \left(\frac{y}{1 + |k|y} \right)^{|\mu|+1/2} \left(\frac{x}{1 + |k|x} \right)^{-|\mu|+1/2},
 \end{aligned}$$

где $y > x$, $b = \text{Im } k$ и c — постоянная, зависящая только от λ .

Получим соответствующие оценки для производных

$$\frac{\partial f_0(\lambda, k, x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial B(\lambda, k, x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial B(\lambda, k, x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 B(\lambda, k, x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Имеем

$$\frac{\partial f_0(\lambda, k, x)}{\partial x} = \left(\frac{\pi k x}{2} \right)^{1/2} e^{-(i\pi/2)(\lambda+1/2)} \left(\frac{1}{2x} H_{\lambda}^{(2)}(kx) + \frac{\partial H_{\lambda}^{(2)}(kx)}{\partial x} \right).$$

Для функций Ганкеля выполняется следующее соотношение:

$$2 \frac{dH_{\lambda}^{(i)}(z)}{dz} = H_{\lambda-1}^{(i)}(z) - H_{\lambda+1}^{(i)}(z), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому

$$\frac{\partial H_{\lambda}^{(i)}(kx)}{\partial x} = \frac{k}{2} (H_{\lambda-1}^{(i)}(kx) - H_{\lambda+1}^{(i)}(kx)), \quad i = 1, 2.$$

При больших x справедливо следующее неравенство [3]:

$$H_{\lambda}^{(1),(2)}(z) \leq G(\lambda) \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \exp \left(\pm i \left(z - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{\lambda}^{(2)}(kx)}{\partial x} &\leq G \frac{k}{2} \left(\left(\frac{2}{\pi kx} \right)^{1/2} \exp \left(-i \left(kx - \frac{(\lambda-1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2}{\pi kx} \right)^{1/2} \exp \left(-i \left(kx - \frac{(\lambda+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right) \\ &= G \frac{k}{2} \left(\frac{2}{\pi kx} \right)^{1/2} \exp \left(-i \left(kx - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) (e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}) \\ &= ikH_{\lambda}^{(2)}(kx). \end{aligned}$$

Можно сделать заключение, что

$$\left| \frac{\partial f_0(\lambda, k, x)}{\partial x} \right| \leq e^{bx} \left(\frac{c|k|x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2} \left(\frac{1}{2|x|} + |k| \right).$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(\lambda, k, x, y)}{\partial x} &= \frac{i}{2k} \left[f_0(\lambda, k, y) \frac{\partial f_0(\lambda, -k, x)}{\partial x} - \frac{\partial f_0(\lambda, k, x)}{\partial x} f_0(\lambda, -k, y) \right], \\ \frac{\partial^2 B(\lambda, k, x, y)}{\partial y \partial x} &= \frac{i}{2k} \left[\frac{\partial f_0(\lambda, k, y)}{\partial y} \frac{\partial f_0(\lambda, -k, x)}{\partial x} - \frac{\partial f_0(\lambda, k, x)}{\partial x} \frac{\partial f_0(\lambda, -k, y)}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

то, рассуждая аналогично, можно получить следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial B(\lambda, k, x, y)}{\partial x} \right| &\leq ce^{|b|y+bx} \left(\frac{y}{1+|k|y} \right)^{|\mu|+1/2} \left(\frac{x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2} \left(\frac{1}{2|x|} + |k| \right), \\ \left| \frac{\partial B(\lambda, k, x, y)}{\partial y} \right| &\leq ce^{|b|y+bx} \left(\frac{y}{1+|k|y} \right)^{|\mu|+1/2} \left(\frac{x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2} \left(\frac{1}{2|y|} + |k| \right), \\ \left| \frac{\partial^2 B(\lambda, k, x, y)}{\partial y \partial x} \right| &\leq ce^{|b|y+bx} \left(\frac{y}{1+|k|y} \right)^{|\mu|+1/2} \left(\frac{x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2|x|} + |k| \right) \left(\frac{1}{2|y|} + |k| \right). \end{aligned}$$

С помощью этих оценок оказывается возможным установить оценку сверху для членов итерационного разложения (7) при $b < 0$. Сначала рассмотрим

$$f_1(\lambda, k, x) = \int_x^\infty \left[B(\lambda, k, x, y) \frac{\partial f_0(\lambda, k, y)}{\partial y} + \frac{\partial B(\lambda, k, x, y)}{\partial y} f_0(\lambda, k, y) \right] A(y) dy.$$

Используя условие 5), при больших k получим

$$|f_1(\lambda, k, x)| \leq c \frac{2|k|+1}{|k|} \left(\frac{c|k|x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2} e^{bx} \int_x^\infty a(y) dy.$$

Для следующего члена итерационного ряда (7) имеем

$$|f_2(\lambda, k, x)| \leq c \left(\frac{c|k|x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2} e^{bx} \times \left(\frac{1}{|k|} a(x) \int_x^\infty a(y) dy + c \left(\frac{2|k|+1}{|k|} \right)^2 \frac{1}{2!} \left(\int_x^\infty a(y) dy \right)^2 \right)$$

и т.д.

По индукции можно доказать, что для общего члена разложения (7) будет справедлива следующая оценка:

$$|f_n(\lambda, k, x)| \leq \left(\frac{c|k|x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2} e^{bx} \left(c^n \left(\frac{2|k|+1}{|k|} \right)^n \frac{1}{n!} \left(\int_x^\infty a(y) dy \right)^n + \eta_2 c^{n-1} \left(\frac{2|k|+1}{|k|} \right)^{n-2} \frac{a(x)}{|k|} \frac{1}{(n-1)!} \left(\int_x^\infty a(y) dy \right)^{n-1} + \eta_3 c^{n-2} \left(\frac{2|k|+1}{|k|} \right)^{n-4} \frac{a^2(x)}{|k|^2} \frac{1}{(n-2)!} \left(\int_x^\infty a(y) dy \right)^{n-2} + \dots + \eta_{m+1} c^{n-m} \left(\frac{2|k|+1}{|k|} \right)^{n-2m} \frac{a^m(x)}{|k|^m} \frac{1}{(n-m)!} \left(\int_x^\infty a(y) dy \right)^{n-m} \right), \quad (9)$$

где для четных $n = 2k$ берется $m = 1, \dots, n/2$, для нечетных $n = 2k + 1$ берется $m = 1, \dots, (n-1)/2$. Здесь η_m – некоторые константы, вычисляемые по рекуррентным формулам.

Получим теперь оценку сверху для всего разложения:

$$|f(\lambda, k, x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(\lambda, k, x)| \leq \left(\frac{c|k|x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2} e^{bx} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2|k|+1}{|k|} \right)^n \frac{1}{n!} \left(c \int_x^\infty a(y) dy \right)^n \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|k|^n n!} \left(c a(x) \int_x^\infty a(y) dy \right)^n \leq \left(\frac{c|k|x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2} e^{bx} \exp \left(\frac{2|k|+1}{|k|} c \int_x^\infty a(y) dy \right) \times \exp \left(\frac{c}{|k|} a(x) \int_x^\infty a(y) dy \right).$$

Отсюда следует, что члены итерационного ряда (7) мажорируются соответствующими членами разложения экспоненты и, следовательно, этот ряд сходится всюду, благодаря условиям 4) и 5).

Для ряда (8), составленного из производных, имеет место аналогичная оценка.

Для доказательства аналитичности $f(\lambda, k, x)$ относительно k достаточно показать, что каждый член $f_n(\lambda, k, x)$ является аналитической функцией k , или же, что последовательность производных по k также сходится равномерно и непрерывно по k . Можно,

очевидно, вывести свойства $f(\lambda, k, x)$ как функции k или λ , исходя из свойств $\varphi(\lambda, k, x)$ (решение уравнения (1) при $x = 0$) как функции λ и k , не рассматривая еще одно интегральное уравнение (см. [1]). Так как $\varphi(\lambda, k, x)$ является аналитической по λ при $\mu > 0$, то $f(\lambda, k, x)$ является аналитической функцией k в области $b < 0$. Итак, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Функция $f(\lambda, k, x)$ является целой функцией λ и аналитической функцией k в области $b < 0$.*

2. Решения уравнения (1) с граничными условиями при $x = 0$. В этом случае анализ интегрального уравнения, соответствующего (2), и поведение полученного решения несущественно отличаются от приведенного в [1]. При этом функция $\varphi(\lambda, k, x)$, являющаяся решением уравнения (2) при $x = 0$, обладает следующими свойствами.

ТЕОРЕМА 2. *Функция $\varphi(\lambda, k, x)$ является целой функцией k^2 в каждой ограниченной области комплексной k^2 -плоскости и аналитической функцией λ в области $\operatorname{Re} \lambda = \mu \geq 0$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведем примеры функций $V(x)$, для которых выполняются все условия 1), 3)–5):

I) $V(x) = \operatorname{Sin}(e^x)$;

II) $V(x) = x^\alpha \operatorname{Sin} x^\beta$ при $\beta > \alpha + 2$, $\alpha \geq 0$.

Авторы выражают признательность рецензенту за то, что он обратил наше внимание на результаты работы [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. М.: Мир, 1966.
- [2] Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980.
- [3] Ватсон Г. Теория бесселевых функций. М.: Наука, 1949.

Башкирский государственный университет
E-mail: ritaislam@mail.ru

Поступило
17.04.2004
Исправленный вариант
24.03.2005