Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Володин, О критических показателях некоторых полулинейных краевых задач с бигармоническим оператором во внешности шара, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 201–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2698>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:51:21

УДК 517.9

О КРИТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЯХ НЕКОТОРЫХ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С БИГАРМОНИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ВО ВНЕШНОСТИ ШАРА

Ю. В. Володин

В статье установлены достаточные условия отсутствия глобальных решений дифференциального неравенства $\Delta^2 u \geq |u|^q$ во внешности шара. Рассмотрены различные варианты краевых условий и показана зависимость критических степеней от этих условий. Доказательства основаны на методе пробных функций, разработанном Э. Митидиери и С. И. Похожаевым.

Библиография: 3 названия.

Введение. В данной работе рассматриваются некоторые теоремы типа Лиувилля для нелинейных неравенств с бигармоническим оператором Δ^2 во внешности шара. Даются условия существования и отсутствия нетривиальных глобальных решений таких неравенств. Основная цель статьи – показать, что критические показатели отсутствия глобальных решений задач с дифференциальным оператором высокого порядка существенно зависят от приписанных граничных условий. При этом не делается никаких предположений ни о знаке возможных решений, ни об их поведении при $|x| \rightarrow +\infty$.

В статье рассматриваются разнообразные варианты граничных условий. Для получения точных критических показателей, разделяющих области существования и отсутствия глобальных решений, используется техника пробных функций, разработанная Митидиери и Похожаевым в работах [1]–[3]. Особенностью применения данного метода к исследуемой здесь проблеме является то, что при построении пробной функции мы приходим к краевой задаче для однородного бигармонического уравнения.

Введем обозначения. Пусть N – натуральное число, $R > 0$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\}$ – открытый шар с границей $\partial B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| = R\}$. Пусть B'_R – дополнение B_R до $\mathbb{R}^N$, $B'_R = \mathbb{R}^N \setminus B_R$. Через $\int_{\partial B_R} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} ds$ обозначим поверхностный интеграл от производной функции φ по направлению внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе ∂B_R (т.е. вектор $\mathbf{n}$ направлен по радиусу к центру шара B_R).

Под символом $\text{supp } \varphi$ понимается носитель функции $\varphi = \varphi(x)$, т.е. замыкание множества точек $x \in \mathbb{R}^N$ таких, что $\varphi(x) \neq 0$.

Через c и C мы будем обозначать положительные константы, значения которых для нас несущественны, поэтому для различных констант мы иногда будем повторять названия (индексы).

1. Постановка задачи и формулировка результатов. В пространстве $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, рассмотрим задачу

$$\Delta^2 u \geq |u|^q, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad q > 1, \quad (1.1)$$

понимая под решением функцию $u \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^N)$, которая удовлетворяет неравенству (1.1) в слабом смысле: для всякой гладкой финитной в $\mathbb{R}^N$ неотрицательной функции $\varphi(x)$ справедливо соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^q \varphi(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \cdot \Delta^2 \varphi(x) dx.$$

Следующий результат вытекает из теоремы 4.1 книги [1, с. 28]: если $q \leq N/(N-4)$, $N > 4$, то задача (1.1) не имеет решений, определенных для всех $x \in \mathbb{R}^N$ и отличных от тождественного нуля. Если же $q > N/(N-4)$, $N > 4$, то существуют примеры таких решений. В подобных случаях будем говорить, что задача имеет точный критический показатель $q = q^*$. Таким образом, для задачи (1.1) точный критический показатель равен $q^* = N/(N-4)$, $N > 4$.

Рассмотрим то же неравенство (1.1) в области, дополнительной к некоторому шару:

$$\Delta^2 u \geq |u|^q, \quad x \in B'_R, \quad q > 1. \quad (1.2)$$

Для задачи (1.2) результат может измениться коренным образом, как показывает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Задача (1.2) не имеет критических степеней в том смысле, что для любого $q > 1$ существует решение этой задачи из класса $C^4(B'_R)$, отличное от тождественного нуля.*

Соответствующие решения имеют вид $u = \varepsilon|x|^{-\alpha}$ при подходящем выборе параметров $\varepsilon, \alpha > 0$. Подчеркнем, что в теореме 1 неравенство (1.2) рассматривается без привлечения граничных условий. Естественно предположить, что граничные условия могут изменить ситуацию, что и доказывается далее.

Удобно считать, что краевая задача для неравенства (1.2) состоит в нахождении функции $u = u(x)$, удовлетворяющей в B'_R неравенству (1.2) и граничному условию на ∂B_R вида

$$\int_{\partial B_R} \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds = a_1, \quad \int_{\partial B_R} \left(\gamma \Delta u + \delta \frac{\partial(\Delta u)}{\partial \mathbf{n}} \right) ds = a_2, \quad (1.3)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a_1, a_2$ — заданные числа. По аналогии с теорией линейных уравнений с частными производными второго порядка будем особо выделять следующие типы граничных условий (1.3):

1) граничные условия *первого типа*

$$\int_{\partial B_R} u ds = a_1, \quad \int_{\partial B_R} \Delta u ds = a_2;$$

2) граничные условия *второго типа*

$$\int_{\partial B_R} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = a_1, \quad \int_{\partial B_R} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial \mathbf{n}} ds = a_2.$$

Решения краевых задач для неравенства (1.2) будем понимать следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Глобальным решением* краевой задачи (1.2), (1.3) называется функция $u(x) \in C^4(B'_R)$, удовлетворяющая заданным условиям на границе и неравенству (1.2) в каждой точке множества B'_R .

Мы также будем исследовать поведение решений, заданных на некоторых ограниченных областях, содержащихся в множестве B'_R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть ограниченная область Ω является подмножеством B'_R и $\bar{\Omega} \supset \partial B_R$. *Локальным решением* краевой задачи (1.2), (1.3) называется функция $u(x)$ класса $C^4(\bar{\Omega})$, для которой справедливы условия (1.3) и выполнено неравенство (1.2) для всех $x \in \Omega$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta^2 u \geq |u|^q, & x \in B'_R, \quad q > 1, \\ \int_{\partial B_R} \Delta u \, ds \leq 0, & u \neq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Еще одно условие на границе считаем заданным произвольным образом: теорема 2 (см. далее) будет верна в любом случае, например, можно взять $u|_{\partial B_R} = 0$.

Следующая теорема утверждает, что точный критический показатель задачи (1.4) равен $q^* = N/(N-4)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N > 4$ и $1 < q \leq N/(N-4)$. Тогда задача (1.4) не имеет глобальных решений. Если же $q > N/(N-4)$, то такие решения существуют.

Используемый в данной работе метод доказательства отсутствия глобальных решений во внешности шара позволяет получить не только условия этого отсутствия, но и указать ту область в B'_R , где определены возможные локальные решения поставленной задачи. Справедливо следующее утверждение, показывающее, что эта область существенным образом зависит от краевых условий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $1 < q < N/(N-4)$ при $N > 4$. И пусть задано локальное решение $u = u(x)$ задачи (1.4), для которого

$$a_2 = \int_{\partial B_R} \Delta u \, ds < 0.$$

Тогда область определения этого решения содержится в шаровом слое $\bar{B}_{R_0} \setminus B_R$, где

$$R_0 = \frac{c_0}{|a_2|^\gamma}, \quad \gamma = \frac{q-1}{N-(N-4)q},$$

c_0 — некоторая постоянная.

Теперь будем рассматривать задачу

$$\begin{cases} \Delta^2 u \geq |u|^q, & x \in B'_R, \\ \int_{\partial B_R} u \, ds \leq 0, & \int_{\partial B_R} \Delta u \, ds > 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $q > 1$ при $N = 1, 2$, либо $1 < q \leq (N + 2)/(N - 2)$ при $N > 2$. Тогда задача (1.5) не имеет нетривиальных глобальных решений. Если же $q > (N + 2)/(N - 2)$ и $N > 2$, то такие решения существуют.

Таким образом, точный критический показатель задачи (1.5) есть $q^* = (N + 2)/(N - 2)$, $N > 2$.

Можно также получить оценку области существования возможных локальных решений задачи (1.5). А именно, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $1 < q < (N + 2)/(N - 2)$ при $N > 2$. И пусть $u = u(x)$ — слабое локальное решение краевой задачи (1.5) такое, что

$$a_1 = \int_{\partial B_R} u \, ds < 0.$$

Тогда область определения $u(x)$ содержится в шаровом слое $x \in \overline{B_{R_0}} \setminus B_R$, где

$$R_0 = \frac{c_0}{|a_1|^\gamma}, \quad \gamma = \frac{q - 1}{N + 2 - (N - 2)q}$$

с некоторой постоянной c_0 .

Возможен еще вариант краевых условий, при которых для любого $q > 1$ существует глобальное решение, отличное от тождественного нуля.

ТЕОРЕМА 4. Пусть N — любое натуральное число и $q > 1$. Краевая задача

$$\begin{cases} \Delta^2 u \geq |u|^q, & x \in B'_R, \\ \int_{\partial B_R} u \, ds > 0, & \int_{\partial B_R} \Delta u \, ds > 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

не имеет критических степеней.

Следует отметить, что из справедливости этой теоремы следует справедливость теоремы 1.

2. Доказательства основных результатов. Доказывать отсутствие глобальных решений будем методом от противного. Именно, предположим, что рассматриваемая краевая задача имеет глобальное решение $u(x) \not\equiv 0$, тогда согласно определению выполняется (1.2). Домножим соотношение (1.2) на неотрицательную финитную на бесконечности функцию $\varphi \in C^4(B'_R)$ и, интегрируя по B'_R , получим

$$\int_{B'_R} \varphi \Delta^2 u \, dx \geq \int_{B'_R} \varphi |u|^q \, dx.$$

Дважды применяя к левой части данного неравенства формулу Грина, найдем

$$\int_{B'_R} \varphi |u|^q \, dx \leq \int_{B'_R} u \Delta^2 \varphi \, dx + \int_{\partial B_R} \left(\varphi \frac{\partial(\Delta u)}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\varphi}{\partial \mathbf{n}} \Delta u + \Delta \varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial(\Delta \varphi)}{\partial \mathbf{n}} u \right) ds. \quad (2.1)$$

Оценим первый интеграл в правой части (2.1) при помощи неравенства Гёльдера:

$$\int_{B'_R} u \Delta^2 \varphi \, dx \leq \left(\int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \varphi |u|^q \, dx \right)^{1/q} \cdot \left(\int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} \, dx \right)^{1/q'}, \quad (2.2)$$

где q' – сопряженный с q параметр, т.е. $q + q' = qq'$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольная постоянная. Используя неравенство Юнга, из соотношения (2.2) получим

$$\int_{B'_R} u \Delta^2 \varphi \, dx \leq \varepsilon \cdot \int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \varphi |u|^q \, dx + \varepsilon^{1-q'} \cdot \int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} \, dx.$$

Положим здесь $\varepsilon = 1/2$, тогда, подставляя полученное неравенство в (2.1), находим оценку

$$\begin{aligned} \int_{B'_R} \varphi |u|^q \, dx &\leq C \cdot \int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} \, dx \\ &\quad + 2 \int_{\partial B_R} \left(\varphi \frac{\partial(\Delta u)}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Delta u + \Delta \varphi \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} u - \frac{\partial(\Delta \varphi)}{\partial \mathbf{n}} u \right) ds, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $C = 2^{q'}$.

Далее, за счет специального выбора пробной функции (а точнее – семейства функций) мы показываем, что $u = 0$ в B'_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Предположим, что при $1 < q \leq N/(N-4)$, $N > 4$, задача (1.4) имеет нетривиальное глобальное решение $u(x)$. Пусть $\rho > R$ – фиксированное число. В качестве пробной функции $\varphi(x)$ возьмем

$$\varphi(r) = \varphi_\rho(r) = \xi(r) \varphi_0(r), \quad r = |x|, \quad (2.4)$$

где

$$\xi(r) = R^{2-N} - r^{2-N}, \quad \varphi_0(r) = \begin{cases} 1, & R \leq r \leq \rho, \\ 0, & r \geq 2\rho, \end{cases}$$

$\varphi_0 \in C^4(B'_R)$, $0 \leq \varphi_0 \leq 1$, причем при достаточно больших ρ выполняется неравенство

$$\frac{|\nabla^k \varphi_0|^p}{\varphi_0^{p-1}} \leq C \rho^{-kp}, \quad r \in [\rho, 2\rho] \quad (2.5)$$

для всех $p > 1$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Существование такой функции является известным фактом и используется в теории емкости и ее приложениях.

Отметим некоторые свойства функции $\varphi = \varphi(r)$:

- 1) $\varphi(r) \geq 0$ для всех $r \geq R$;
- 2) $\varphi|_{\partial B_R} = \Delta \varphi|_{\partial B_R} = \frac{\partial(\Delta \varphi)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial B_R} = 0$;
- 3) $\frac{\varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial B_R} = -(N-2)R^{1-N} < 0$;
- 4) $\varphi(r)$ сходится к $\xi(r)$ при $\rho \rightarrow +\infty$ для каждого $r \geq R$;
- 5) $\text{supp } \Delta^2 \varphi \subset \overline{B}_{2\rho} \setminus B_\rho$.

Свойство 1) очевидно. Для доказательства 2)–5) достаточно заметить, что при $r \in [R, \rho]$ имеем $\varphi(r) \equiv \xi(r)$ и

$$\begin{aligned}\xi(R) &= 0, \quad \Delta \xi = \Delta^2 \xi = 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} &= -\xi'(r) = -(N-2)r^{1-N} < 0.\end{aligned}$$

Заметим, что функция $\xi(r)$ и подбирается так, чтобы выполнялись данные соотношения. Отсюда также следует, что при достаточно большом ρ и $r \in [\rho, 2\rho]$ можно найти такие положительные постоянные c_1 и c_2 , что

$$c_1 \leq \xi(r) \leq c_2, \quad (2.6)$$

$$c_1 \rho^{1-N} \leq |\nabla \xi| \leq c_2 \rho^{1-N}. \quad (2.7)$$

Оценим $|\Delta^2 \varphi|^{q'}/\varphi^{q'-1}$ на множестве $\text{supp } \Delta^2 \varphi$. Для этого воспользуемся тождеством

$$\Delta^2 \varphi = \Delta^2(\xi \varphi_0) = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \nabla^{4-k} \varphi_0 \cdot \nabla^k \xi,$$

учитывая, что при $k \geq 2$ мы имеем $|\nabla^k \xi| \equiv 0$. Здесь $\binom{4}{k}$ – число сочетаний из 4 по k . Используя неравенства (2.5)–(2.7), получим

$$\begin{aligned}\frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} &\leq C_1 \left(\frac{|\nabla^4 \varphi_0|^{q'}}{\varphi_0^{q'-1}} \cdot \frac{\xi^{q'}}{\xi^{q'-1}} + \frac{|\nabla^3 \varphi_0|^{q'}}{\varphi_0^{q'-1}} \cdot \frac{|\nabla \xi|^{q'}}{\xi^{q'-1}} \right) \\ &\leq C_2 (\rho^{-4q'} + \rho^{-(N-1)q'-3q'}) \leq C_3 \rho^{-4q'},\end{aligned}$$

где константы C_1 , C_2 и C_3 можно выбрать не зависящими от ρ .

Теперь, используя полученное соотношение и свойство 5) функции φ , оценим первый интеграл, стоящий в правой части (2.3):

$$\begin{aligned}\int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx &\leq C_3 \rho^{-4q'} \cdot \text{meas}(\text{supp } \Delta^2 \varphi) \\ &\leq C_3 \rho^{-4q'} \cdot \text{meas}(\overline{B}_{2\rho} \setminus B_\rho) \leq C_4 \rho^{N-4q'}.\end{aligned}$$

Применяя неравенство (2.3) и учитывая свойства функции $\varphi = \varphi(x)$ и решения $u = u(x)$ на сфере ∂B_R , получим следующее соотношение:

$$\int_{B'_R} \varphi |u|^q dx \leq C \cdot \int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \leq C_5 \rho^{N-4q'}, \quad (2.8)$$

справедливое для всех $\rho \gg R$.

Заметим теперь, что неравенства $q \leq N/(N-4)$ и $N-4q' \leq 0$ эквивалентны. Пусть сначала $N-4q' < 0$; тогда, переходя в неравенстве (2.8) к пределу при $\rho \rightarrow +\infty$ и учитывая при этом свойство 4) функции φ , находим

$$\int_{B'_R} \xi |u|^q dx = 0.$$

А это возможно лишь при $u \equiv 0$ в B'_R , что противоречит начальному предположению о нетривиальности данного решения.

Если же $N = 4q'$, то из неравенства (2.8) мы получим, что интеграл от $\varphi|u|^q$ по B'_R равномерно ограничен по ρ :

$$\int_{B'_R} \varphi|u|^q dx \leq C_5 < \infty.$$

Так как при всех $\rho > R$ будет справедливо тождество $\varphi \equiv \xi$ для $R \leq |x| \leq \rho$, то в силу независимости от ρ константы C_5 имеет место оценка

$$\int_{B'_R} \xi|u|^q dx \leq C_5.$$

Здесь функция $\xi|u|^q$ не зависит от параметра ρ , а тогда, как известно из общей теории интеграла, имеем

$$\int_{\overline{B}_{2\rho} \setminus B_\rho} \xi|u|^q dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow +\infty.$$

Из (2.8) также следует, что

$$\int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \leq \int_{\overline{B}_{2\rho} \setminus B_\rho} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \leq C_6$$

при всех достаточно больших ρ .

Подставим неравенство (2.2) в (2.1), тогда (поскольку интеграл по сфере ∂B_R положителен)

$$\begin{aligned} \int_{B'_R} \varphi|u|^q dx &\leq \left(\int_{\overline{B}_{2\rho} \setminus B_\rho} \varphi|u|^q dx \right)^{1/q} \cdot \left(\int_{\overline{B}_{2\rho} \setminus B_\rho} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \right)^{1/q'} \\ &\leq C_6^{1/q'} \left(\int_{\overline{B}_{2\rho} \setminus B_\rho} \varphi|u|^q dx \right)^{1/q} \leq C_6^{1/q'} \left(\int_{\overline{B}_{2\rho} \setminus B_\rho} \xi|u|^q dx \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

так как $\varphi(r) \leq \xi(r)$ для всех $r > R$. Снова используя равенство $\varphi(r) = \xi(r)$ для $R < r$, находим

$$\int_{R < |x| < \rho} \xi|u|^q dx \leq C_6^{1/q'} \cdot \left(\int_{\overline{B}_{2\rho} \setminus B_\rho} \xi|u|^q dx \right)^{1/q} \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow +\infty$, т.е. в пределе

$$\int_{B'_R} \xi|u|^q dx = 0.$$

Таким образом, и в этом случае $u \equiv 0$ в B'_R . Это доказывает первое утверждение теоремы. Второе утверждение о существовании глобальных решений для $q > N/(N-4)$ вытекает из следующего примера.

Итак, пусть $N > 4$, $\alpha = 4/(q-1)$ и $q > N/(N-4)$. Заметим, что тогда $\alpha = 4/(q-1) < N-4$. Введем в рассмотрение функцию $u(x) = \varepsilon \cdot |x|^{-\alpha}$, $x \in B'_R$, с достаточно малым положительным ε и покажем, что она является решением задачи (1.4). Причем

$$u|_{\partial B_R} > 0, \quad \Delta u|_{\partial B_R} < 0.$$

Для доказательства этого воспользуемся следующей легко проверяемой формулой:

$$\Delta r^a = a(a + N - 2)r^{a-2}, \quad r = |x|.$$

Нетрудно также проверить, что при всех $q > N/(N-4)$ и $r \geq R$ имеет место неравенство

$$\Delta u = -\varepsilon \alpha (N - \alpha - 2) r^{-\alpha-2} < 0,$$

следовательно, $u = u(x)$ удовлетворяет краевым условиям. Далее,

$$\Delta^2 u = \varepsilon \alpha (\alpha + 2) (N - 2 - \alpha) (N - 4 - \alpha) r^{-\alpha-4} > 0,$$

так как $\alpha < N-4$, и можно выбрать такое $\varepsilon > 0$, что $\Delta^2 u \geq \varepsilon^q r^{-\alpha-4}$ для всех $r \geq R > 0$. Таким образом, введенная функция является решением задачи (1.4).

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $N \leq 4$, то можно доказать, что задача (1.4) не имеет глобальных решений при всех $q > 1$, т.е. здесь $q^* = \infty$. Действительно, при $N = 3, 4$ это непосредственно следует из предельного перехода в неравенстве (2.8) и того, что $N < 4q'$ при $q > 1$. В случае $N = 1, 2$ необходимо построить функцию φ , удовлетворяющую свойствам 1)–5), и провести с ней все рассуждения, как и при $N > 4$. Эти доказательства, по существу, в точности повторяют предыдущие рассуждения, пробные функции строятся элементарно. Например, при $N = 1$ можно принять $\varphi(r) = (r - R)\varphi_0(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Допустим, что локальное решение задачи (1.4) определено в шаровом слое $B_{\rho_0} \setminus B_R$ для достаточно большого $\rho_0 \gg R$. Проанализируем соотношение (2.3). Вспомогательные свойства пробной функции φ (она определена при доказательстве теоремы 2 формулой (2.4)), запишем (2.3) в виде

$$\int_{B'_R} \varphi |u|^q dx - 2(N-2)R^{1-N} \int_{\partial B_R} \Delta u ds \leq C \cdot \int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx.$$

А поскольку интеграл от $\varphi |u|^q$ по множеству B'_R неотрицателен, то это неравенство не изменится, если мы отбросим этот интеграл. Тогда с учетом (2.8) получим

$$-2(N-2)R^{1-N} \int_{\partial B_R} \Delta u ds = -2(N-2)a_2 R^{1-N} \leq C_5 \rho^{N-4q'}. \quad (2.9)$$

Левая часть данного соотношения строго положительна, фиксирована и зависит только от заданных значений $u(x)$ на ∂B_R ; правая часть монотонно убывает при $\rho \rightarrow +\infty$. Следовательно, ρ не может бесконечно возрастать. Из (2.9) находим допустимые значения для ρ

$$\rho \leq \left(\frac{C_5 R^{N-1}}{2(N-2)|a_2|} \right)^\gamma,$$

где

$$\gamma = \frac{1}{4q' - N} = \frac{q - 1}{N + 4q - Nq} > 0.$$

Вспомогательное определение локального решения и учитывая, что необходимо включение $\text{supp } \varphi \subset \overline{B}_{2\rho} \setminus B_R$, получим условие, при котором могут существовать локальные решения задачи (1.4):

$$r \leq R_0 = \frac{c_0}{|a_2|^\gamma}$$

с $c_0 = 2(C_5 R^{N-1}/(2(N-2)))^\gamma$, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим сначала случай $N > 4$. Зафиксируем действительный параметр $\rho > R$ и введем пробную функцию $\varphi(x)$ по формуле (2.4) с

$$\xi(r) = \frac{1}{r^{N-4}} - \frac{1}{R^{N-4}} + \frac{N-4}{N} \left(\frac{r^2}{R^{N-2}} - \frac{R^2}{r^{N-2}} \right).$$

Функция $\varphi = \varphi(r)$ обладает свойствами:

- 1) $\varphi(r) \geq 0$ при $r \geq R$;
- 2) $\varphi|_{\partial B_R} = \frac{\varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial B_R} = \Delta \varphi|_{\partial B_R} = 0$;
- 3) $\frac{\partial(\Delta \varphi)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial B_R} < 0$;
- 4) $\varphi(r)$ сходится к $\xi(r)$ при $\rho \rightarrow +\infty$ для каждого $r \geq R$;
- 5) $\text{supp } \Delta^2 \varphi \subset \overline{B}^{2\rho} \setminus B^\rho$.

Докажем свойство 1). Поскольку $\varphi_0 \geq 0$, то достаточно показать неотрицательность $\xi(r)$. Найдем производную:

$$\begin{aligned} \xi'(r) &= -\frac{N-4}{r^{N-3}} + \frac{2(N-4)}{NR^{N-2}}r + \frac{(N-2)(N-4)}{Nr^{N-1}}R^2 \\ &= \frac{N-4}{Nr^{N-1}}R^2 \cdot \left[2 \left(\left(\frac{r}{R} \right)^N - 1 \right) - N \left(\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right) \right] \\ &= \frac{N-4}{Nr^{N-1}}R(r-R) \cdot \left[2 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{r}{R} \right)^i - N \left(\frac{r}{R} + 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Используем тождество $N(r/R + 1) = \sum_{i=0}^{N-1} (r/R + 1)$, тогда

$$\begin{aligned} \xi'(r) &= \frac{N-4}{Nr^{N-1}}R(r-R) \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left(2 \left(\frac{r}{R} \right)^i - \frac{r}{R} - 1 \right) \\ &= \frac{N-4}{Nr^{N-1}}R(r-R) \cdot \sum_{i=2}^{N-1} \left(2 \left(\frac{r}{R} \right)^i - \frac{r}{R} - 1 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

при $r \geq R$. Следовательно, $\xi(r)$ не убывает и неотрицательна (ведь $\xi(R) = 0$) при $r \geq R$.

Проверим остальные свойства функции φ . Замечая, что $\varphi(r) \equiv \xi(r)$ при $r \in [R, \rho]$, находим

$$\begin{aligned} \varphi|_{\partial B_R} &= \xi(R) = 0, \quad \frac{\varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial B_R} = -\xi'(R) = 0, \\ \Delta \xi &= \xi'' + \frac{N-1}{r}\xi' = 2(N-4) \left(\frac{1}{R^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}} \right), \\ \Delta \varphi|_{\partial B_R} &= \Delta \xi|_{\partial B_R} = 0, \\ \frac{\partial(\Delta \varphi)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial B_R} &= -\frac{\partial(\Delta \xi)}{\partial r} \Big|_{\partial B_R} = -2(N-2)(N-4)R^{1-N} < 0, \\ \Delta^2 \xi &= 0 \quad \text{в } B'_R. \end{aligned}$$

Свойства 4) и 5) достаточно ясны. Кроме того, при $\rho \gg R$ и $r \in [\rho, 2\rho]$ справедливы неравенства

$$\xi \geq c_1 \rho^2, \quad |\nabla^k \xi| \leq c_2 \rho^{2-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

с некоторыми константами c_1 и c_2 .

Оценивая $|\Delta^2 \varphi|^{q'}/\varphi^{q'-1}$ при $x \in \text{supp } \Delta^2 \varphi$ так же, как и в доказательстве теоремы 2, получаем

$$\frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} \leq C_1 \sum_{k=0}^3 \frac{|\nabla^{4-k} \varphi_0|^{q'}}{\varphi_0^{q'-1}} \cdot \frac{|\nabla^k \xi|^{q'}}{\xi^{q'-1}} \leq C_2 \sum_{k=0}^3 \frac{\rho^{(2-k)q'}}{\rho^{(4-k)q'} \rho^{2(q'-1)}} = C_3 \rho^{2-4q'},$$

где C_1 , C_2 и C_3 не зависят от ρ . Тогда, применяя свойство 5) функции φ , будем иметь

$$\int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \leq C_3 \rho^{2-4q'} \cdot \text{meas}(\overline{B}_{2\rho} \setminus B_\rho) \leq C_4 \rho^{N+2-4q'}.$$

Вспоминая неравенство (2.3) и учитывая значения функций φ и u на ∂B_R , найдем

$$\int_{B'_R} \varphi |u|^q dx \leq C \cdot \int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \leq C_5 \rho^{N+2-4q'} \quad (2.10)$$

при всех $\rho \gg R$.

Считая $N + 2 - 4q' < 0$, переходим в неравенстве (2.10) к пределу при $\rho \rightarrow +\infty$, учитывая свойство 4), получим

$$\int_{B'_R} \xi \cdot |u|^q dx = 0,$$

что возможно только при $u \equiv 0$ в B'_R . А это означает отсутствие нетривиальных глобальных решений задачи (1.5). При $N + 2 - 4q' = 0$ применим рассуждения из доказательства теоремы 2 в предельном случае и снова получим противоречие.

Итак, для $N > 4$ неравенство $N + 2 - 4q' \leq 0$ означает отсутствие глобальных решений, преобразуя его, будем иметь $q \leq (N + 2)/(N - 2)$. Заметим теперь, что при $N = 1$ все приведенные рассуждения останутся в силе, причем неравенство $N + 2 - 4q' \leq 0$ верно для всех $q > 1$.

Случаи $N = 2, 3, 4$ необходимо рассматривать отдельно и в каждом из них строить пробную функцию, удовлетворяющую условиям 1)–5). Приведем это построение для $N = 2$, остальные случаи разбираются аналогично. При этом будем использовать представление оператора Лапласа в полярных координатах.

Функцию φ берем в виде (2.4), причем $\xi = \xi(r)$ должна удовлетворять соотношениям

- 1° $\xi(r) \geq 0$ для всех $r \geq R$;
- 2° $\xi(R) = \xi'(R) = \xi''(R) = 0$;
- 3° $\frac{\partial(\Delta \xi)}{\partial r} > 0$ при $r = R$;
- 4° $\Delta^2 \xi = 0$ для всех $r \geq R$.

Выберем какое-нибудь решение уравнения $r\eta''(r) + \eta'(r) = 0$, удовлетворяющее условиям $\eta(R) = 0$, $\eta'(R) > 0$. Пусть, например,

$$\eta(r) = \frac{4}{R^2} \ln \frac{r}{R}.$$

Теперь задача о нахождении функции $\xi(r)$ сводится к решению задачи Коши для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\xi'' + \frac{1}{r}\xi' = \frac{4}{R^2} \ln \frac{r}{R}, \quad \xi(R) = \xi'(R) = 0.$$

После несложных вычислений находим

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(\ln \frac{r}{R} - 1\right) + \ln \frac{r}{R} + 1.$$

Можно показать, что найденная функция $\xi(r)$ неотрицательна и, таким образом, удовлетворяет условиям 1°–4°, а функция φ – условиям 1)–5).

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольный параметр. Справедливы неравенства

$$\xi \geq c_1 \rho^2, \quad |\nabla^k \xi| \leq c_2 \rho^{2-k+\varepsilon}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

при всех достаточно больших ρ и $\rho \leq r \leq 2\rho$.

Теперь можем оценить интеграл

$$\begin{aligned} \int_{B'_R} \varphi |u|^q dx &\leq C \int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \frac{|\Delta^2 \varphi|^{q'}}{\varphi^{q'-1}} dx \leq C_1 \int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} \sum_{k=0}^3 \frac{|\nabla^{4-k} \varphi_0|^{q'}}{\varphi_0^{q'-1}} \cdot \frac{|\nabla^k \xi|^{q'}}{\xi^{q'-1}} dx \\ &\leq C_2 \sum_{k=0}^3 \frac{\rho^{(2-k+\varepsilon)q'}}{\rho^{(4-k)q'} \rho^{2(q'-1)}} \cdot \int_{\text{supp } \Delta^2 \varphi} dx \\ &\leq C_3 \rho^{2-4q'+\varepsilon q'} \cdot \text{meas}(\overline{B}_{2\rho} \setminus B_\rho) \leq C_4 \rho^{4(1-q')+\varepsilon q'}, \end{aligned}$$

где все константы выбираются независимо от ρ .

Если $q > 1$, то и $q' > 1$, и мы можем подобрать такое $\varepsilon = \varepsilon(q)$, чтобы $4(1-q') + \varepsilon q' < 0$, а это означает $u \equiv 0$ в B'_R при $\rho \rightarrow +\infty$.

Для завершения доказательства еще требуются примеры глобальных решений задачи (1.5) для случая $q > (N+2)/(N-2)$, $N > 2$.

Итак, пусть $N \geq 3$, $q > (N+2)/(N-2)$. Решение ищем в виде

$$u = -\varepsilon r^{-4/(q-1)}, \quad r = |x|$$

с некоторым $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{4\varepsilon}{q-1} \left(N - \frac{4}{q-1} - 2 \right) r^{-4/(q-1)-2}; \\ \Delta^2 u &= \frac{4\varepsilon}{q-1} \left(-2 - \frac{4}{q-1} \right) \left(N - \frac{4}{q-1} - 2 \right) \left(N - \frac{4}{q-1} - 4 \right) r^{-4q/(q-1)} \\ &\geq \varepsilon^q r^{-4q/(q-1)}. \end{aligned}$$

Причем последнее неравенство будет выполняться, если

$$\begin{aligned} & \left(N - \frac{4}{q-1} - 2\right) \left(N - \frac{4}{q-1} - 4\right) < 0, \\ 0 < \varepsilon & \leq \left[\frac{8(q+1)}{(q-1)^2} \left(2 + \frac{4}{q-1} - N\right) \left(N - \frac{4}{q-1} - 4\right) \right]^{1/(q-1)}. \end{aligned}$$

Данные соотношения имеют место, если $q > (N+2)/(N-2)$ при $N = 3, 4$ и $(N+2)/(N-2) < q < N/(N-4)$ при $N > 4$.

Теорема полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Доказательство этого утверждения легко получается путем анализа неравенства (2.3) (ср. предложение 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 и 4. Покажем, что функция

$$u = \varepsilon r^{-\alpha}, \quad r = |x|$$

с подходящими параметрами $\varepsilon, \alpha > 0$ удовлетворяют задаче (1.6) при любом $q > 1$.

Пусть $\alpha > \max\{N-2, 4/(q-1)\}$. Имеем при $r \geq R$

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\alpha \varepsilon (-\alpha + N - 2) r^{-\alpha-2} = \alpha \varepsilon (\alpha - (N-2)) r^{-\alpha-2} > 0, \\ \Delta^2 u &= \alpha \varepsilon (\alpha + 2)(\alpha - (N-2))(\alpha - (N-4)) r^{-\alpha-4} > 0. \end{aligned}$$

Неравенство $\Delta^2 u \geq |u|^q$ будет выполняться, если выбрать ε из условия

$$0 < \varepsilon \leq (\alpha(\alpha+2)(\alpha-N+2)(\alpha-N+4)R^{\alpha q - \alpha - 4})^{1/(q-1)}.$$

Попутно мы проверили, что функция $u = \varepsilon r^{-\alpha}$ при подходящих ε и α удовлетворяет условиям задачи (1.2). Теоремы доказаны.

Выражаю благодарность проф. Г.И. Лаптеву за постановку задачи и большое внимание к этой работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных. Тр. МИАН. Т. 234. М.: Наука, 2001.
- [2] Митидиери Э., Похожаев С.И. Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в $\mathbb{R}^N$ // Тр. МИАН. 1999. Т. 227. С. 192–222.
- [3] Митидиери Э., Похожаев С.И. Отсутствие глобальных положительных решений квазилинейных эллиптических неравенств // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 4. С. 456–460.

Тульский государственный университет
E-mail: volodin@uic.tula.ru

Поступило
07.10.2004