Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Ф. Гогуадзе, О понятии полукольца множеств, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 362–368

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:26:50

УДК 515.1

О ПОНЯТИИ ПОЛУКОЛЬЦА МНОЖЕСТВ

Д. Ф. Гогуадзе

В заметке вводится обобщенное понятие полукольца и доказывается, что оно обладает всеми известными свойствами полукольца согласно старому определению.

Библиография: 2 названия.

Понятие полукольца является исходной точкой для современной теории меры и интеграла. Но в определении полукольца пересечение и разность множеств выступают не в равноправном виде.

В настоящей заметке вводится обобщенное понятие полукольца, в котором пересечение и разность множеств представлены в одинаковой форме и доказывается, что оно в теории меры исполняет ту же самую роль, что и старое понятие.

В дальнейшем мы в основном пользуемся обозначениями и терминами из [1] и [2].

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольный класс множеств и $E \in \mathfrak{A}$. Конечный класс попарно непересекающихся множеств $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathfrak{A}$, объединение которых равно E , называется *разбиением* множества E и обозначается через DE . При этом, множества E_k , $k = 1, \dots, n$, называются *компонентами разбиения* DE . Разбиение D_1E называется *продолжением* разбиения DE , если каждый компонент разбиения D_1E является подмножеством некоторого компонента разбиения DE или, что то же самое, если разбиение D_1E содержит разбиение каждого компонента разбиения DE .

Класс множеств, содержащий вместе с любыми двумя своими множествами E и F и их пересечение $E \cap F$, называется *мультипликативным* и обозначается через $\mathfrak{M}_0$.

Класс множеств, содержащий вместе с любыми двумя своими множествами E и F и разбиение их пересечения $E \cap F$, назовем *обобщенно мультипликативным* и обозначим через $\mathfrak{M}$. Если $D_1E = \{E'_1, \dots, E'_m\}$ и $D_2E = \{E''_1, \dots, E''_n\}$ – два разбиения множества $E \in \mathfrak{M}$, то $\{E_k^{ij}\}$ ($k = 1, \dots, N_{ij}$; $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$), где $\{E_k^{ij}\}$, $k = 1, \dots, N_{ij}$, является разбиением пересечения $E'_i \cap E''_j$, называется *произведением разбиений* D_1E и D_2E и обозначается через $(D_1 \cdot D_2)E$. Оно, очевидно, является продолжением обоих разбиений.

Обозначим через $\mathfrak{ME}$ множество всех компонентов всевозможных разбиений множества $E \in \mathfrak{M}$.

Приведем теперь старое, а затем новое определение *полукольца*.

Непустой класс P_0 называется полукольцом, если он обладает следующими двумя свойствами:

- 1) если $A \in P$ и $B \in P_0$, то $A \cap B \in P_0$;
- 2) если $A, B \in P_0$ и $A \supset B$, то P_0 содержит разбиение разности $A - B$.

Непустой класс P будем называть полукольцом, если он обладает следующими двумя свойствами:

- 1) если $A \in P$ и $B \in P$, то он содержит разбиение их пересечения $A \cap B$;
- 2) если $A, B \in P$ и $A \supset B$, то он содержит разбиение разности $A - B$.

Таким образом, в новом определении полукольца мультипликативность класса заменена его обобщенной мультипликативностью.

Рассмотрим класс

$$P = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\},$$

где $\emptyset$ обозначает пустое множество. Тогда

$$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\} \notin P,$$

однако

$$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2\} \cup \{3\},$$

а это разбиение $\{\{2\}, \{3\}\}$ множества $\{2, 3\}$ содержится в P .

Поэтому легко проверить непосредственно, что класс P не является полукольцом по старому определению, но является им согласно новому определению.

Пусть E – счетное множество и $T(E)$ – класс всех его подмножеств. Возьмем конечное подмножество $e = \{x_1, \dots, x_n\}$ множества E и из класса $T(E)$ удалим множество e и все его подмножества, кроме всех одноэлементных подмножеств. Обозначим через P оставшийся класс. Покажем, что он является обобщенно мультипликативным, но не мультипликативным. Действительно, возьмем множество $E - e$ и представим его в виде $E - e = F_1 \cup F_2$, где $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Образует множества $E_1 = F_1 \cup e$ и $E_2 = F_2 \cup e$. Тогда $E_1, E_2 \in P$ и $E_1 \cap E_2 = (F_1 \cup e) \cap (F_2 \cup e) = e$. Следовательно, $E_1 \cap E_2 \notin P$. Однако P содержит конечное разбиение $\{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}\}$ множества $E_1 \cap E_2 = e$.

То, что P удовлетворяет второму условию полукольца, тривиально проверяется, так как, если при взятии разности двух множеств из P получаются множество e или его подмножества, то их разбиения содержатся в P .

Таким образом, P является полукольцом согласно новому определению, но не согласно старому определению.

Докажем основные свойства полукольца.

Всякое полукольцо P содержит пустое множество. Это непосредственно следует из непустоты класса P и условия 2.

Предложение 1. Если $A_1, \dots, A_n$ – попарно непересекающиеся множества из полукольца P , содержащиеся в некотором множестве $A \in P$, то найдутся такие множества $B_1, \dots, B_m \in P$, что

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup B_1 \cup \dots \cup B_m, \quad (1)$$

причем все множества справа также попарно не пересекаются, т.е. класс $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$ является разбиением множества A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1$ предложение непосредственно следует из свойства 2 полукольца P . Допустим, что оно справедливо для некоторого n и докажем его для $n + 1$. Согласно допущению существует представление (1). Так как множество A_{n+1} содержится в A и не пересекается с $A_1, \dots, A_n$, в силу первого свойства полукольца P имеем

$$A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^m (A_{n+1} \cap B_k) = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^{q_k} C_i^k.$$

Но

$$B_k = [B_k - (A_{n+1} \cap B_k)] \cup (A_{n+1} \cap B_k),$$

и согласно второму свойству полукольца P имеем

$$B_k - (A_{n+1} \cap B_k) = \bigcup_{i=1}^{r_k} D_i^k.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^m B_k &= \bigcup_{k=1}^m ([B_k - (A_{n+1} \cap B_k)] \cup (A_{n+1} \cap B_k)) \\ &= \bigcup_{k=1}^m [B_k - (A_{n+1} \cap B_k)] \cup \bigcup_{k=1}^m (A_{n+1} \cap B_k) \\ &= \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^{r_k} D_i^k \cup \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^{q_k} C_i^k = \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^{r_k} D_i^k \cup A_{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя это равенство в формулу (1), получим

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup D_1^1 \cup \dots \cup D_{r_1}^1 \cup \dots \cup D_1^m \cup \dots \cup D_{r_m}^m,$$

причем все множества справа принадлежат полукольцу P и попарно не пересекаются.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $A_1, \dots, A_m$ – произвольный конечный класс множеств из полукольца P , то их объединение можно представить в виде

$$A_1 \cup \dots \cup A_m = A_1^1 \cup \dots \cup A_1^{k_1} \cup \dots \cup A_m^1 \cup \dots \cup A_m^{k_m}, \quad (2)$$

где $A_i^1, \dots, A_i^{k_i}$ содержатся в множестве A_i , $i = 1, \dots, m$, и все множества справа принадлежат полукольцу P и попарно не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $m = 1$ предложение очевидно. Допустим, что оно верно для m и докажем его для $m + 1$. По предположению имеет место равенство (2). В силу первого свойства полукольца P существуют представления

$$\begin{aligned} A_{m+1} \cap A_1^1 &= \bigcup_{i=1}^{n_1} B_i^1, \quad \dots, \quad A_{m+1} \cap A_1^{k_1} = \bigcup_{i=1}^{n_{k_1}} B_i^{k_1}, \quad \dots, \\ A_{m+1} \cap A_m^1 &= \bigcup_{i=1}^{q_1} C_i^1, \quad \dots, \quad A_{m+1} \cap A_m^{k_m} = \bigcup_{i=1}^{q_{k_m}} C_i^{k_m}. \end{aligned}$$

Согласно предложению 1 существует представление

$$A_{m+1} = \bigcup_{i=1}^{n_1} B_i^1 \cup \dots \cup \bigcup_{i=1}^{n_{k_1}} B_i^{k_1} \cup \dots \cup \bigcup_{i=1}^{q_k} C_i^1 \cup \dots \cup \bigcup_{i=1}^{q_{k_m}} C_i^{k_m} \cup A_{m+1}^1 \cup \dots \cup A_{m+1}^{k_{m+1}},$$

причем слагаемые справа принадлежат полукольцу P и попарно не пересекаются. Учитывая эти соотношения, из (2) получаем

$$\begin{aligned} A_1 \cup \dots \cup A_m \cup A_{m+1} &= A_1^1 \cup \dots \cup A_1^{k_1} \cup \dots \cup A_m^1 \cup \dots \cup A_m^{k_m} \\ &\quad \cup \bigcup_{i=1}^{n_1} B_i^1 \cup \dots \cup \bigcup_{i=1}^{n_{k_1}} B_i^{k_1} \cup \dots \cup \bigcup_{i=1}^{q_1} C_i^1 \cup \dots \cup \bigcup_{i=1}^{q_{k_m}} C_i^{k_m} \\ &\quad \cup A_{m+1}^1 \cup \dots \cup A_{m+1}^{k_{m+1}} \\ &= A_1^1 \cup \dots \cup A_1^{k_1} \cup \dots \cup A_m^1 \cup \dots \cup A_m^{k_m} \cup A_{m+1}^1 \cup \dots \cup A_{m+1}^{k_{m+1}}, \end{aligned}$$

причем слагаемые справа вновь принадлежат полукольцу P и вновь попарно не пересекаются.

ТЕОРЕМА 1. *Если P – полукольцо, то наименьшее кольцо $R(P)$, порожденное полукольцом P , совпадает с классом K всех множеств A , имеющих вид*

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k,$$

где все множества A_k ($k = 1, \dots, n$) принадлежат полукольцу P и попарно не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что класс K образует кольцо. Для этого достаточно показать, что класс K замкнут относительно образования пересечений и симметрических разностей двух множеств (см. [1, с. 38] или [2, с. 26]).

Если A и B принадлежат классу K , то

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{и} \quad B = \bigcup_{j=1}^m B_j,$$

где A_i , $i = 1, \dots, n$, соответственно B_j , $j = 1, \dots, m$, являются попарно непересекающимися множествами из полукольца P .

В силу первого свойства полукольца P имеем

$$A_i \cap B_j = \bigcup_{k=1}^{n_{ij}} C_k^{ij},$$

где C_k^{ij} , $k = 1, \dots, n_{ij}$, представляют собой попарно непересекающиеся множества из полукольца P .

Согласно предложению 1 имеют место равенства

$$A_i = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{k=1}^{n_{ij}} C_k^{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}, \quad B_j = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{k=1}^{n_{ij}} C_k^{ij} \cup \bigcup_{t=1}^{s_j} E_{jt},$$

где D_{ik} , $k = 1, \dots, r_i$, соответственно E_{jt} , $t = 1, \dots, s_j$, являются попарно непересекающимися множествами из полукольца P . Из этих равенств получаем

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{k=1}^{n_{ij}} C_k^{ij} \cup \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik},$$

$$B = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{k=1}^{n_{ij}} C_k^{ij} \cup \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{t=1}^{s_j} E_{jt}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{k=1}^{n_{ij}} C_k^{ij}, \quad A \Delta B = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik} \cup \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{t=1}^{s_j} E_{jt},$$

что означает $A \cap B \in K$ и $A \Delta B \in K$. Следовательно, класс K действительно представляет собой кольцо. То, что оно является наименьшим, очевидно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{M}$ – обобщенно мультипликативный класс и $E_0 \in \mathfrak{M}$. Тогда класс $\mathfrak{M}E_0$ всех компонентов всевозможных разбиений множества E_0 представляет собой полукольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E, F \in \mathfrak{M}E_0$. Тогда найдутся такие разбиения D_1E_0 и D_2E_0 , что $E \in D_1E_0$ и $F \in D_2E_0$. Кроме того, так как класс $\mathfrak{M}$ является обобщенно мультипликативным,

$$E \cap F = \bigcup_{k=1}^n e_k.$$

Образует произведение $(D_1 \cdot D_2)E_0$ разбиений D_1E_0 и D_2E_0 . Тогда согласно определению произведения разбиений $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset (D_1 \cdot D_2)E_0$. Следовательно, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset \mathfrak{M}E_0$.

Таким образом, класс $\mathfrak{M}E_0$ удовлетворяет первому условию определения полукольца.

Пусть теперь $E, F \in \mathfrak{M}E_0$ и $E \subset F$. Тогда найдутся такие разбиения D_1E_0 и D_2E_0 , что $E \in D_1E_0$ и $F \in D_2E_0$. Образует их произведение $(D_1 \cdot D_2)E_0$. Тогда $E \cap F = E \in (D_1 \cdot D_2)E_0$, и так как $(D_1 \cdot D_2)E_0$ является продолжением разбиения D_2E_0 , то $(D_1 \cdot D_2)E_0$ содержит разбиение множества F , компонентом которого является множество E . Следовательно, класс $\mathfrak{M}E_0$ удовлетворяет и второму условию определения полукольца.

Пусть X, Y – произвольные множества. Совокупность всех упорядоченных пар (x, y) , где $x \in X$ и $y \in Y$, называется декартовым произведением множеств X и Y и обозначается через $X \times Y$. Если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то множество $E = A \times B$, содержащееся в $X \times Y$, называется *прямоугольником*, а сами множества A и B – *сторонами* этого прямоугольника.

Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – классы множеств, то совокупность всех прямоугольников $A \times B$, где $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$, называется *произведением* классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и обозначается через $\mathfrak{A} \boxtimes \mathfrak{B}$.

Нам в дальнейшем понадобится следующая простая

ЛЕММА. *Непустые прямоугольники $A_1 \times B_1$ и $A_2 \times B_2$ являются непересекающимися тогда и только тогда, когда или $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ или $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \emptyset,$$

но и $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ и $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Пусть $x \in A_1 \cap A_2$ и $y \in B_1 \cap B_2$. Тогда

$$(x, y) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \emptyset,$$

что невозможно.

Достаточность. Пусть или $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ или $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, но

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \neq \emptyset$$

и

$$(x, y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Отсюда $x \in A_1 \cap A_2$ и $y \in B_1 \cap B_2$, что невозможно.

ТЕОРЕМА 3. *Если P_1 и P_2 – полукольца, то их произведение $P = P_1 \boxtimes P_2$ также является полукольцом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E_1, E_2 \in P$. Тогда

$$E_1 = A_1 \times B_1, \quad E_2 = A_2 \times B_2 \quad (A_1, A_2 \in P_1, \quad B_1, B_2 \in P_2).$$

Кроме того

$$E_1 \cap E_2 = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Так как P_1 и P_2 являются полукольцами, то

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{i=1}^m C_i, \quad B_1 \cap B_2 = \bigcup_{k=1}^n D_k,$$

где C_i , $i = 1, \dots, m$, – попарно непересекающиеся множества из полукольца P_1 и D_k , $k = 1, \dots, n$, – аналогичные множества из полукольца P_2 . Поэтому имеем

$$E_1 \cap E_2 = \bigcup_{i=1}^m C_i \times \bigcup_{k=1}^n D_k = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{k=1}^n (C_i \times D_k),$$

где согласно лемме $C_i \times D_k$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, попарно непересекающиеся прямоугольники из P .

Следовательно, класс P удовлетворяет первому условию определения полукольца.

Пусть теперь $E_1, E_2 \in P$ ($E_1 = A_1 \times B_1$, $E_2 = A_2 \times B_2$) – непустые прямоугольники и $E_1 \subset E_2$. Тогда (см. [2, с. 137]) $A_1 \subset A_2$ и $B_1 \subset B_2$. В силу того, что P_1 и P_2 являются полукольцами, имеют место представления

$$A_2 = A_1 \cup A^1 \cup \dots \cup A^m, \quad B_2 = B_1 \cup B^1 \cup \dots \cup B^n.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
 A_2 \times B_2 &= (A_1 \cup A^1 \cup \dots \cup A^m) \times (B_1 \cup B^1 \cup \dots \cup B^n) \\
 &= (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B^1) \cup \dots \cup (A_1 \times B^n) \\
 &\quad \cup (A^1 \times B_1) \cup (A^1 \times B^1) \cup \dots \cup (A^1 \times B^n) \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 &\quad \cup (A^m \times B_1) \cup (A^m \times B^1) \cup \dots \cup (A^m \times B^n),
 \end{aligned}$$

причем все прямоугольники справа принадлежат P и согласно лемме попарно не пересекаются.

Следовательно, класс P удовлетворяет и второму условию определения полукольца.

Таким образом, полукольцо, согласно новому определению, обладает всеми известными свойствами полукольца по старому определению.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
- [2] Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.

Институт вычислительной математики им. Н. Мусхелишвили,
г. Тбилиси, Грузия

Поступило
27.07.2000