Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Авсянкин, Н. К. Карапетянц, Проекционный метод
в теории интегральных операторов с однородными ядрами,
Матем. заметки, 2004, том 75, выпуск 2, 163–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm27>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 09:12:53

УДК 517.9

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

О. Г. Авсянкин, Н. К. Карапетянц

В работе исследуется вопрос о применимости проекционного метода к многомерным интегральным операторам с ядрами, однородными степени $(-n)$ и инвариантными относительно группы вращений $SO(n)$, в скалярном и матричном случаях.

Библиография: 6 названий.

Введение

Исследования, посвященные применимости проекционных методов к линейным ограниченным операторам в банаховом пространстве, являются весьма актуальными (см., например, [1]–[3]). В данной работе рассматривается вопрос о применимости проекционных методов к некоторым классам интегральных операторов с однородными ядрами в скалярном и матричном случаях.

Работа состоит из двух разделов. В разделе 1 вводятся необходимые определения и рассматриваются одномерные интегральные операторы с однородными степени (-1) ядрами. Такие операторы являются мультипликативными аналогами операторов свертки, а потому все результаты для них получаются непосредственно из соответствующих результатов для операторов свертки. Основные результаты работы содержатся в разделе 2, где изучаются многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами. Для исследования таких операторов применяется специальная методика, основанная на редукции многомерного случая к одномерному. Отметим, что некоторые результаты раздела 2 были анонсированы в [4].

В статье используются следующие обозначения:

$\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство;

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$;

$x' = x/|x|$;

$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$;

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$;

$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$;

$\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$;

$\mathbb{R}$ – компактификация $\mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой;

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

$\mathbb{Z}_+$ – множество всех целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ – компактификация множества $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой;

$Y_{m\mu}(\sigma)$ – сферические гармоники порядка m ;

$d_n(m)$ – размерность пространства сферических гармоник порядка m :

$$d_n(m) = (n + 2m - 2) \frac{(n + m - 3)!}{m!(n - 2)!};$$

$L_p^s(X)$ – пространство s -мерных вектор-функций с компонентами из $L_p(X)$;

$P_m(t)$ – многочлены Лежандра, определяемые равенством

$$P_m(t) = \begin{cases} \cos(m \arccos t), & n = 2, \\ (C_{m+n-3}^m)^{-1} C_m^{(n-2)/2}(t), & n \geq 3, \end{cases}$$

где $C_m^{(n-2)/2}(t)$ – многочлены Гегенбауэра.

1. Предварительные сведения и вспомогательные результаты

1.1. Определение проекционного метода. Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(X)$, $\{P_{\tau_1, \tau_2}\}$, $0 < \tau_1 < 1$, $1 < \tau_2 < \infty$, – семейство проекторов, действующих в X . Будем предполагать, что при $\tau_1 \rightarrow 0$, $\tau_2 \rightarrow \infty$ проекторы P_{τ_1, τ_2} сходятся в сильной операторной топологии к единичному оператору. Рассмотрим уравнение

$$P_{\tau_1, \tau_2} A P_{\tau_1, \tau_2} x = P_{\tau_1, \tau_2} y. \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что к оператору A применим *проекционный метод по системе проекторов* $(P_{\tau_1, \tau_2}; P_{\tau_1, \tau_2})$ при $\tau_1 \rightarrow 0$ и $\tau_2 \rightarrow \infty$, если

- 1) существуют такие числа $\delta_1 \in (0, 1)$ и $\delta_2 \in (1, \infty)$, что при всех $\tau_1 < \delta_1$ и $\tau_2 > \delta_2$ для любого $y \in X$ уравнение (1.1) имеет единственное решение $x_{\tau_1, \tau_2} \in P_{\tau_1, \tau_2} X$;
- 2) при $\tau_1 \rightarrow 0$ и $\tau_2 \rightarrow \infty$ решение x_{τ_1, τ_2} стремится по норме пространства X к решению $x \in X$ уравнения $Ax = y$.

Класс операторов, к которым применим проекционный метод по системе проекторов $(P_{\tau_1, \tau_2}; P_{\tau_1, \tau_2})$ обозначим через $\Pi\{P_{\tau_1, \tau_2}\}$.

Определение 1 эквивалентно тому, что оператор A обратим, при $0 < \tau_1 < \delta_1$ и $\delta_2 < \tau_2 < \infty$ операторы $P_{\tau_1, \tau_2} A P_{\tau_1, \tau_2}$ как операторы, действующие в $P_{\tau_1, \tau_2} X$, обратимы и операторы $(P_{\tau_1, \tau_2} A P_{\tau_1, \tau_2})^{-1} P_{\tau_1, \tau_2}$ при $\tau_1 \rightarrow 0$ и $\tau_2 \rightarrow \infty$ сильно сходятся к A^{-1} .

Очевидно, что все основные теоремы о проекционных методах, доказанные в [1] для случая однопараметрического семейства проекторов, сохраняют справедливость и в нашем случае. В дальнейшем мы будем ссылаться на результаты [1], предполагая, что они переформулированы в соответствии с определением 1.

Необходимость использования двухпараметрического семейства проекторов связана с тем, что рассматриваемые нами интегральные операторы с однородными ядрами имеют две особые точки: “в нуле” и “на бесконечности”.

В случае однопараметрического семейства проекторов $\{P_\tau\}$, $0 < \tau < 1$, мы будем также пользоваться определением 1, не оговаривая это особо.

1.2. Одномерные интегральные операторы с однородными степени (-1) ядрами. В пространстве $L_p(0, \infty)$ (здесь и далее предполагается, что $1 \leq p < \infty$) рассмотрим оператор

$$(\mathcal{H}\varphi)(r) = \int_0^\infty h(r, \rho)\varphi(\rho) d\rho, \quad r \in (0, \infty), \quad (1.2)$$

где функция $h(r, \rho)$

а) однородна степени (-1) , т. е.

$$h(\alpha r, \alpha \rho) = \alpha^{-1} h(r, \rho) \quad \forall \alpha > 0;$$

б) удовлетворяет условию $\int_0^\infty |h(1, \rho)|\rho^{-1/p} d\rho < \infty$.

Мы будем также рассматривать оператор

$$(H\varphi)(r) = \int_0^1 h(r, \rho)\varphi(\rho) d\rho, \quad r \in (0, 1), \quad (1.3)$$

действующий в пространстве $L_p(0, 1)$.

Теория таких операторов подробно изложена, например, в [5]. Следуя [5], назовем символом операторов $\lambda I - H$ и $\lambda I - \mathcal{H}$ функцию

$$\sigma(\xi) = \lambda - \int_0^\infty h(1, \rho)\rho^{-1/p+i\xi} d\rho, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Определим в пространстве $L_p(0, 1)$ проектор $\tilde{P}_\tau$, $0 < \tau < 1$, по формуле

$$(\tilde{P}_\tau\varphi)(r) = \begin{cases} \varphi(r), & \tau < r < 1, \\ 0, & 0 < r < \tau. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для того чтобы оператор $\lambda I - H \in \Pi\{\tilde{P}_\tau\}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\lambda I - H$ был обратим в $L_p(0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим оператор $W_p: L_p(0, 1) \rightarrow L_p(0, \infty)$ по формуле

$$(W_p\varphi)(t) = e^{-t/p}\varphi(e^{-t}).$$

Как известно (см. [5]), оператор $B = W_p H W_p^{-1}$ является оператором Винера-Хопфа, действующим в пространстве $L_p(0, \infty)$. Применяя к оператору B теорему 3.1 главы III книги [1] по системе проекторов $(W_p \tilde{P}_\tau W_p^{-1})$, получаем требуемый результат.

Далее, определим в пространстве $L_p(0, \infty)$ проектор $\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}$, $0 < \tau_1 < 1$, $1 < \tau_2 < \infty$, по формуле

$$(\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}\varphi)(r) = \begin{cases} \varphi(r), & \tau_1 < r < \tau_2, \\ 0, & r < \tau_1 \text{ или } r > \tau_2. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для того чтобы оператор $\lambda I - \mathcal{H} \in \Pi\{\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $\sigma(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$;
- 2) $\text{ind } \sigma(\xi) = 0$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следует отметить, что необходимым и достаточным условием обратимости оператора $\lambda I - \mathcal{H}$ в $L_p(0, \infty)$ является только одно условие 1), но для применимости проекционного метода необходимо и достаточно выполнения двух условий: 1) и 2).

Далее, в пространстве $L_p^s(0, 1)$ рассмотрим оператор $H \equiv H_s$ вида (1.3), где $h(r, \rho) = (h_{\ell j}(r, \rho))_{\ell, j=1}^s$ – матрица-функция, элементы которой удовлетворяют условиям а) и б). Аналогичный смысл имеет матричный оператор $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_s$. Положим

$$\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}^{(s)} = (\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2} \delta_{\ell j})_{\ell, j=1}^s \quad \text{и} \quad \tilde{P}_{\tau}^{(s)} = (\tilde{P}_{\tau} \delta_{\ell j})_{\ell, j=1}^s.$$

Символом оператора $\lambda I - H_s$ (и оператора $\lambda I - \mathcal{H}_s$) назовем матрицу-функцию

$$\mathfrak{G}(\xi) = \lambda E - \left(\int_0^\infty h_{\ell j}(r, \rho) \rho^{-1/p + i\xi} d\rho \right)_{\ell, j=1}^s, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

где E – единичная матрица.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для того чтобы оператор $\lambda I - H_s \in \Pi\{\tilde{P}_{\tau}^{(s)}\}$ ($\lambda I - \mathcal{H}_s \in \Pi\{\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}^{(s)}\}$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $\det \mathfrak{G}(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$;
- 2) все левые и правые индексы матрицы-функции $\mathfrak{G}(\xi)$ равны нулю.

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.

2. Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами

В пространстве $L_p(\Omega_n)$ рассмотрим интегральный оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\Omega_n} k(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in \Omega_n, \quad (2.1)$$

предполагая, что ядро $k(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1° однородности степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x, y) \quad \forall \alpha > 0;$$

2° инвариантности относительно группы $SO(n)$ вращений пространства $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$k(\omega(x), \omega(y)) = k(x, y) \quad \forall \omega \in SO(n);$$

3° суммируемости, т. е.

$$k = \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} dy < \infty.$$

Символом оператора $\lambda I - K$ назовем функцию $\sigma(m, \xi)$, заданную на компакте $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ равенством

$$\sigma(m, \xi) = \lambda - \int_{\mathbb{R}^n} k(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy. \quad (2.2)$$

Далее, в пространстве $L_p(\Omega_n)$ определим проектор P_τ , $0 < \tau < 1$, по формуле

$$(P_\tau \varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \tau < |x| < 1, \\ 0, & |x| < \tau. \end{cases}$$

Изучим вопрос о применимости к оператору $\lambda I - K$ проекционного метода по системе проекторов $(P_\tau; P_\tau)$. Для этого в пространстве $L_p(\Omega_n)$ рассмотрим интегральное уравнение, порожаемое оператором $\lambda I - K$:

$$\lambda \varphi(x) = \int_{\Omega_n} k(x, y) \varphi(y) dy + f(x). \quad (2.3)$$

Поскольку функция $k(x, y)$ удовлетворяет условию 2°, то существует такая функция $k_0(r^2, \rho^2, t)$, что $k(x, y) = k_0(|x|^2, |y|^2, x' \cdot y')$ [6, с. 36]. Учитывая это и переходя в уравнении (2.3) к сферическим координатам $x = r\sigma$, $y = \rho\theta$, получим

$$\lambda \Phi(r\sigma) = \int_0^1 \int_{S_{n-1}} \frac{1}{r} D\left(\frac{\rho}{r}, \sigma \cdot \theta\right) \Phi(\rho\theta) d\rho d\theta + F(r\sigma), \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(r\sigma) &= \varphi(r\sigma) r^{(n-1)/p}, & F(r\sigma) &= f(r\sigma) r^{(n-1)/p}, \\ D(\rho, t) &= k_0(1, \rho^2, t) \rho^{(n-1)/p'}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\int_0^\infty \int_{-1}^1 |D(\rho, t)| \rho^{-1/p} (1-t^2)^{(n-3)/2} d\rho dt < \infty. \quad (2.5)$$

Умножая уравнение (2.4) на $Y_{m\mu}(\sigma)$, интегрируя по единичной сфере и применяя формулу Функа–Гекке [6, с. 43], получим бесконечную диагональную систему одномерных интегральных уравнений:

$$\lambda \Phi_{m\mu}(r) = \int_0^1 \frac{1}{r} D_m\left(\frac{\rho}{r}\right) \Phi_{m\mu}(\rho) d\rho + F_{m\mu}(r), \quad r \in (0, 1), \quad (2.6)$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = 1, 2, \dots, d_n(m)$,

$$\begin{aligned} \Phi_{m\mu}(r) &= \int_{S_{n-1}} \Phi(r\sigma) Y_{m\mu}(\sigma) d\sigma, & F_{m\mu}(r) &= \int_{S_{n-1}} F(r\sigma) Y_{m\mu}(\sigma) d\sigma, \\ D_m(\rho) &= \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \int_{-1}^1 D(\rho, t) P_m(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рассмотрим в $L_p(0, 1)$ оператор

$$(K_m g)(r) = \int_0^1 \frac{1}{r} D_m \left(\frac{\rho}{r} \right) g(\rho) d\rho, \quad r \in (0, 1).$$

Легко проверить, что функция $D_m(\rho)$ удовлетворяет условию b) п. 1.2. Тогда оператор K_m есть оператор вида (1.3).

Анализируя связь между уравнением (2.3) и системой (2.6), убеждаемся в справедливости следующих утверждений (см. также [5, с. 75–82]).

ЛЕММА 1. 1) Оператор $\lambda I - K$ обратим в $L_p(\Omega_n)$ тогда и только тогда, когда оператор $\lambda I - K_m$ обратим в $L_p(0, 1)$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$.

2) Оператор $P_\tau(\lambda I - K)P_\tau$ обратим в $P_\tau(L_p(\Omega_n))$ тогда и только тогда, когда оператор $\tilde{P}_\tau(\lambda I - K_m)\tilde{P}_\tau$ обратим в $\tilde{P}_\tau(L_p(0, 1))$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Прежде всего покажем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|K_m\| = 0. \quad (2.8)$$

В самом деле, норма оператора K_m удовлетворяет неравенству (см. [5, с. 52])

$$\|K_m\| \leq \int_0^\infty |D_m(\rho)| \rho^{-1/p} d\rho. \quad (2.9)$$

Из (2.7) и свойств многочленов Лежандра следует, что $D_m(\rho) \rightarrow 0$ для почти всех $\rho \in (0, \infty)$. Тогда, применяя мажорантную теорему Лебега, с учетом (2.5) получаем, что интеграл в правой части (2.9) стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, справедливо равенство (2.8).

Из (2.8) вытекает существование такого числа $M_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $m > M_0$ операторы $\lambda I - K_m$ обратимы.

Далее, в [5, с. 82] с учетом (2.8) доказывается, что существует такое число $M \in \mathbb{N}$, что уравнение (2.3) в смысле разрешимости эквивалентно конечной системе одномерных уравнений (2.6), где $m = 0, 1, \dots, M$; $\mu = 1, 2, \dots, d_n(m)$. При этом число M можно выбрать так, чтобы выполнялось условие $M > M_0$. Так как система конечна, то оператор $\lambda I - K$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы операторы $\lambda I - K_m$, $m = 0, 1, \dots, M$. Все остальные операторы $\lambda I - K_m$ заведомо обратимы.

2) Вторая часть леммы доказывается аналогично.

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы оператор $\lambda I - K \in \Pi\{P_\tau\}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\lambda I - K$ был обратим в $L_p(\Omega_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из определения проекционного метода. Докажем достаточность. Пусть оператор $\lambda I - K$ обратим. Определим на $L_p(\Omega_n)$ проектор $\mathcal{P}_M$ равенством

$$(\mathcal{P}_M \varphi)(x) = \sum_{m=0}^M \sum_{\mu=1}^{d_n(m)} \varphi_{m\mu}(|x|) Y_{m\mu}(x')$$

и положим $\mathcal{Q}_M = I - \mathcal{P}_M$. Легко проверить, что проекторы $\mathcal{P}_M$ и P_τ коммутируют и подпространства $\text{Im } \mathcal{P}_M$ и $\text{Im } \mathcal{Q}_M$ инвариантны относительно оператора $\lambda I - K$. Положим

$$\begin{aligned} (\lambda I - K)_{\mathcal{P}} &= (\lambda I - K)|_{\text{Im } \mathcal{P}}, & (\lambda I - K)_{\mathcal{Q}} &= (\lambda I - K)|_{\text{Im } \mathcal{Q}}, \\ P_{\mathcal{P}\tau} &= P_\tau|_{\text{Im } \mathcal{P}}, & P_{\mathcal{Q}\tau} &= P_\tau|_{\text{Im } \mathcal{Q}}. \end{aligned}$$

В силу теоремы о поблочной применимости проекционного метода [1, с. 93] для того чтобы оператор $\lambda I - K \in \Pi\{P_\tau\}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\lambda I - K)_{\mathcal{P}} \in \Pi\{P_{\mathcal{P}\tau}\} \quad \text{и} \quad (\lambda I - K)_{\mathcal{Q}} \in \Pi\{P_{\mathcal{Q}\tau}\}.$$

Докажем, что $(\lambda I - K)_{\mathcal{Q}} \in \Pi\{P_{\mathcal{Q}\tau}\}$. Так как $I_{\mathcal{Q}} \in \{P_{\mathcal{Q}\tau}\}$, то найдется такое $\gamma > 0$, что если $A \in \mathcal{L}(\text{Im } \mathcal{Q}_M)$ и $\|A\| < \gamma$, то $\lambda I_{\mathcal{Q}} + A \in \Pi\{P_{\mathcal{Q}\tau}\}$ [1, с. 94]. Как известно [5, с. 81–82], число M можно подобрать так, что норма $K_{\mathcal{Q}}$ будет меньше любого наперед заданного числа. Выберем число M столь большим, чтобы выполнялось неравенство $\|K_{\mathcal{Q}}\| < \gamma$, и зафиксируем M . Тогда $\lambda I_{\mathcal{Q}} - K_{\mathcal{Q}} \in \Pi\{P_{\mathcal{Q}\tau}\}$.

Покажем, что $(\lambda I - K)_{\mathcal{P}} \in \Pi\{P_{\mathcal{P}\tau}\}$. Так как оператор $\lambda I - K$ обратим в $L_p(\Omega_n)$, то по лемме 1 операторы $\lambda I - K_m$ обратимы в $L_p(0, 1)$ для всех $m = 0, 1, \dots, M$. Тогда в силу предложения 1 операторы $\lambda I - K_m \in \Pi\{\tilde{P}_\tau\}$. Это значит, что для каждого m найдется такое число $\tau_m \in (0, 1)$, что при $0 < \tau < \tau_m$ операторы $\tilde{P}_\tau(\lambda I - K_m)\tilde{P}_\tau$, действующие на $\tilde{P}_\tau(L_p(0, 1))$, обратимы и

$$s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0} (\tilde{P}_\tau(\lambda I - K_m)\tilde{P}_\tau)^{-1} \tilde{P}_\tau = (\lambda I - K_m)^{-1}. \quad (2.10)$$

Положим $\delta = \min_{0 \leq m \leq M} \{\tau_m\}$. Так как для всех $\tau \in (0, \delta)$ операторы

$$\tilde{P}_\tau(\lambda I - K_m)\tilde{P}_\tau, \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

обратимы, то оператор $P_{\mathcal{P}\tau}(\lambda I - K)_{\mathcal{P}}P_{\mathcal{P}\tau}$, действующий на $P_{\mathcal{P}\tau}(\text{Im } \mathcal{P}_M)$, обратим для всех $\tau \in (0, \delta)$. С помощью (2.10) легко проверяется, что

$$s\text{-}\lim_{\tau \rightarrow 0} (P_{\mathcal{P}\tau}(\lambda I - K)_{\mathcal{P}}P_{\mathcal{P}\tau})^{-1} P_{\mathcal{P}\tau} = (\lambda I - K)_{\mathcal{P}}^{-1}.$$

Таким образом, $(\lambda I - K)_{\mathcal{P}} \in \Pi\{P_{\mathcal{P}\tau}\}$. Теорема доказана.

В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим интегральный оператор

$$(\mathcal{K}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ядро $k(x, y)$ которого удовлетворяет условиям 1° – 3° , и определим проектор P_{τ_1, τ_2} , $0 < \tau_1 < 1$, $1 < \tau_2 < \infty$, по формуле

$$(P_{\tau_1, \tau_2}\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \tau_1 < |x| < \tau_2, \\ 0, & |x| < \tau_1 \text{ или } |x| > \tau_2. \end{cases}$$

Символом оператора $\lambda I - \mathcal{K}$ назовем функцию $\sigma(m, \xi)$, заданную равенством (2.2). Известно [5, с. 78], что оператор $\lambda I - \mathcal{K}$ обратим в $L_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\sigma(m, \xi) \neq 0$ для всех $(m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$.

Далее, в пространстве $L_p(0, \infty)$ рассмотрим оператор

$$(\mathcal{K}_m g)(r) = \int_0^\infty \frac{1}{r} D_m\left(\frac{\rho}{r}\right) g(\rho) d\rho, \quad r \in (0, \infty),$$

где функция $D_m(\rho)$ определяется равенством (2.7). Ясно, что $\mathcal{K}_m$ есть оператор вида (1.2). Символом оператора $\lambda I - \mathcal{K}_m$ назовем функцию

$$\sigma_m(\xi) = \lambda - \int_0^\infty D_m(\rho) \rho^{-1/p+i\xi} d\rho, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Учитывая формулу (2.7), получаем

$$\sigma_m(\xi) = \lambda - \int_{\mathbb{R}^n} k(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, при фиксированном значении m имеет место равенство

$$\sigma_m(\xi) = \sigma(m, \xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Следующее утверждение является аналогом леммы 1.

ЛЕММА 2. 1) Оператор $\lambda I - \mathcal{K}$ обратим в $L_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда оператор $\lambda I - \mathcal{K}_m$ обратим в $L_p(0, \infty)$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$.

2) Оператор $P_{\tau_1, \tau_2}(\lambda I - \mathcal{K})P_{\tau_1, \tau_2}$ обратим в $P_{\tau_1, \tau_2}(L_p(\mathbb{R}^n))$ тогда и только тогда, когда оператор $\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}(\lambda I - \mathcal{K}_m)\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}$ обратим в $\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}(L_p(0, \infty))$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы оператор $\lambda I - \mathcal{K} \in \Pi\{P_{\tau_1, \tau_2}\}$, необходимо и достаточно, чтобы его символ $\sigma(m, \xi)$ удовлетворял следующим условиям:

$$1) \sigma(m, \xi) \neq 0 \text{ для всех } (m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R},$$

$$2) \text{ind}_\xi \sigma(m, \xi) = 0 \text{ для всех } m \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\text{ind}_\xi \sigma(m, \xi)$ – индекс функции $\sigma(m, \xi)$ при фиксированном значении m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\lambda I - \mathcal{K} \in \Pi\{P_{\tau_1, \tau_2}\}$. Тогда оператор $\lambda I - \mathcal{K}$ обратим в $L_p(\mathbb{R}^n)$, а операторы $P_{\tau_1, \tau_2}(\lambda I - \mathcal{K})P_{\tau_1, \tau_2}$ как операторы, действующие в $P_{\tau_1, \tau_2}(L_p(\mathbb{R}^n))$, обратимы для достаточно малых τ_1 и достаточно больших τ_2 , и

$$\lim_{\substack{\tau_1 \rightarrow 0 \\ \tau_2 \rightarrow \infty}} (P_{\tau_1, \tau_2}(\lambda I - \mathcal{K})P_{\tau_1, \tau_2})^{-1} P_{\tau_1, \tau_2} = (\lambda I - \mathcal{K})^{-1}. \quad (2.12)$$

Тогда в силу леммы 2 оператор $\lambda I - \mathcal{K}_m$ обратим в $L_p(0, \infty)$, а оператор $\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}(\lambda I - \mathcal{K}_m)\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}$ обратим в $\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}(L_p(0, \infty))$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, из условия (2.12) легко следует, что

$$\lim_{\substack{\tau_1 \rightarrow 0 \\ \tau_2 \rightarrow \infty}} (\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}(\lambda I - \mathcal{K}_m)\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2})^{-1} P_{\tau_1, \tau_2} = (\lambda I - \mathcal{K}_m)^{-1}.$$

Значит, $\lambda I - \mathcal{K}_m \in \Pi\{\tilde{P}_{\tau_1, \tau_2}\}$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$. Учитывая предложение 2 и равенство (2.11), убеждаемся в выполнении условий 1), 2) данной теоремы.

Достаточность можно доказать так же, как в теореме 1. Мы, однако, дадим другое доказательство, основанное на самой теореме 1.

Определим на пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ проектор P по формуле

$$(P\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

и положим $Q = I - P$. Представим оператор $\lambda I - \mathcal{K}$ в виде

$$\lambda I - \mathcal{K} = P(\lambda I - \mathcal{K})P + Q(\lambda I - \mathcal{K})Q + T,$$

где $T = -Q\mathcal{K}P - P\mathcal{K}Q$ – компактный оператор [5, с. 380]. Рассмотрим оператор

$$A = P(\lambda I - \mathcal{K})P + Q(\lambda I - \mathcal{K})Q$$

и покажем, что $A \in \Pi\{P_{\tau_1, \tau_2}\}$. Положим

$$A_1 = A|_{\text{Im } P}, \quad A_2 = A|_{\text{Im } Q}, \quad P_{\tau_1} = P_{\tau_1, \tau_2}|_{\text{Im } P}, \quad P_{\tau_2} = P_{\tau_1, \tau_2}|_{\text{Im } Q}.$$

Заметим, что $A_1 = \lambda I - K$, где K – оператор (2.1). Из условий 1), 2) следует, что оператор $\lambda I - K$ обратим [5, с. 78]. Тогда по теореме 1 $A_1 = \lambda I - K \in \Pi\{P_{\tau_1}\}$. Аналогично доказывается, что $A_2 \in \Pi\{P_{\tau_2}\}$. В силу теоремы о поблочной применимости проекционного метода [1, с. 93] оператор $A \in \Pi\{P_{\tau_1, \tau_2}\}$. Далее, поскольку $A \in \Pi\{P_{\tau_1, \tau_2}\}$ и оператор $\lambda I - \mathcal{K} = A + T$ обратим, то по теореме о возмущении компактным оператором [1, с. 94] оператор $\lambda I - \mathcal{K} \in \Pi\{P_{\tau_1, \tau_2}\}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Подчеркнем, что условие 1) является необходимым и достаточным условием для обратимости оператора $\lambda I - \mathcal{K}$, но для применимости проекционного метода необходимо и достаточно выполнения двух условий: 1) и 2).

Перейдем к изучению матричного случая. В $L_p^s(\Omega_n)$ рассмотрим оператор

$$(K_s\varphi)(x) = \int_{\Omega_n} \mathbf{k}(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \Omega_n,$$

где $\mathbf{k}(x, y) = (k_{\ell j}(x, y))_{\ell, j=1}^s$ – матрица-функция s -го порядка, элементы которой удовлетворяют условиям 1°–3°. Аналогично в пространстве $L_p^s(\mathbb{R}^n)$ определяется оператор $\mathcal{K}_s$. Символом оператора $\lambda I - K_s$ ($\lambda I - \mathcal{K}_s$) назовем матрицу-функцию $\mathfrak{G}(m, \xi)$, заданную на компакте $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ равенством

$$\mathfrak{G}(m, \xi) = \lambda E - \left(\int_{\mathbb{R}^n} k_{\ell j}(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy \right)_{\ell, j=1}^s.$$

Определим проекторы $P_\tau^{(s)}$ и $P_{\tau_1, \tau_2}^{(s)}$ формулами

$$P_\tau^{(s)} = (P_\tau \delta_{\ell j})_{\ell, j=1}^s, \quad P_{\tau_1, \tau_2}^{(s)} = (P_{\tau_1, \tau_2} \delta_{\ell j})_{\ell, j=1}^s.$$

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы оператор $\lambda I - K_s \in \Pi\{P_\tau^{(s)}\}$ (соответственно $\lambda I - \mathcal{K}_s \in \Pi\{P_{\tau_1, \tau_2}^{(s)}\}$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

- 1) $\det \mathfrak{G}(m, \xi) \neq 0$ для всех $(m, \xi) \in \mathbb{Z}_+ \times \dot{\mathbb{R}}$;
- 2) при любом фиксированном значении $m \in \mathbb{Z}_+$ все левые и правые индексы матрицы-функции $\mathfrak{G}(m, \xi)$ равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость доказывается так же, как и в теореме 2 с использованием предложения 3. Достаточность доказывается по той же схеме, что и в теореме 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
- [2] Böttcher A., Silbermann B. Analysis of Toeplitz Operators. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1990.
- [3] Prössdorf S., Silbermann B. Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1991.
- [4] Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К. Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 6. С. 727–729.
- [5] Karapetiants N., Samko S. Equations with Involution Operators. Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2001.
- [6] Самко С. Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984.

Ростовский государственный университет

E-mail:

avsyanki@ns.math.rsu.ru

nkarapet@ns.math.rsu.ru

Поступило

25.03.2002

Исправленный вариант

24.10.2002