Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, Проекторно-выпуклые комбинации в C^* -алгебрах и проблема инвариантного подпространства. I, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 311–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:55:43

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПРОЕКТОРНО-ВЫПУКЛЫЕ КОМБИНАЦИИ В C^* -АЛГЕБРАХ И ПРОБЛЕМА ИНВАРИАНТНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА. I

А. М. Бикчентаев

1. Введение. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim \mathcal{H} \geq 2$. Через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ обозначим $*$ -алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Оператор $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *идемпотентом*, если $x = x^2$; *проектором*, если $x = x^2 = x^*$. Для унитарной C^* -подалгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ через $\mathcal{A}^{\text{nor}}$, $\mathcal{A}^u$, $\mathcal{A}^{\text{sa}}$, $\mathcal{A}^+$, $\mathcal{A}^{\text{id}}$ и $\mathcal{A}^{\text{pr}}$ будем обозначать ее подмножества нормальных операторов, унитарных операторов, эрмитовых операторов, неотрицательных операторов, идемпотентов и проекторов соответственно. Пусть $\tilde{\mathcal{A}}_r = \{x \in \mathcal{A} : \|x\| \leq r\}$ для $r > 0$, e – единица $\mathcal{A}$ и $p^\perp = e - p$ для $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. Формула $s_p = p - p^\perp$, $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, задает биекцию между множествами $\mathcal{A}^{\text{pr}}$ и $\mathcal{A}^{\text{sym}} = \mathcal{A}^u \cap \mathcal{A}^{\text{sa}}$.

В [1] доказано, что каждый оператор x из алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ без прямого абелева слагаемого представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть произведение не более, чем трех проекторов из $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ собственно бесконечна, то число сомножителей не превышает двух. Для $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ результат был анонсирован в [2]. В [1] дан обзор имеющихся работ в этом направлении в контексте C^* -алгебр.

2. Индуктивный процесс и проблема инвариантного подпространства. Следуя [3], для унитарной C^* -алгебры $\mathcal{A}$ зададим индуктивный процесс

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{A}^{\text{pr}}, \quad \dots, \quad \mathcal{L}_{n+1} = \{ap + bp^\perp : a, b \in \mathcal{L}_n, p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}\}, \quad \dots \quad (1)$$

Имеем $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \dots$. Положим $\mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$. Запись $\mathcal{A} \in (\text{UF})$ означает, что каждый $u \in \mathcal{A}^u$ является конечным произведением операторов из $\mathcal{A}^{\text{sym}}$. Для $\mathcal{A} \in (\text{UF})$ имеем $\mathcal{A} = \mathcal{L}$, т.е. процесс (1) исчерпывает $\mathcal{A}$; алгебра фон Неймана $\mathcal{A} \in (\text{UF})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ не имеет прямых слагаемых конечного типа I (см. [3]). В связи с этим Д. Х. Муштари и А. Н. Шерстнев поставили вопрос: что дает процесс (1) для $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ при $\dim \mathcal{H} < \infty$? Основным результатом заметки является

ТЕОРЕМА. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} < \infty$, то $\mathcal{A} = \mathcal{L}$.

Любопытно, что модификация процесса (1) в виде

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{A}^{\text{nor}}, \quad \dots, \quad \mathcal{I}_{n+1} = \{pa + bp^\perp : a, b \in \mathcal{I}_n, p \in \mathcal{A}^{\text{id}}\}, \quad \dots \quad (2)$$

связана с классической проблемой инвариантного подпространства (далее ИП). Имеем $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \subset \dots$. Положим $\mathcal{I} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00799.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(0 \neq) \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ и $u \in \mathcal{A}^u$ произвольны. Имеют место эквивалентности

$$x \in \mathcal{I} \iff x^* \in \mathcal{I} \iff \mu e + x \in \mathcal{I} \iff \lambda x \in \mathcal{I} \iff u x u^* \in \mathcal{I}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(0 \neq) \lambda \in \mathbb{C}$, операторы $a, b \in \mathcal{I}$, $p \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ и $u \in \mathcal{A}^u$. Для $x = F(a, b, p) = pa + bp^\perp$ имеем

$$\begin{aligned} x^* &= F(b^*, a^*, p^{*\perp}), & \lambda e + x &= F(\lambda e + a, \lambda e + b, p), \\ \lambda x &= F(\lambda a, \lambda b, p), & u x u^* &= F(u a u^*, u b u^*, u p u^*). \end{aligned}$$

Методом математической индукции легко проверяются эквивалентности

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{I}_n &\iff x^* \in \mathcal{I}_n, \quad n \in \mathbb{N}, & x \in \mathcal{I}_n &\iff \lambda e + x \in \mathcal{I}_n, \quad n \in \mathbb{N}; \\ x \in \mathcal{I}_n &\iff \lambda x \in \mathcal{I}_n, \quad n \in \mathbb{N}, & x \in \mathcal{I}_n &\iff u x u^* \in \mathcal{I}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Каждый оператор $x \in \mathcal{I}$ обладает нетривиальным ИП.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x = pa + bp^\perp \in \mathcal{I}_{n+1}$ и $p \notin \{0, e\}$, то $xp = rap = p xp$ и $p \mathcal{H}$ – ИП для x . Если $p = 0$, то $x = b \in \mathcal{I}_n$ и $x = rc + dr^\perp$ для некоторых $c, d \in \mathcal{I}_{n-1}$ и $r \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. Если $p = e$, то $x = a \in \mathcal{I}_n$ и мы также двигаемся по цепочке процесса (2) назад. Наихудший вариант дает $x \in \mathcal{I}_1 = \mathcal{A}^{\text{nor}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Равенство $\mathcal{A} = \mathcal{I}$ (или лишь включение $\tilde{\mathcal{A}}_r \subset \mathcal{I}$ для некоторого $r > 0$) дало бы положительное решение проблемы ИП как в классической постановке ($\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ сепарабельно и бесконечномерно), так и в постановке [4] для факторов фон Неймана $\mathcal{A}$ типа II₁: пусть $x \in \mathcal{A}$, существует ли такой $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}} \setminus \{0, e\}$, что $p x p = x p$?

Отметим, что для $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ при $\dim \mathcal{H} < \infty$ применение процесса (2) позволяет получить новое доказательство классической теоремы Жордана.

3. Леммы. Далее всюду $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\{h_1, \dots, h_n\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}$ и $\det(x)$ – определитель матрицы оператора $x \in \mathcal{A}$.

ЛЕММА 1 [5, теорема 3], [6, теорема 4.11]. Каждый $u \in \mathcal{A}^u$ с $\det(u) = \pm 1$ является конечным произведением операторов из $\mathcal{A}^{\text{sym}}$.

С помощью леммы 1 следующие две леммы доказываются аналогично леммам 2 и 3 из [3].

ЛЕММА 2. Для любых $a, b \in \mathcal{L}$, $u \in \mathcal{A}^u$ с $\det(u) = \pm 1$ оператор

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot u \in \mathcal{L}.$$

ЛЕММА 3. Для любых $a \in \mathcal{L}$, $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathcal{A}^u$ с $\det(u_1), \dots, \det(u_m) \in \{-1, +1\}$ оператор

$$a \cdot \frac{e+u_1}{2} \cdot \frac{e+u_2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{e+u_m}{2} \in \mathcal{L}.$$

ЛЕММА 4. Имеем $\tilde{\mathcal{A}}_1 \cap \mathcal{A}^+ \subset \mathcal{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \leq a \leq e$. Выберем такой $\{h_1, \dots, h_n\} \subset \mathcal{H}$, что $a = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n$, где $0 \leq \alpha_k \leq 1$, $p_k = h_k \otimes h_k$, $k = 1, \dots, n$. Для четного n положим $m = n/2$ и

$$a_1 = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m, \quad a_2 = \alpha_{m+1} p_{m+1} + \dots + \alpha_n p_n, \quad p = p_1 + \dots + p_m. \quad (3)$$

Пусть $f(t) = \sqrt{t(1-t)}$ для $0 \leq t \leq 1$. Равенство для блочных матриц

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & f(a_1) \\ f(a_1) & p - a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $f(a_1)$ определена по конечномерной спектральной теореме (далее КСТ), дает представления вида $a_1 = pqr$, $a_2 = p^\perp r p^\perp$ с некоторыми $q, r \in \mathcal{A}^{\text{Pr}}$ (ср. с [7, задача 177], [8]). Поэтому $a_1, a_2 \in \mathcal{L}$ и $a = a_1 p + a_2 p^\perp \in \mathcal{L}$.

Для нечетного n положим $m = (n-1)/2$, и пусть a_1, p такие же, как в (3),

$$a_2 = \alpha_{m+1} p_{m+1} + \dots + \alpha_{n-1} p_{n-1}, \quad a_3 = \alpha_n p_n, \quad q = p^\perp - p_n.$$

Тогда $a_1 = p q_1 p$, $a_2 = q q_2 q$, $a_3 = p_n q_3 p_n$ с некоторыми $q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{A}^{\text{Pr}}$. Теперь $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{L}$ и $a_1 + a_2 = a_1 p + a_2 p^\perp \in \mathcal{L}$, $a = (a_1 + a_2) p^\perp + a_3 p_n \in \mathcal{L}$.

ЛЕММА 5. Существует такое число $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$, что для каждого оператора $x \in \tilde{\mathcal{A}}_\varepsilon \cap \mathcal{A}^{\text{sa}}$ оператор $ix \in \mathcal{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что можно выбрать

$$\varepsilon = \begin{cases} 2^{-3}, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 2^{(3-3n)/2}, & \text{если } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ 2^{(9-3n)/2}, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Для одномерных проекторов $p_k = h_k \otimes h_k$ имеем $e = p_1 + \dots + p_n$. Пусть операторы $0 \leq a, b \leq e$. Для четного n имеем $\det(ie) = i^n \in \{-1, +1\}$. Лемма 3 для $a, u_1 = u_2 = ie$ дает

$$a \cdot \frac{e + ie}{2} \cdot \frac{e + ie}{2} = \frac{i}{2} a \in \mathcal{L}. \quad (4)$$

Теперь по лемме 3 для $d = (i/2)a$, $u_1 = u_2 = ie$ получаем $-(1/4)a \in \mathcal{L}$, поэтому для произвольного $p \in \mathcal{A}^{\text{Pr}}$ оператор $c = -(1/4)ap + (1/4)bp^\perp \in \mathcal{L}$ и КСТ дает $\tilde{\mathcal{A}}_{1/4} \cap \mathcal{A}^{\text{sa}} \subset \mathcal{L}$. Заменив в (4) оператор a на c , получаем $(i/2)c \in \mathcal{L}$, и можно положить $\varepsilon = 1/8$.

Если $n \equiv 3 \pmod{4}$, то $n = 4l - 1$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Операторы

$$u_m = p_m + i \sum_{k=1, k \neq m}^n p_k \in \mathcal{A}^{\text{u}}, \quad \det(u_m) = -1, \quad m = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Имеем $e + u_m = 2p_m + (1+i) \sum_{k=1, k \neq m}^n p_k$, поэтому лемма 3 для $a, u_1, \dots, u_n$ дает

$$\begin{aligned} a \cdot \prod_{m=1}^n \frac{e + u_m}{2} &= a \cdot \left(\frac{1+i}{2} \right)^{n-1} \sum_{k=1}^n p_k = \left(\frac{1+i}{2} \right)^{n-1} a \\ &= \frac{\exp(i\pi(4l-2)/4)}{2^{2l-1}} a = \frac{i}{2^{2l-1}} a \in \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь по лемме 3 для $i2^{1-2l}a$, $u_1, \dots, u_n$ имеем $-2^{2-4l}a = -2^{1-n}a \in \mathcal{L}$, поэтому для произвольного $p \in \mathcal{A}^{\text{Pr}}$ оператор $c = -2^{1-n}ap + 2^{1-n}bp^\perp \in \mathcal{L}$ и КСТ дает $\tilde{\mathcal{A}}_{2^{1-n}} \cap \mathcal{A}^{\text{sa}} \subset \mathcal{L}$. Заменив в (6) оператор a на c , получаем $2^{1-2l}ic \in \mathcal{L}$, и можно положить $\varepsilon = 2^{-3(n-1)/2}$.

Если $n \equiv 1 \pmod{4}$, то $n = 4l + 1$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Операторы

$$u = ip_1 + ip_2 + \sum_{k=3}^n p_k, \quad u_m = p_1 + p_2 + p_m + i \sum_{k=3, k \neq m}^n p_k$$

принадлежат $\mathcal{A}^u$, $\det(u) = \det(u_m) = -1$, $m = 3, \dots, n$. Лемма 3 для

$$a, u_3, \dots, u_n, \underbrace{u, \dots, u}_{n-3 \text{ раз}}$$

дает

$$\begin{aligned} & a \cdot \prod_{m=3}^n \frac{e + u_m}{2} \cdot \left(\frac{e + u}{2} \right)^{n-3} \\ &= a \cdot \left(2^{n-2}(p_1 + p_2) + 2(1+i)^{n-3} \sum_{k=3}^n p_k \right) \left((1+i)^{n-3}(p_1 + p_2) + 2^{n-3} \sum_{k=3}^n p_k \right) \\ &= 2^{n-2}(1+i)^{n-3} a \sum_{k=1}^n p_k = \left(\frac{1+i}{2} \right)^{n-3} a = \frac{i}{2^{2l-1}} a \in \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (7)$$

Применив лемму 3 к операторам

$$d = i2^{1-2l} a, u_3, \dots, u_n, \underbrace{u, \dots, u}_{n-3 \text{ раз}}$$

имеем

$$d \cdot \prod_{m=3}^n \frac{e + u_m}{2} \cdot \left(\frac{e + u}{2} \right)^{n-3} = -\frac{1}{2^{4l-2}} a = -\frac{1}{2^{n-3}} a \in \mathcal{L}.$$

Для произвольного $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ оператор $c = -2^{3-n}ap + 2^{3-n}bp^\perp \in \mathcal{L}$, и КСТ дает $\tilde{\mathcal{A}}_{2^{3-n}} \cap \mathcal{A}^{\text{sa}} \subset \mathcal{L}$. Заменив в (7) оператор a на c , получаем $2^{1-2l}ic \in \mathcal{L}$, и можно положить $\varepsilon = 2^{-3(n-3)/2}$.

ЛЕММА 6. Имеем $\tilde{\mathcal{A}}_\varepsilon/2 \subset \mathcal{L}$ для $\varepsilon = \varepsilon(n)$ из леммы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon = \varepsilon(n)$ из леммы 5 и $z \in \tilde{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Положим

$$z_1 = \operatorname{Re} z, \quad z_2 = \operatorname{Im} z, \quad x = \frac{z_2 - z_1}{2}, \quad y = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Тогда $z_1, z_2, x, y \in \tilde{\mathcal{A}}_\varepsilon \cap \mathcal{A}^{\text{sa}}$. Из леммы 5 следует, что операторы $ix, iy \in \mathcal{L}$. Для четного n в силу леммы 2 с $a = ix, b = iy, u = ie$ имеем

$$\frac{z}{2} = \frac{y-x}{2} + i \cdot \frac{x+y}{2} = \frac{ix+iy}{2} + \frac{ix-iy}{2} \cdot ie \in \mathcal{L}. \quad (8)$$

Для нечетного n определим $u_1, u_2 \in \mathcal{A}^u$ по (5). В силу леммы 2 с $a = ix, b = iy, u = u_k$ имеем

$$c_k = \frac{ix+iy}{2} + \frac{ix-iy}{2} \cdot u_k \in \mathcal{L}, \quad k = 1, 2.$$

Теперь с учетом представления (8) получаем

$$\frac{z}{2} = c_1 p_1^\perp + c_2 p_1 \in \mathcal{L}.$$

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы. По лемме 5 существует такое число $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$, что оператор $-\varepsilon e \in \mathcal{L}$. Поскольку [3, лемма 1]

$$x \in \mathcal{L} \iff e - x \in \mathcal{L},$$

оператор $(1 + \varepsilon)e \in \mathcal{L}$. По определению множества $\mathcal{L}$ найдется такой $k \in \mathbb{N}$, что оператор $(1 + \varepsilon)e \in \mathcal{L}_k$. Для произвольного $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ по построению последовательности $\{\mathcal{L}_m\}$ имеем $(1 + \varepsilon)p = (1 + \varepsilon)e \cdot p \in \mathcal{L}_{k+1}$, тем самым, $(1 + \varepsilon)\mathcal{A}^{\text{pr}} \subset \mathcal{L}_{k+1}$. Теперь в силу положительной однородности процесса (1) с учетом леммы 6 получаем $(1 + \varepsilon)\tilde{\mathcal{A}}_{\varepsilon/2} = \tilde{\mathcal{A}}_{\varepsilon(1+\varepsilon)/2} \subset \mathcal{L}$. Продолжая этот процесс, получаем включение $\tilde{\mathcal{A}}_{\varepsilon(1+\varepsilon)^k/2} \subset \mathcal{L}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)^k}{2} \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

имеем $\tilde{\mathcal{A}}_r \subset \mathcal{L}$ для любого $r > 0$. Осталось заметить, что $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{A}}_k$. Теорема доказана.

5. Следствия. Из теоремы Гельфанда–Наймарка о представлении абелевой унитарной C^* -алгебры и теоремы 2.3.3 [9] вытекает

Следствие 1. Если $\mathcal{D}$ – алгебра фон Неймана типа I_n , то $\mathcal{D} = \mathcal{L}$.

Следствие 2. Если процесс (1) исчерпывает C^* -алгебру $\mathcal{D}$, то каждый оператор из $\mathcal{D}$ представляется в виде конечной суммы конечных произведений ее проекторов.

Лемма 1 не обобщается даже на алгебру $\mathcal{D} = M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$. Для $u = \text{diag}(1, i) \oplus \text{diag}(1, i)$ имеем $\det(u) = -1$, однако он не представляется в виде конечного произведения элементов $\mathcal{D}^{\text{sym}}$. Однако справедливо

Следствие 3. Если процесс (1) исчерпывает каждую из унитарных C^* -алгебр $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m$, то он исчерпывает и прямую сумму $\mathcal{D}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_m$. В частности, если конечномерная C^* -алгебра $\mathcal{D}$ не содержит прямых абелевых слагаемых, то $\mathcal{D} = \mathcal{L}$.

Следствие 4. Если $\mathcal{D}$ – алгебра фон Неймана конечного типа I без прямых абелевых слагаемых, то $\mathcal{D} = \mathcal{L}$.

Переходя к сопряженным операторам, имеем

Следствие 5 (ср. [3, следствие 2]). Зададим индуктивный процесс, положив

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{D}^{\text{pr}}, \quad \dots, \quad \mathcal{S}_{n+1} = \{pa + p^\perp b : a, b \in \mathcal{S}_n, p \in \mathcal{D}^{\text{pr}}\}, \quad \dots \quad (9)$$

Тогда $\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$.

Замечание 2. Для процесса (9) справедливы аналоги следствий 1–3, а для процесса (2) справедливы аналоги следствий 2 и 3.

Замечание 3. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над $\mathbb{R}$, $2 \leq \dim \mathcal{H} \leq \infty$ и $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. В силу замечания 2 из [5] каждый оператор $u \in \mathcal{A}^u$ является произведением двух элементов из $\mathcal{A}^{\text{sym}}$.

Автор выражает свою признательность Д. Х. Муштари и А. Н. Шерстневу за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бикчентаев А. М. // Сиб. матем. ж. 2005. Т. 46. № 1. С. 32–45.
2. Бикчентаев А. М. // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 444–447.
3. Бикчентаев А. М., Шерстнев А. Н. // Матем. заметки. 2004. Т. 76. № 4. С. 625–628.
4. Haagerup U., Dykema K. // Amer. J. Math. 2004. V. 126. № 1. P. 121–189.
5. Radjavi H. // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 21. № 2. P. 369–372.
6. Thompson R. C. // Pacific J. Math. 1970. V. 33. № 3. P. 763–810.
7. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.
8. Maeda S. // Rev. Math. Phys. 1990. V. 1. № 2–3. P. 235–290.
9. Sakai S. C^* -Algebras and W^* -Algebras. New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1971.