Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. К. Симонов, Ортогональные матричные полиномы Лорана, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 316–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2700>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:43:56

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ПОЛИНОМЫ ЛОРАНА

К. К. Симонов

Сильной матричной проблемой моментов Гамбургера называется следующая задача: дана последовательность самосопряженных $(N \times N)$ -матриц $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, которые называются *моментами*, и требуется найти все самосопряженные неубывающие $(N \times N)$ -матрицы-функции $\Sigma(t)$ на вещественной оси такие, что выполнены тождества

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k d\Sigma(t) = S_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

Также рассматривают *усеченную проблему моментов*: дана конечная последовательность $\{S_k\}_{-m}^m$ и требуется найти все функции $\Sigma(t)$ такие, что выполнены тождества (1) при $k = 0, \pm 1, \dots, \pm m$.

Как известно, с классической проблемой моментов (см. [1]) тесно связаны такие объекты, как *ортгоналичные полиномы* и *якобиева матрица*. При рассмотрении сильной проблемы моментов (1) возникают так называемые *полиномы Лорана*, т.е. функции вида $f(z) = \sum_{k=-m}^m f_k z^k$. В этой работе изучаются матричные полиномы Лорана первого и второго рода, соответствующие задаче (1).

В скалярном случае исследования сильной проблемы моментов были начаты в работах [2]–[4]. Описание решений скалярной сильной проблемы моментов было получено в [5] и [6] для проблемы Гамбургера и в [7] для проблемы Стилтеса. Детальную библиографию по сильной проблеме моментов можно найти в обзоре [8].

Будем считать, что последовательность моментов $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ *позитивна*, т.е. все квадратичные формы вида

$$\sum_{i,j=-m}^m \xi_j^* S_{i+j} \xi_i, \quad \{\xi_k\}_{-m}^m \subset \mathbb{C}^N, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

положительно определены и невырождены. Кроме того, будем считать, что $S_0 = I$.

Заметим, что в работе [5] при описании всех решений проблемы (1) в скалярном случае кроме невырожденности и положительной определенности форм (2) требуется невырожденность всех квадратичных форм вида

$$\sum_{i,j=-m}^m \xi_j^* S_{i+j-1} \xi_i, \quad \sum_{i,j=-m}^{m+1} \xi_j^* S_{i+j-1} \xi_i, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

В нашей работе условие невырожденности форм (3) не используется, что позволяет получить новые результаты даже в скалярном случае.

В пространстве N -мерных векторных полиномов Лорана определим скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \sum_{i,j=-m}^m g_j^* S_{i+j} f_i,$$

где

$$f(z) = \sum_{i=-m}^m f_i z^i, \quad g(z) = \sum_{j=-m}^m g_j z^j, \quad f_i, g_j \in \mathbb{C}^N, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначим через $\mathfrak{L}$ гильбертово пространство, полученное в результате пополнения пространства полиномов Лорана относительно этого скалярного произведения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность $(N \times N)$ -матричных полиномов Лорана $\{P_k(z)\}_0^\infty$ вида

$$P_{2k}(z) = \sum_{j=-k}^k P_{2k}^{(j)} z^j, \quad P_{2k+1}(z) = \sum_{j=-k-1}^k P_{2k+1}^{(j)} z^j, \quad P_k^{(j)} \in \mathbb{C}^{N \times N},$$

называется последовательностью *полиномов первого рода*, если выполнены условия

- (А) коэффициенты $P_{2k}^{(k)}$ и $P_{2k+1}^{(-k-1)}$ являются невырожденными самосопряженными положительными матрицами;
 (В) полиномы $\{P_k(z)\}_0^\infty$ ортонормированы, т.е.

$$(P_i(z)\xi, P_j(z)\eta) = 0, \quad (P_k(z)\xi, P_k(z)\eta) = \eta^* \xi, \quad \xi, \eta \in \mathbb{C}^N, \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots, \quad i \neq j.$$

Условия (А) и (В) однозначно определяют полиномы $\{P_k(z)\}_0^\infty$.

Полиномы первого рода можно представить и в явном виде

$$P_k(z) = Z_k(z) H_k^{-1} \Omega_k D_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\begin{aligned} Z_{2k}(z) &= (z^{-k} I \quad z^{-k+1} I \quad \dots \quad z^k I), & Z_{2k+1}(z) &= (z^{-k-1} I \quad z^{-k} I \quad \dots \quad z^k I), \\ H_{2k} &= (S_{i+j})_{i,j=-k}^k, & H_{2k+1} &= (S_{i+j})_{i,j=-k-1}^k, \\ \Omega_{2k} &= (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad I)^*, & \Omega_{2k+1} &= (I \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0)^*, \\ D_{2k} &= (H_{2k}^{-1})_{2k,2k}^{-1/2}, & D_{2k+1} &= (H_{2k+1}^{-1})_{0,0}^{-1/2}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность $(N \times N)$ -матричных полиномов Лорана $\{Q_k(z)\}_0^\infty$, определенная формулами

$$\eta^* Q_k(z) \xi = \left(\frac{P_k(\zeta) - P_k(z)}{\zeta - z} \xi, \eta \right)_\zeta, \quad \xi, \eta \in \mathbb{C}^N, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

называется последовательностью *полиномов второго рода*.

В дополнение к определениям 1 и 2, положим

$$P_{-2}(z) = P_{-1}(z) = Q_{-1}(z) \equiv 0, \quad Q_{-2}(z) \equiv -I.$$

Если обозначить через $\{\varepsilon_j\}_1^N$ стандартный базис в пространстве $\mathbb{C}^N$, то последовательность

$$\{P_i(z)\varepsilon_j\} = \{P_0(z)\varepsilon_1, \dots, P_0(z)\varepsilon_N, P_1(z)\varepsilon_1, \dots, P_1(z)\varepsilon_N, \dots\}$$

образует ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{L}$ и каждый элемент $f \in \mathfrak{L}$ однозначно представляется в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) \varphi_k,$$

где векторы $\varphi_k \in \mathbb{C}^N$ определяются из равенств

$$\varepsilon_j^* \varphi_k = (f(z), P_k(z)\varepsilon_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

ТЕОРЕМА 1. Полиномы $\{P_k(z)\}_0^\infty$ и $\{Q_k(z)\}_0^\infty$ удовлетворяют системе рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} zP_{2k}(z) &= P_{2k-2}(z)C_{2k-2}^* + P_{2k-1}(z)B_{2k-1}^* + P_{2k}(z)A_{2k} \\ &\quad + P_{2k+1}(z)B_{2k} + P_{2k+2}(z)C_{2k}, \\ zQ_{2k}(z) &= Q_{2k-2}(z)C_{2k-2}^* + Q_{2k-1}(z)B_{2k-1}^* + Q_{2k}(z)A_{2k} \\ &\quad + Q_{2k+1}(z)B_{2k} + Q_{2k+2}(z)C_{2k}, \\ zP_{2k+1}(z) &= P_{2k}(z)B_{2k}^* + P_{2k+1}(z)A_{2k+1} + P_{2k+2}(z)B_{2k+1}, \\ zQ_{2k+1}(z) &= Q_{2k}(z)B_{2k}^* + Q_{2k+1}(z)A_{2k+1} + Q_{2k+2}(z)B_{2k+1}, \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

с начальными условиями

$$P_{-2}(z) = 0, \quad P_0(z) = I, \quad Q_{-2}(z) = -I, \quad Q_0(z) = 0,$$

где коэффициенты $\{A_k\}_0^\infty$, $\{B_k\}_{-1}^\infty$, $\{C_k\}_{-2}^\infty$ — некоторые $(N \times N)$ -матрицы.

Коэффициенты рекуррентных соотношений (4) образуют обобщенную яковиеву матрицу

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0^* & C_0^* & & & \dots \\ B_0 & A_1 & B_1^* & & & \dots \\ C_0 & B_1 & A_2 & B_2^* & C_2^* & \dots \\ & & B_2 & A_3 & B_3^* & \dots \\ & & C_2 & B_3 & A_4 & B_4^* & C_4^* & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

которая является матрицей оператора умножения на z в базисе $\{P_i(z)\varepsilon_j\}$ пространства $\mathfrak{L}$.

Коэффициенты $\{A_k\}_0^\infty$, $\{B_k\}_{-1}^\infty$, $\{C_k\}_{-2}^\infty$ рекуррентных соотношений (4) удовлетворяют следующим условиям (при $k = 0, 1, 2, \dots$):

- (i) $C_{-2} = I$, $B_{-1} = 0$, $C_{2k-1} = 0$;
- (ii) существуют и корректно определены матрицы C_{2k}^{-1} , $\tilde{B}_0 = (B_0^* - A_0 C_0^{-1} B_1)^{-1}$ и

$$\tilde{C}_{2k+1} = - \left[\begin{pmatrix} B_{2k} & B_{2k+1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{2k} & A_{2k+2} \\ 0 & C_{2k+2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{2k+2}^* \\ B_{2k+3} \end{pmatrix} \right]^{-1};$$

- (iii) верны неравенства $C_{2k} C_{2k-2} \cdots C_0 > 0$, $\tilde{C}_{2k+1} \tilde{C}_{2k-1} \cdots \tilde{C}_1 \tilde{B}_0 > 0$;
- (iv) матрицы A_k самосопряжены и верны тождества $A_{2k+1} = B_{2k} C_{2k}^{-1} B_{2k+1}$.

Следующая теорема утверждает, что коэффициенты рекуррентных соотношений (4) однозначно определяют полиномы первого и второго рода.

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы последовательности $(N \times N)$ -матриц $\{A_k\}_0^\infty$, $\{B_k\}_{-1}^\infty$, $\{C_k\}_{-2}^\infty$, удовлетворяющие условиям (i)–(iv). Тогда существует и единственная позитивная последовательность моментов $\{S_k\}_{-\infty}^+$, $S_0 = I$, такая, что соответствующие полиномы первого и второго рода удовлетворяют рекуррентным соотношениям (4) с заданными коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Матрицу-функцию

$$W_m(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} I + (\lambda - \bar{\mu}) \sum_{j=0}^m Q_j(\lambda) P_j(\mu)^* & (\lambda - \bar{\mu}) \sum_{j=0}^m Q_j(\lambda) Q_j(\mu)^* \\ -(\lambda - \bar{\mu}) \sum_{j=0}^m P_j(\lambda) P_j(\mu)^* & I - (\lambda - \bar{\mu}) \sum_{j=0}^m P_j(\lambda) Q_j(\mu)^* \end{pmatrix},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

будем называть *обобщенной матрицей Неванлинны, соответствующей усеченной проблеме моментов*.

Заметим, что в скалярном случае обобщенные матрицы Неванлинны изучались в работе [9]. Положим

$$\begin{aligned} V_{2k}(\lambda) &= \begin{pmatrix} -Q_{2k}(\lambda) & -Q_{2k+1}(\lambda)B_{2k} - Q_{2k+2}(\lambda)C_{2k} \\ P_{2k}(\lambda) & P_{2k+1}(\lambda)B_{2k} + P_{2k+2}(\lambda)C_{2k} \end{pmatrix}, \\ V_{2k+1}(\lambda) &= \begin{pmatrix} -Q_{2k+2}(\lambda) & -Q_{2k}(\lambda)C_{2k}^* - Q_{2k+1}(\lambda)B_{2k+1}^* \\ P_{2k+2}(\lambda) & P_{2k}(\lambda)C_{2k}^* + P_{2k+1}(\lambda)B_{2k+1}^* \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы формулы типа Кристоффеля–Дарбу*

$$W_m(\lambda, \mu) = V_m(\lambda)JV_m(\mu)^*J, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Частным случаем формул (5) являются *тождества типа Остроградского–Лиувилля*

$$V_m(\lambda)^{-1} = JV_m(\bar{\lambda})^*J, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Следующая теорема показывает, что матрица Неванлинны $W_m(\lambda, \mu)$ факторизуется на элементарные множители.

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо представление*

$$W_m(\lambda, \bar{\lambda}_0) = \prod_{k=0}^m \left(I - \delta_k(\lambda, \lambda_0) \begin{pmatrix} -Q_k(\lambda_0) \\ P_k(\lambda_0) \end{pmatrix} (P_k(\bar{\lambda}_0)^* \quad Q_k(\bar{\lambda}_0)^*) \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где

$$\delta_k(\lambda, \bar{\lambda}_0) = \begin{cases} \lambda - \lambda_0, & k \text{ четно}, \\ -\lambda_0^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right), & k \text{ нечетно}, \end{cases} \quad \lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Разложение (6) соответствует пошаговому процессу решения проблемы моментов (1).

ТЕОРЕМА 5. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *при некотором $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_k(\lambda)\|_{\mathbb{C}^N}^2 < \infty;$$

2) *при некотором $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Q_k(\lambda)\|_{\mathbb{C}^N}^2 < \infty;$$

3) *при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_k(\lambda)\|_{\mathbb{C}^N}^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|Q_k(\lambda)\|_{\mathbb{C}^N}^2 < \infty.$$

Если эти условия выполняются, то существует предельная матрица Неванлинны

$$W_{\infty}(\lambda, \mu) = \lim_{m \rightarrow \infty} W_m(\lambda, \mu), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Матрица-функция $W_{\infty}(\cdot, \mu)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и имеет минимальный экспоненциальный тип в своих особых точках, т.е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\log \|W_{\infty}(\lambda, \mu)\|_{\mathbb{C}^{2N}}}{|\lambda|} = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} |\lambda| \log \|W_{\infty}(\lambda, \mu)\|_{\mathbb{C}^{2N}} = 0, \quad \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Предельная матрица Неванлинны $W_{\infty}(\lambda, a)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, когда она существует, является резольвентной матрицей проблемы моментов (1), т.е. позволяет описать все решения проблемы моментов (1) в виде формулы типа Неванлинны (см. [1]). Матрицы $V_m(\lambda)$ и $W_m(\lambda, a)$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) являются резольвентными матрицами усеченной проблемы моментов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней. М.: ГИФМЛ, 1961.
2. Jones W. B., Thron W. J., Waadeland H. // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 261. P. 503–528.
3. Jones W. B., Njåstad O., Thron W. J. // Proc. London Math. Soc. (3). 1983. V. 47. №2. P. 363–384.
4. Jones W. B., Njåstad O., Thron W. J. // J. Math. Anal. Appl. 1984. V. 98. №2. P. 528–554.
5. Njåstad O. // J. Math. Anal. Appl. 1996. V. 197. №1. P. 227–248.
6. Simonov K. K. // Уч. записки Таврического нац. ун-та. 2002. Т. 15. №1. С. 36–38.
7. Kats I. S., Nudelman A. A. // St.-Peterburg Math. J. 1997. V. 8. №6. P. 931–950.
8. Jones W. B., Njåstad O. // J. Comput. Appl. Math. 1999. V. 105. №1–2. P. 51–91.
9. Симонов К. К. // Тр. ИПММ НАН Украины. 2003. Т. 8. С. 120–127.

Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: xi@gamma.dn.ua

Поступило
25.02.2005