Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Балаганский, Об антипроксиминальных выпуклых ограниченных множествах в пространстве $c_0(\Gamma)$ с нормой Дзя, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 3, 323–338

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2703>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:48:41

УДК 517.5

ОБ АНТИПРОКСИМИНАЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ В ПРОСТРАНСТВЕ $c_0(\Gamma)$ С НОРМОЙ ДЭЯ

В. С. Балаганский

Построено выпуклое гладкое антипроксиминальное множество в любом бесконечномерном пространстве $c_0(\Gamma)$ с нормой Дэя, при этом функция расстояния до множества дифференцируема по Гато в каждой точке дополнения.

Библиография: 20 названий.

Непустое замкнутое подмножество $A \neq X$ банахова пространства X называется *антипроксиминальным*, если для любой точки $x \in X \setminus A$ в множестве A нет ближайшей точки ($P_M(x) = \emptyset$).

Антипроксиминальные множества рассматривались в работах многих авторов (см. [1]–[13]). М. А. Эдельштейн [10] построил выпуклое антипроксиминальное множество в пространстве сходящихся последовательностей с нормой Дэя. В настоящей работе будет построено выпуклое гладкое антипроксиминальное множество в любом бесконечномерном пространстве $c_0(\Gamma)$ с нормой Дэя, при этом функция расстояния до множества будет дифференцируемой по Гато в каждой точке дополнения.

В работе используются следующие пространства:

- $m = \ell_\infty$ – пространство всех ограниченных числовых последовательностей $x = \{x_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$;
- c – пространство всех сходящихся числовых последовательностей с нормой пространства m ;
- c_0 – пространство всех сходящихся к 0 числовых последовательностей с нормой пространства m .

Пусть Γ – множество индексов. Тогда $c_0(\Gamma)$ – линейное пространство ограниченных вещественных функций на Γ , $\|x\| = \sup\{|x(s)| : s \in \Gamma\}$, для которых множество $\{s \in \Gamma : |x(s)| > \varepsilon\}$ конечно, каково бы не было $\varepsilon > 0$.

В случае $\Gamma = \mathbb{N}$ пространство $c_0(\Gamma)$ совпадает с пространством c_0 ; $\ell_1(\Gamma)$ – пространство всех вещественных функций, безусловно суммируемых на Γ , с нормой $\|x\| = \sum_{s \in \Gamma} |x(s)|$; $\hat{c}_0(\Gamma)$ – пространство $c_0(\Gamma)$ с нормой Дэя. Норма Дэя определяется следующим образом: каждый $x \in c_0(\Gamma)$ имеет счетный носитель $\text{supp } x = \{s \in \Gamma : |x(s)| > 0\}$, который можно перенумеровать так, чтобы неравенство $|x(\alpha_k)| \geq |x(\alpha_{k+1})|$ выполнялось для всех номеров k ; тогда

$$\|x\|_{\hat{c}_0(\Gamma)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x(\alpha_n)|}{2^n} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00949, и программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-1347.2003.1.

В работе применяются следующие обозначения: X, Y – вещественные банаховы пространства; $\mathcal{F}(X)$ – семейство непустых замкнутых множеств пространства X ; для $x, y \in X, M \in \mathcal{F}(X), r > 0$ полагаем $xy = \|x - y\|, xM = d(x, M) = \inf\{xy : y \in M\}$;

$$P_M(x) = \{y \in M : xy = xM\}, \quad M(r) = \{x \in X : xM \leq r\};$$

$\mathbb{B}_X(x, r) = \{z \in X : xz \leq r\}$ – шар в X ; $\mathbb{B}(X) = \{z \in X : xz \leq 1\}$ – единичный шар в X ; $\mathbb{S}(X) = \{z \in X : xz = 1\}$ – единичная сфера в X ; $\overline{M}, \partial M$ – замыкание и граница множества M соответственно; $\text{int } M$ – множество внутренних точек M ; $\text{int}_Y M$ – множество точек M , внутренних относительно Y ; $\text{conv } M$ – выпуклая оболочка множества M ; $\overline{\text{conv}} M$ – замкнутая выпуклая оболочка множества M ; $\overline{\text{span}} M$ – замкнутая линейная оболочка множества M ; $\text{Кон } M = \{x = \lambda y : \lambda \geq 0, y \in M\}$ – коническая оболочка множества M . Пусть $M \subset X^*$; через $w^*\text{-cl } M$ обозначается замыкание множества M в w^* -топологии пространства X^* ;

$$\Sigma(M) = \{f \in X^* \setminus \{0\} : \exists x \in M f(x) = \sup\{f(z) : z \in M\}\}, \quad X^\# = \Sigma(\mathbb{B}(X));$$

для подпространства $Y \subset X$ определим аннулятор $Y^\perp = \{f \in X^* : f(y) = 0 \forall y \in Y\}$; G_M – множество тех $x \in X \setminus M$, где $d(\cdot, M)$ имеет производную Гато $d'(x, M) = f \in X^*$, так что $\forall h \in X$

$$f(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(x + th, M) - d(x, M)}{t}; \quad (**)$$

$$G_M^1 = \{x \in G_M : \|d'(x, M)\| = 1\}.$$

Для дальнейшей работы нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА А [2]. Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathcal{F}(X)$ выпукло, $A \neq X$. Тогда антипроксиминальность множества A эквивалентна условию

$$\Sigma(A) \cap \Sigma(\mathbb{B}(X)) = \{\emptyset\}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $M \in \mathcal{F}(X)$ выпукло. Тогда справедливо равенство

$$G_M \setminus M = G_M^1 \setminus M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $G_M^1 \setminus M \subset G_M \setminus M$. Пусть $x \in G_M \setminus M, b = d(x, M) > 0$. Докажем, что норма производной g функции $d(\cdot, M)$ в точке x равна 1. В силу неравенства треугольника $\|g\| \leq 1$. $Q(b) := \{z \in X : d(z, M) \leq b\}$ – выпуклое тело и $x \in \partial Q(b)$. По теореме Хана–Банаха существует функционал $f \in \mathbb{S}(X^*)$ такой, что $f(x) = \sup\{f(z) : z \in Q(b)\}$. Пусть $H = \{z \in X : f(z) = 1\}$. Для любого $\varepsilon > 0, \varepsilon < 1/2$ найдется точка $h \in \mathbb{S}(X)$ такая, что $f(h) \geq 1 - \varepsilon > 0$. Имеем $x + h/n \notin Q(b)$; тогда

$$\begin{aligned} g(h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x + h/n, M) - d(x, M)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x + h/n, Q(b)) + b - d(x, M)}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x + h/n, Q(b))}{1/n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x + h/n, H)}{1/n} = f(h) \geq 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε получаем $\|g\| \geq 1, \|g\| = 1$.

Нам потребуется следующее утверждение, принадлежащее Дэвису, Фигелю, Джонсону и Пелчинскому.

ЛЕММА Б [14, с. 124]. Пусть X – банахово пространство, $W \subset X$ – выпуклое центрально-симметричное слабо компактное множество. При каждом номере n положим $U_n = 2^n W + 2^{-n} \mathbb{B}(X)$ и обозначим через $\|\cdot\|_n$ функционал Минковского множества U_n . При $x \in X$ положим

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2 \right)^{1/2}$$

и пусть $Y = \{x \in X : \|x\| < \infty\}$. Пусть C – замкнутый по норме $\|\cdot\|$ единичный шар в Y . Через j обозначим вложение Y в X . Тогда

- (I) $W \subset C$;
- (II) $(Y, \|\cdot\|)$ – рефлексивное банахово пространство и j – непрерывное, слабо непрерывное, взаимно-однозначное отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (WCG) – класс банаховых слабо компактно порожденных пространств X , т.е. пространств, в которых существует слабо компактное множество $A \subset X$ такое, что $\overline{\text{span}} A = X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Выпуклое множество $M \in \mathcal{F}(X)$ называется *гладким* в X , если из условий $x \in M$, $f, g \in \mathbb{S}(X^*)$, $f(x) = \sup\{f(y) : y \in M\}$, $g(x) = \sup\{g(y) : y \in M\}$ следует, что $f = g$.

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы в банаховом пространстве X существовало непустое выпуклое гладкое слабо компактное множество, необходимо и достаточно, чтобы $X \in (WCG)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть M – выпуклое гладкое слабо компактное множество из X , $L = \overline{\text{span}} M$. Если $X \notin (WCG)$, то $L \neq X$ и тогда найдется $x_0 \in X \setminus L$. По теореме Хана–Банаха найдется линейный непрерывный функционал такой, что $f(x) = 0$ для любого $x \in L$, $f(x_0) \neq 0$. Тогда $f(x) = 0$ и $-f(x) = 0$ для любого $x \in M$; следовательно, множество M не является гладким.

Достаточность. Пусть $W' \subset X$ – слабо компактное множество, $\overline{\text{span}} W' = X$. Возьмем $W = \text{conv}(W' \cup -W')$. Ясно, что W – выпуклое, слабо компактное, центрально-симметричное множество, $\overline{\text{span}} W = X$. Пусть $C, Y, j, \|\cdot\|$ из леммы Б. Пространство $(Y, \|\cdot\|)$ рефлексивно; следовательно, (см., например, [14]) существует эквивалентная норма $\|\cdot\|_1$ такая, что $Y_1 := (Y, \|\cdot\|_1)$ будет гладким. Пусть $C_1 = \{y \in Y_1 : \|y\|_1 \leq 1\}$. Считаем, без потери общности, что $C_1 \subset C$ и поэтому слабо компактно в Y_1 , а в силу утверждения (II) леммы Б и в X .

Имеем $\overline{\text{span}} W = X$; в силу утверждения (I) леммы Б $W \subset C$, нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны; следовательно, существует число $s > 0$ такое, что $C \subset sC_1$. Тогда пространство Y_1 плотно в X .

Докажем, что C_1 – гладкое в X множество. Допустим противное: существуют $f_1, f_2 \in \mathbb{S}(X^*)$ и точка $y \in C_1$ такие, что $f_1 \neq f_2$,

$$f_1(y) = \sup\{f_1(z) : z \in C_1\}, \quad f_2(y) = \sup\{f_2(z) : z \in C_1\}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} H_1 &= \{x \in X : f_1(x) = f_1(y)\}, & H_2 &= \{x \in X : f_2(x) = f_2(y)\}, \\ \tilde{H}_1 &= \{y \in Y_1 : j(y) \in H_1\}, & \tilde{H}_2 &= \{y \in Y_1 : j(y) \in H_2\}. \end{aligned}$$

Так как j – непрерывное линейное взаимно-однозначное отображение, то $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ – линейные замкнутые многообразия в $(Y, \|\cdot\|_1)$, а так как Y плотно в X , то $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ – замкнутые гиперплоскости в $(Y, \|\cdot\|_1)$. Имеем

$$\tilde{H}_1 \cap \text{int}_{(Y, \|\cdot\|_1)} C_1 = \emptyset, \quad \tilde{H}_2 \cap \text{int}_{(Y, \|\cdot\|_1)} C_1 = \emptyset;$$

в силу гладкости пространства $(Y, \|\cdot\|_1)$ получаем $\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2$; тогда $H_1 = H_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $X \in (WCG)$ – банахово пространство. Тогда если в X существует выпуклое ограниченное антипроксиминальное множество $A \in \mathcal{F}(X)$, то

- а) в X существует гладкое выпуклое ограниченное антипроксиминальное множество $M \in \mathcal{F}(X)$ такое, что $X \setminus M \subset G_M^1$;
- б) банахово пространство X можно эквивалентно перенормировать так, что новая норма будет дифференцируема по Гато, а множество A останется антипроксиминальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $A \in \mathcal{F}(X)$ – выпуклое ограниченное антипроксиминальное множество в X . По теореме 1 в X существует выпуклое гладкое симметричное слабо компактное множество B .

Возьмем $M = A + B$. Очевидно, что M – выпуклое ограниченное множество в X ; замкнутость M следует из замкнутости A и слабой компактности B по лемме 3 [15, с. 449].

Докажем, что M – гладкое множество. Допустим противное: существует точка $y \in M$ и функционалы $f_1, f_2 \in \mathbb{S}(X^*)$ такие, что гиперплоскости $H_1 = \{x \in X : f_1(x) = f_1(y)\}$, $H_2 = \{x \in X : f_2(x) = f_2(y)\}$ опорны к M в точке y .

По построению множества M имеем $y = x + z$, где $x \in A$, $z \in B$.

Считаем, без потери общности, что

$$f_1(y) = \sup\{f_1(v) : v \in M\}, \quad f_2(y) = \sup\{f_2(v) : v \in M\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sup\{f_1(v) : v \in M\} &= \sup\{f_1(v) : v \in A\} + \sup\{f_1(v) : v \in B\}, \\ f_1(x) &\leq \sup\{f_1(v) : v \in A\}, \quad f_1(z) \leq \sup\{f_1(v) : v \in B\}; \end{aligned}$$

следовательно,

$$f_1(x) = \sup\{f_1(v) : v \in A\}, \quad f_1(z) = \sup\{f_1(v) : v \in B\}.$$

Аналогично,

$$f_2(x) = \sup\{f_2(v) : v \in A\}, \quad f_2(z) = \sup\{f_2(v) : v \in B\}.$$

В силу гладкости множества B получаем, что $f_1 = f_2$; тогда $H_1 = H_2$; противоречие, M – гладкое множество.

Докажем, что множество M антипроксиминально. Допустим противное: существуют точки $w \in X \setminus M$ и $y_1 \in P_M(w)$. По теореме Хана–Банаха найдется функционал $f \in \mathbb{S}(X^*)$, разделяющий множество M и шар $\mathbb{B}_X(w, d(w, M))$. Тогда $f \in \Sigma(\mathbb{S}(X))$ и можно считать, без потери общности, что $f(y_1) = \sup\{f(v) : v \in M\}$. По построению

множества M имеем $y_1 = x_1 + z_1$, где $x_1 \in A$, $z_1 \in B$. Как и в предыдущем пункте получаем, что $f(x_1) = \sup\{f(v) : v \in A\}$, т.е. $f \in \Sigma(A)$. Тогда по лемме А пришли к противоречию с антипроксиминальностью множества A ; множество M антипроксиминально.

Докажем, что $X \setminus M \subset G_M^1$. По лемме 1 $G_M^1 \setminus M = G_M \setminus M$ и достаточно доказать, что $X \setminus M \subset G_M$. Пусть $x \in X \setminus M$, $xM = b > 0$. Рассмотрим множества $M(b)$ и $A(b) + B$. Имеем

$$M(b) = \overline{\bigcup_{z \in M} \mathbb{B}_X(z, b)} = \overline{M + \mathbb{B}_X(0, b)} = \overline{A + B + \mathbb{B}_X(0, b)}.$$

В силу слабой компактности B получаем

$$\begin{aligned} A(b) + B &= \overline{\bigcup_{z \in A} \mathbb{B}_X(z, b)} + B = \overline{A + \mathbb{B}_X(0, b)} + B \\ &= \overline{A + \mathbb{B}_X(0, b) + B} = \overline{A + \mathbb{B}_X(0, b) + B}. \end{aligned}$$

Следовательно, $M(b) = A(b) + B$. Тогда $M(b)$, как и M , будет выпуклым гладким множеством. Итак, $M(b)$ – выпуклое гладкое замкнутое тело, $x \in \partial(M(b))$. Тогда субдифференциал функции $d(\cdot, M)$ в точке x состоит только из одного элемента. Функция $d(\cdot, M)$ выпукла и непрерывна; следовательно, функция $d(\cdot, M)$ в точке x дифференцируема по Гато (см., например, [16, с. 86]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО пункта б) аналогично доказательству пункта а); новым шаром будет $\mathbb{B}(X) + B$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в предложении 1 A – тело в X , то M тоже будет телом в X .

В [17] пространство m ограниченных последовательностей перенормировано в пространство $\tilde{m}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in m, \\ \langle x \rangle_1 &= |x_1|^2, \quad \langle x \rangle_2 = [\langle x \rangle_1^2 + |x_2|^4]^{1/2}, \quad \langle x \rangle_3 = [\langle x \rangle_2^3 + |x_3|^6]^{1/3}, \quad \dots, \\ \langle x \rangle_n &= [\langle x \rangle_{n-1}^n + |x_n|^{2n}]^{1/n}, \quad \|x\|_{\tilde{m}} := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x \rangle_n^{1/2}. \end{aligned}$$

В [17] доказано, что $\|x\|_m \leq \|x\|_{\tilde{m}} \leq \sqrt{2} \|x\|_m$.

Пусть $e = (1, 1, 1, \dots) \in c$. Для $n \geq 3$ имеем $\langle e \rangle_n^n - \langle e \rangle_{n-1}^n = 1$, откуда

$$\langle e \rangle_n - \langle e \rangle_{n-1} \leq \frac{1}{n \cdot \langle e \rangle_{n-1}^{n-1}} \leq \frac{1}{3 \langle e \rangle_2^{n-1}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{(n-1)/2}}.$$

Отсюда легко показать, что $\|e\|_{\tilde{m}} < \sqrt{2}$.

ЛЕММА 2. Пусть $x, y \in \hat{c}_0$, $\|e + x\|_{\tilde{m}} > 1$. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\frac{d}{d\lambda} \|e + x + \lambda y\|_{\tilde{m}} \Big|_{\lambda=0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{y_k \cdot (1 + x_k)^{2k-1} \langle e + x \rangle_k \langle e + x \rangle_{k+1} \cdots \langle e + x \rangle_n}{\langle e + x \rangle_n^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем некоторое число $\delta > 0$. Считаем, без потери общности, что $|\lambda| < \delta$. Обозначим $d_k = \langle \mathbf{e} + x + \lambda y \rangle_k$, $d'_k = \frac{d}{d\lambda}(d_k)$. Ясно, что $d_{k+1} \geq d_k$ для любого номера k .

Имеем $d_{k+1}^{k+1} - d_k^{k+1} = (1 + x_{k+1} + \lambda y_{k+1})^{2k+2}$. Продифференцируем это равенство по λ :

$$\begin{aligned} (k+1)d_{k+1}^k d'_{k+1} - (k+1)d_k^k d'_k &= (2k+2)(1 + x_{k+1} + \lambda y_{k+1})^{2k+1} y_{k+1}, \\ d_{k+1}^k d'_{k+1} &= d_k^k d'_k + 2(1 + x_{k+1} + \lambda y_{k+1})^{2k+1} y_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Из равенств (1) и равенства $d'_1 = 2(1 + x_1 + \lambda y_1)y_1$ получаем

$$\begin{aligned} d_{n+1}^n d'_{n+1} &= 2 \sum_{k=1}^n (1 + x_k + \lambda y_k)^{2k-1} y_k d_k d_{k+1} d_{k+2} \cdots d_n \\ &\quad + 2(1 + x_{n+1} + \lambda y_{n+1})^{2n+1} y_{n+1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $n = 1, 2, \dots$.

Существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\|\mathbf{e} + x\|_{\tilde{m}} > 1 + \varepsilon$. Найдется номер n_1 такой, что при $k \geq n_1$ и $|\lambda| < \delta$ справедливы следующие неравенства: $d_k \geq (1 + \varepsilon)^2$ и $|1 + x_k + \lambda y_k| < 1 + \varepsilon/2$. Тогда из равенства (2) при $n \geq n_1$ и $|\lambda| < \delta$ получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |d'_{n+1}| &\leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{|1 + x_k + \lambda y_k|^{2k-1} y_k d_k d_{k+1} \cdots d_n}{d_{n+1}^n} + 2 \frac{|1 + x_{n+1} + \lambda y_{n+1}|^{2n+1} y_{n+1}}{d_{n+1}^n} \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{|1 + x_k + \lambda y_k|^{2k-1} y_k}{d_{n+1}^{k-1}}. \end{aligned}$$

Поскольку $y_n \rightarrow 0$, из последнего неравенства получаем, что найдется число $c > 0$ такое, что для любого номера k выполняется $|d'_k| \leq c$.

Справедливы следующие соотношения:

$$\|\mathbf{e} + x + \lambda y\|_{\tilde{m}}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [d_{n+1} - d_n].$$

Пусть $k \geq n_1$ и $|\lambda| < \delta$. Имеем

$$\begin{aligned} (1 + x_{k+1} + \lambda y_{k+1})^{2k+2} &= d_{k+1}^{k+1} - d_k^{k+1} \\ &= (d_{k+1} - d_k)[d_{k+1}^k + d_{k+1}^{k-1} d_k + \cdots + d_{k+1} d_k^{k-1} + d_k^k] \\ &\geq (d_{k+1} - d_k)(k+1)d_k^k, \\ 0 \leq d_{k+1} - d_k &\leq \frac{(1 + x_{k+1} + \lambda y_{k+1})^{2k+2}}{(k+1)d_k^k} \leq \frac{(1 + \varepsilon/2)^{2k+2}}{(k+1)(1 + \varepsilon)^{2k}}. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу неравенств (3) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |d_{k+1} - d_k|$ сходится равномерно по $|\lambda| \leq \delta$. Воспользовавшись соотношениями (1) и (3), получим

$$\begin{aligned} |d'_{k+1} - d'_k| &= \left| \frac{d'_k d_k^k}{d_{k+1}^k} + \frac{2(1+x_{k+1}+\lambda y_{k+1})^{2k+1} y_{k+1}}{d_{k+1}^k} - d'_k \right| \\ &\leq |d'_k| \left| 1 - \frac{d_k^k}{d_{k+1}^k} \right| + \frac{2|1+x_{k+1}+\lambda y_{k+1}|^{2k+1} |y_{k+1}|}{d_{k+1}^k} \\ &\leq \frac{|d'_k| (d_{k+1} - d_k) k d_{k+1}^{k-1}}{d_{k+1}^k} + \frac{2|1+x_{k+1}+\lambda y_{k+1}|^{2k+1} |y_{k+1}|}{d_{k+1}^k} \\ &\leq \frac{|d'_k| (1+\varepsilon/2)^{2k+2} k}{(k+1)(1+\varepsilon)^{2k} d_{k+1}} + \frac{2(1+\varepsilon/2)^{2k+1} |y_{k+1}|}{(1+\varepsilon)^{2k}} \\ &\leq \frac{|d'_k| (1+\varepsilon/2)^{2k+2}}{(1+\varepsilon)^{2k+2}} + \frac{2(1+\varepsilon/2)^{2k+1} |y_{k+1}|}{(1+\varepsilon)^{2k}}. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon > 0$ и для любого номера k справедливо неравенство $|d'_k| < c$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d'_{k+1} - d'_k|$$

сходится равномерно по $|\lambda| \leq \delta$. Из (3) и (2) по теореме 7 [11, с. 441]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \|\mathbf{e} + x + \lambda y\|_{\bar{m}}^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} d'_{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{k=1}^n (1+x_k+\lambda y_k)^{2k-1} y_k \frac{\langle \mathbf{e} + x + \lambda y \rangle_k \langle \mathbf{e} + x + \lambda y \rangle_{k+1} \cdots \langle \mathbf{e} + x + \lambda y \rangle_n}{\langle \mathbf{e} + x + \lambda y \rangle_{n+1}^n}. \end{aligned}$$

Из последней формулы легко получается утверждение леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $x \in X = c_0$, $\sqrt{2} > \|\mathbf{e} + x\|_{\bar{m}} > 1$, $f = (f_1, f_2, f_3, \dots) \in \ell_1$, $f(\mathbf{e} + x) = \sup\{f(z) : z \in X, \|z\|_{\bar{m}} \leq \|\mathbf{e} + x\|_{\bar{m}}\} = \|\mathbf{e} + x\|_{\bar{m}}$. Тогда найдутся номер k_0 , числа $\gamma > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что при $k \geq k_0$ выполняется неравенство

$$|f_k| \geq \gamma \cdot \left(\frac{1+\varepsilon/2}{\sqrt{2}} \right)^{2k-1}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 найдется число $\lambda > 0$ такое, что при всех номерах k имеем

$$|f_k| = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1+x_k|^{2k-1} \langle \mathbf{e} + x \rangle_k \langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+1} \cdots \langle \mathbf{e} + x \rangle_n}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{n+1}^{n+1/2}}.$$

Так как $\sqrt{2} > \|\mathbf{e} + x\|_{\bar{m}} > 1$, существует число $1/2 > \varepsilon > 0$ такое, что $\sqrt{2} - 2\varepsilon > \|\mathbf{e} + x\|_{\bar{m}} > 1 + 2\varepsilon$. Последовательность $\langle \mathbf{e} + x \rangle_k$ не убывает и сходится к $\|\mathbf{e} + x\|_{\bar{m}}^2$ и $x_k \rightarrow 0$; следовательно, существует номер k_0 такой, что при $k \geq k_0$ выполняются следующие соотношения:

$$(\sqrt{2} - 2\varepsilon)^2 > \langle \mathbf{e} + x \rangle_k > (1 + \varepsilon)^2, \quad 1 + \frac{\varepsilon}{2} > |1 + x_k| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_k| < \varepsilon.$$

Оценим величину $\langle \mathbf{e} + x \rangle_n^n / \langle \mathbf{e} + x \rangle_{n+1}^n$ при $n \geq k_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_n^n}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{n+1}^n} &\geq \frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_n^{n+1}}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{n+1}^{n+1}} = \frac{1}{1 + |1 + x_{n+1}|^{2n+2} / \langle \mathbf{e} + x \rangle_n^{n+1}} \\ &\geq 1 - \frac{|1 + x_{n+1}|^{2n+2}}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_n^{n+1}} \geq 1 - \frac{(1 + \varepsilon/2)^{2n+2}}{(1 + \varepsilon)^{2n+2}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_n^n}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{n+1}^n} \geq 1 - \frac{(1 + \varepsilon/2)^{2n+2}}{(1 + \varepsilon)^{2n+2}}.$$

Имеем для $k \geq k_0$

$$\begin{aligned} &\frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_k \langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+1} \dots \langle \mathbf{e} + x \rangle_n}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{n+1}^{n-k+1}} \\ &= \frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_k}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+1}} \frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+1}^2}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+2}^2} \frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+2}^3}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+3}^3} \dots \frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_n^{n-k+1}}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{n+1}^{n-k+1}} \\ &\geq \frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_k^k}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+1}^k} \frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+1}^{k+1}}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+2}^{k+1}} \frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+2}^{k+2}}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+3}^{k+2}} \dots \frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_n^n}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{n+1}^n} \\ &\geq \left(1 - \frac{(1 + \varepsilon/2)^{2k+2}}{(1 + \varepsilon)^{2k+2}}\right) \left(1 - \frac{(1 + \varepsilon/2)^{2k+4}}{(1 + \varepsilon)^{2k+4}}\right) \dots \left(1 - \frac{(1 + \varepsilon/2)^{2n+2}}{(1 + \varepsilon)^{2n+2}}\right). \end{aligned}$$

Так как справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \varepsilon/2)^{2n}}{(1 + \varepsilon)^{2n}} < \infty,$$

существует константа $c > 0$ такая, что для любого номера $k \geq k_0$ выполняется неравенство

$$\left(1 - \frac{(1 + \varepsilon/2)^{2k+2}}{(1 + \varepsilon)^{2k+2}}\right) \left(1 - \frac{(1 + \varepsilon/2)^{2k+4}}{(1 + \varepsilon)^{2k+4}}\right) \dots \left(1 - \frac{(1 + \varepsilon/2)^{2n+2}}{(1 + \varepsilon)^{2n+2}}\right) \geq c;$$

тогда

$$\frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_k \langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+1} \dots \langle \mathbf{e} + x \rangle_n}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{n+1}^{n-k+1}} \geq c.$$

Имеем при $k \geq k_0$

$$\begin{aligned} |f_k| &= \lambda \frac{|1 + x_k|^{2k-1}}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{n+1}^{(2k-1)/2}} \frac{\langle \mathbf{e} + x \rangle_k \langle \mathbf{e} + x \rangle_{k+1} \dots \langle \mathbf{e} + x \rangle_n}{\langle \mathbf{e} + x \rangle_{n+1}^{n-k+1}} \\ &\geq \lambda \frac{(1 - \varepsilon/2)^{2k-1}}{(\sqrt{2} - 2\varepsilon)^{2k-1}} \cdot c \geq \lambda \left(\frac{1 + \varepsilon/2}{\sqrt{2}}\right)^{2k-1} \cdot c. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства получаем, что при $k \geq k_0$ выполняется неравенство (4) с константой $\gamma = \lambda \cdot c / (1 - ((1 + \varepsilon/2)/\sqrt{2})^2)$.

ЛЕММА 4. Пусть $X = \hat{c}_0(\Gamma)$, $\dim X = \infty$, $f \in X^\# \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{S}(X)$, $f(x) = \sup\{f(z) : z \in \mathbb{B}(X)\}$. Тогда $\text{supp } f = \text{supp } x$ и $\text{sign } x(i) = \text{sign } f(i)$ для любого индекса $i \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что для любого индекса $s \in \Gamma$ справедливо $f(s) \cdot x(s) \geq 0$. Тогда считаем, что $f(s) \geq 0$, $x(s) \geq 0$ для любого индекса $s \in \Gamma$.

Докажем включение $\text{supp } x \subset \text{supp } f$. Допустим противное: существует индекс $s_0 \in \Gamma$ такой, что $s_0 \in \text{supp } x$, но $s_0 \notin \text{supp } f$; тогда для элемента $\tilde{x} \in \hat{c}_0(\Gamma)$, для которого справедливы условия

$$\tilde{x}(s) = x(s) \quad \text{при } s \neq s_0, \quad \tilde{x}(s_0) = 0,$$

имеем $f(x) = f(\tilde{x})$, $\|x\|_{\hat{c}_0(\Gamma)} > \|\tilde{x}\|_{\hat{c}_0(\Gamma)}$; следовательно, $f(x) < \sup\{f(z) : z \in \mathbb{B}(X)\}$.

Докажем включение $\text{supp } f \subset \text{supp } x$. По доказанному $\text{supp } x \subset \text{supp } f$. Так как $f \in \ell_1(\Gamma)$, то множество $\text{supp } f$ не более чем счетно, поэтому считаем, без потери общности, что

$$\text{supp } f = \mathbb{N}, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

и $x_k \geq x_{k+1}$ для любого номера k .

Пусть $f_n \neq 0$, $x_n = 0$. Имеем $f_n \leq \min\{f_k : x_k \neq 0\}$; действительно, если существует $f_k > f_n$ с $x_k \neq 0$, то возьмем $\tilde{x} \in \mathbb{S}(X) : \tilde{x}_i = x_i$ при $i \neq k, i \neq n$, $\tilde{x}_n = x_k \neq 0$, $\tilde{x}_k = x_n = 0$; имеем $f(\tilde{x}) > f(x)$. Так как $f_i \geq 0$ и $f_i \rightarrow 0$, то носитель $\text{supp } x$ конечен. Тогда, начиная с некоторого номера k_0 , справедливо $x_k = 0$, $x_{k_0-1} > 0$. Для чисел a и b , удовлетворяющих равенству

$$\left(\frac{a}{2^{k_0-1}}\right)^2 + \left(\frac{b}{2^n}\right)^2 = \left(\frac{x_{k_0-1}}{2^{k_0-1}}\right)^2, \quad (5)$$

строгий максимум суммы $f_{k_0-1} \cdot a + f_n \cdot b$ достигается для чисел a_0 и b_0 , удовлетворяющих условию

$$b_0 = a_0 \cdot \frac{f_n}{f_{k_0-1}} \cdot \frac{2^{2n}}{2^{2(k_0-1)}}. \quad (6)$$

Возьмем $\tilde{x} \in \mathbb{S}(X) : \tilde{x}_i = x_i$ при $i \neq k_0 - 1, i \neq n$, $\tilde{x}_{k_0-1} = a_0$, $\tilde{x}_n = b_0$; имеем $f(\tilde{x}) > f(x)$. Следовательно, $\text{supp } f = \text{supp } x$.

Второе утверждение очевидно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\mathbb{A}$ — множество последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$, где α_k принимает одно из значений $0, 1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^k, \dots$, причем, если одновременно $k \neq n$ и $\alpha_k = \alpha_n$, то $\alpha_k = \alpha_n = 0$.

Для $x \in c_0$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in \mathbb{A}$ введем следующие обозначения:

$$\rho_\alpha(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x_n \alpha_n)^2 \right]^{1/2}, \quad V_\alpha = \{z \in c_0 : \rho_\alpha(z) \leq 1\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $x \in c_0$, $\|x\|_{c_0} > 0$. $\mathbb{A}(x)$ – множество последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in \mathbb{A}$ таких, что

$$\rho_\alpha(x) = \sup_{\beta \in \mathbb{A}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x_n \beta_n)^2 \right]^{1/2}.$$

Пусть $x \in c_0$, $\|x\|_{c_0} = 1$, $\alpha \in \mathbb{A}(x)$. Обозначим

$$f^\alpha := (f_1^\alpha, f_2^\alpha, \dots, f_n^\alpha, \dots) = (x_1 \alpha_1^2, x_2 \alpha_2^2, \dots, x_n \alpha_n^2, \dots),$$

$$C(x) = \text{conv} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}(x)} f^\alpha \right), \quad Z(x) = w^*\text{-cl } C(x),$$

$$K(x) = \{f \in X^* : f(x) = \sup\{f(z) : z \in \mathbb{B}(X)\}\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для любого элемента $f \in Z(x)$ справедливо равенство $\|f\|_{X^*} = 1$.

ЛЕММА 5. Пусть $x \in c_0$, $\|x\|_{c_0} = 1$. Тогда

- 1) $\mathbb{A}(x) \neq \emptyset$;
- 2) если множество $\text{supp } x$ бесконечно, $\alpha \in \mathbb{A}(x)$, то $\|\alpha\|_{\ell_1} = 1$;
- 3) если множество $\text{supp } x$ бесконечно, $\alpha^n \in \mathbb{A}$, $\rho_{\alpha^n}(x) \rightarrow 1$, то $\|\alpha^n\|_{\ell_1} \rightarrow 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, без потери общности, что выполняется следующее условие: $|x_1| \geq |x_2| \geq \dots \geq |x_k| \geq \dots$. Тогда найдется возрастающая последовательность натуральных чисел (если носитель $\text{supp } x$ конечен, то последовательность конечна) $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots$ такая, что

$$\begin{aligned} |x(n)| &= |x(m)| && \text{при } 1 \leq n \leq k_1, \quad 1 \leq m \leq k_1, \\ |x(n)| &= |x(m)| && \text{при } k_i < n \leq k_{i+1}, \quad k_i < m \leq k_{i+1}, \\ |x(n)| &> |x(m)| && \text{при } n \leq k_i, \quad k_i < m. \end{aligned}$$

- 1) Имеем $\alpha = (1/2, 1/4, \dots, 1/2^k, \dots) \in \mathbb{A}(x)$ и $\mathbb{A}(x) \neq \emptyset$.
- 2) Имеем $1 = \|x\|_{c_0}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k x_k)^2$. Если найдутся номера i и j такие, что $|x_j| > |x_i|$, $\alpha_j < \alpha_i$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k x_k)^2 < \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^{\infty} (\alpha_k x_k)^2 + (\alpha_i x_j)^2 + (\alpha_j x_i)^2;$$

противоречие. Следовательно, можем считать, без потери общности, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \geq \dots$. Теперь очевидно, что $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1/4$, $\dots$, $\alpha_k = 1/2^k$, $\dots$, и $\|\alpha\|_{\ell_1} = 1$.

3) Допустим, что существуют $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность n_i такие, что $\|\alpha^{n_i}\|_{\ell_1} < 1 - \varepsilon$. Пусть j_0 – наименьшее натуральное число такое, что $1/2^{j_0} < \varepsilon$. В силу определения класса $\mathbb{A}$ из равенства $1/2^{j_0} = 1/2^{j_0+1} + 1/2^{j_0+2} + \dots$ получаем, что для любого номера i среди чисел $\alpha_1^{n_i}, \alpha_2^{n_i}, \dots, \alpha_k^{n_i}, \dots$ отсутствует, по крайней мере, одно из чисел $1/2, 1/4, \dots, 1/2^{j_0}$. Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, считаем, что для всех i отсутствует число $1/2^{j_1}$, где $1 \leq j_1 \leq j_0$. Теперь имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{n_i} x_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{j_1-1} \left(\frac{x_k}{2^k} \right)^2 + \sum_{k=j_1}^{\infty} \left(\frac{x_k}{2^{k+1}} \right)^2 < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_k}{2^k} \right)^2 - \delta = 1 - \delta,$$

где $\delta > 0$ не зависит от номера i . Но $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{n_i} x_k)^2 \rightarrow 1$; следовательно, пришли к противоречию; утверждение пункта доказано.

ЛЕММА 6. Пусть $X = \hat{c}_0$, $x \in \mathbb{S}(X)$, множество $\text{supp } x$ бесконечно. Тогда справедливы равенства

- а) $K(x) = \text{Кон } Z(x)$;
- б) $K(x) \cap \mathbb{S}(X^*) = Z(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) По лемме 4 для любого $f \in K(x)$ справедливо $\text{supp } f = \text{supp } x$. Множество $\text{supp } x$ счетно; следовательно, мы можем ограничиться случаем, когда: для любого индекса $s \in \Gamma$, для любого функционала $f \in K(x)$ справедливо $x(s) \geq 0$, $f(s) \geq 0$; $\hat{c}_0(\Gamma) = \hat{c}_0 = X$ и $\text{supp } x = \mathbb{N}$. Пусть $D = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}(x)} V_\alpha$. Нетрудно заметить, что $\mathbb{B}(X) = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} V_\alpha \subset D$. По лемме 5 $\mathbb{A}(x) \neq \emptyset$; тогда $x \in (\partial D) \cap \mathbb{S}(X)$. Пусть

$$K = \{f \in X^* : f(x) = \sup\{f(z) : z \in D\}\}.$$

Докажем, что $K = K(x)$. Так как $\mathbb{B}(X) \subset D$, то $K \subset K(x)$. Теперь допустим, что существует $f \in K(x) \setminus K$. Это означает, что существует точка $z \in D \setminus \mathbb{B}(X)$ такая, что $f(z) = f(x) = \sup\{f(y) : y \in \mathbb{B}(X)\}$ и $\sup\{f(y) : y \in D\} > f(x)$. Так как D – выпуклое тело, то $\sup\{f(z) : z \in D\} = \sup\{f(z) : z \in \text{int } D\}$; следовательно, можно считать, что $z \in \text{int } D$. Найдется последовательность $\alpha^n \in \mathbb{A}$ такая, что $(\bigcap_{n=1}^\infty V_{\alpha^n}) \cap [z, x] = \{x\}$. Обозначим $z_n = (\partial V_{\alpha^n}) \cap [z, x]$. Так как $[z, x]$ – компакт, можем считать, что $\|x - z_n\|_{\hat{c}_0(\Gamma)} \rightarrow 0$. Имеем

$$\rho_{\alpha^n}(z_n) = 1, \quad |\rho_{\alpha^n}(x) - \rho_{\alpha^n}(z_n)| \leq \rho_{\alpha^n}(x - z_n) \leq \|x - z_n\|_{\hat{c}_0(\Gamma)} \rightarrow 0;$$

следовательно, $\rho_{\alpha^n}(x) \rightarrow 1 = \sup_{\alpha \in \mathbb{A}} \rho_\alpha(x)$.

Обозначим $\beta^n = ((\alpha_1^n)^2 x_1, (\alpha_2^n)^2 x_2, \dots, (\alpha_k^n)^2 x_k, \dots)$. Имеем $x \in c_0$, $\alpha^n \in \ell_1$; следовательно, $\beta^n \in \ell_1$. Считаем, без потери общности, что последовательности $\alpha^n, \beta^n \in \ell_1$ сходятся в w^* -топологии пространства c_0 к $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0, \dots) \in \ell_1$ и $\beta^0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_k^0, \dots) \in \ell_1$ соответственно. Ясно, что для любого номера k справедливо $\beta_k^0 = (\alpha_k^0)^2 x_k$. В силу w^* -сходимости α^n к α^0 получаем, что для любого номера k α_k^0 может принимать одно из значений: $0, 1/2, 1/4, \dots, 1/2^k, \dots$, причем, если одновременно выполняются $i \neq k$ и $\alpha_i^0 = \alpha_k^0$, то $\alpha_i^0 = \alpha_k^0 = 0$. Имеем

$$\langle \beta^n, x \rangle = \sum_{k=1}^\infty x_k (\alpha_k^n)^2 x_k = \rho_{\alpha^n}^2(x) \rightarrow 1;$$

следовательно,

$$1 = \langle \beta^0, x \rangle = \sum_{k=1}^\infty x_k \beta_k^0 = \sum_{k=1}^\infty x_k x_k (\alpha_k^0)^2.$$

Так как множество $\text{supp } x$ бесконечно, по лемме 5 $\|\alpha^n\|_{\ell_1} \rightarrow 1$; по определению множества $\mathbb{A}$ имеем $\|\alpha^n\|_{\ell_1} \leq 1$, последовательность $\alpha^n w^*$ -сходится к α^0 в пространстве ℓ_1 ; тогда по лемме 12 [18] последовательность α^n (рассматриваемая как последовательность элементов пространства ℓ_1) сходится по норме пространства ℓ_1 к $\alpha^0 \in \mathbb{A}(x)$.

Имеем $z \in \text{int } D$; следовательно, $\rho_\alpha(z) < 1$. Тогда $\rho_{\alpha^n}(z) \rightarrow \rho_\alpha(z) < 1$, что противоречит неравенствам $\rho_{\alpha^n}(z) \geq 1$; следовательно, $K = K(x)$.

Имеем $D = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}(x)} V_\alpha$; тогда по известной теореме (см., например, [19, с. 161]) о поляр пересечения имеем

$$K = w^*\text{-cl conv} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{A}(x)} \{f : f = \lambda f^\alpha, \lambda \geq 0\} \right).$$

Докажем равенство

$$w^*\text{-cl}(\text{Kon}(C(x))) = \text{Kon}(w^*\text{-cl}(C(x))).$$

Включение ' $\supset$ ' очевидно.

Докажем обратное включение. Обозначим

$$K_1 = \text{Kon } C(x), \quad K' = \text{Kon } Z(x).$$

Мы можем считать, без потери общности, что $x(1) \geq x(2) \geq \dots$. Найдется номер k_0 такой, что $x(1) = x(2) = \dots = x(k_0)$ и $x(k_0) > x(k)$ при $k > k_0$. Возьмем $y \in \hat{c}_0(\Gamma)$ такой, что $\text{supp } y = \mathbb{N}$, $y(1) = y(2) = \dots = y(k_0) = 1$ и $y(k) = 0$ при $k > k_0$.

В силу определения f^α найдется константа $c > 0$ такая, что $f^\alpha(y) = c$ для любого $\alpha \in \mathbb{A}(x)$. Тогда $g(y) = c$ для любого $g \in Z(x)$. Возьмем любой элемент $f \in \overline{K}_1 \setminus \{0\}$. Тогда $f(y) = c_1 > 0$ и $f \in w^*\text{-cl}\{g \in K_1 : g(y) \leq 2c_1\}$. Пусть $A = \{g \in X^* : g = \xi \cdot (2c_1/c), \xi \in Z(x)\}$, $C = \text{conv}(\{0\} \cup A)$. Имеем $w^*\text{-cl}\{g \in K_1 : g(y) \leq 2c_1\} \subset C \subset K'$ и множество C w^* -замкнуто; следовательно, $f \in K'$.

Часть б) легко получается из а).

ЛЕММА 7. Пусть $x \in X = \hat{c}_0(\Gamma)$, $\|x\|_{c_0(\Gamma)} = 1$, $\text{supp } x \subset \mathbb{N}$, $|x(n)| \geq |x(n+1)|$ для любого номера $n \in \mathbb{N}$; $k_1, k_2, \dots, k_i$ — возрастающая последовательность (не обязательно бесконечная) натуральных чисел такая, что

$$\begin{aligned} |x(n)| &= |x(m)| && \text{при } 1 \leq n \leq k_1, \quad 1 \leq m \leq k_1, \\ |x(n)| &= |x(m)| && \text{при } k_i < n \leq k_{i+1}, \quad k_i < m \leq k_{i+1}, \\ |x(n)| &> |x(m)| && \text{при } n \leq k_i, \quad k_i < m. \end{aligned}$$

Если набор $k_1, k_2, \dots, k_i$ конечен, то $x_n = 0$ при $n > \max k_i$. Пусть функционал $f \in X^* \setminus \{0\}$ такой, что $f(x) = \sup\{f(z) : z \in \mathbb{B}(X)\}$. Тогда найдется константа $c_x > 0$ такая, что для любых номеров k_i справедливо неравенство

$$\sum_{k=k_i+1}^{\infty} |f_k| < \frac{c_x}{2^{2k_i}} \|f\|_{X^*}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 $\text{supp } x = \text{supp } f$ и $\text{sign } f(i) = \text{sign } x(i)$ для любого индекса $i \in \text{supp } x$, поэтому считаем, что $x(q) \geq 0$ и $f(q) \geq 0$ для любого индекса $q \in \Gamma$. Если носитель $\text{supp } x$ конечен, то утверждение очевидно; считаем, что множество $\text{supp } x$ бесконечно (тогда набор $k_1, k_2, \dots, k_i$ тоже конечен).

Пусть $\alpha \in \mathbb{A}(x)$ — произвольная последовательность. Имеем $f^\alpha = (f_1^\alpha, f_2^\alpha, \dots, f_k^\alpha, \dots)$, где $f_1^\alpha, f_2^\alpha, \dots, f_{k_1}^\alpha$ — перестановка множества

$$\frac{x_1}{2^2}, \frac{x_1}{2^4}, \dots, \frac{x_1}{2^{2k_1}},$$

$f_{k_1+1}^\alpha, f_{k_1+2}^\alpha, \dots, f_{k_2}^\alpha$ — перестановка множества

$$\frac{x_{k_1+1}}{2^{2k_1+2}}, \frac{x_{k_1+1}}{2^{2k_1+4}}, \dots, \frac{x_1}{2^{2k_2}},$$

$\dots, f_{k_n+1}^\alpha, f_{k_n+2}^\alpha, \dots, f_{k_{n+1}}^\alpha$ — перестановка множества

$$\frac{x_{k_n+1}+1}{2^{2k_n+2}}, \frac{x_{k_n+1}+1}{2^{2k_n+4}}, \dots, \frac{x_{n+1}}{2^{2k_{n+1}}}$$

и т.д. По определению последовательность k_n зависит только от точки x . Тогда для любого k_n имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_n+1}^{\infty} |f_k^\alpha| &= \sum_{k=k_n+1}^{k_{n+1}} |f_k^\alpha| + \sum_{k=k_{n+1}+1}^{k_{n+2}} |f_k^\alpha| + \dots + \sum_{k=k_{n+m}+1}^{k_{n+m+1}} |f_k^\alpha| + \dots \\ &= \sum_{k=k_n+1}^{k_{n+1}} \frac{x_{k_n+1}+1}{2^{2k}} + \sum_{k=k_{n+1}+1}^{k_{n+2}} \frac{x_{k_n+1}+1}{2^{2k}} + \dots + \sum_{k=k_{n+m}+1}^{k_{n+m+1}} \frac{x_{k_n+m+1}}{2^{2k}} + \dots \\ &\leq \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \frac{x_{k_n+1}}{2^{2k}} = \frac{x_{k_n+1}}{2^{2k_n} \cdot 3} \leq \frac{\|x\|_{c_0(\Gamma)}}{2^{2k_n} \cdot 3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть теперь $f \in C(x)$. В силу неравенства (7) имеем

$$\sum_{k=k_n+1}^{\infty} |f_k| \leq \frac{\|x\|_{c_0(\Gamma)}}{2^{2k_n} \cdot 3}, \quad \|f\|_{X^*} = 1. \quad (8)$$

Ясно, что неравенство (8) справедливо для $f \in Z(x)$ и $\|f\|_{X^*} = 1$.

По лемме 6 $K(x) = \text{Кон } Z(x)$. А для $g \in \text{Кон } Z(x)$ имеем $g = \|g\|_{X^*} f$, $f \in Z(x)$ и выполняется неравенство

$$\sum_{k=k_n+1}^{\infty} |g_k| \leq \frac{\|x\|_{c_0(\Gamma)}}{2^{2k_n}} \cdot \|g\|_{X^*}.$$

Нам потребуется следующий результат.

ТЕОРЕМА А [14, с. 151]. *Для любого множества Γ каждое замкнутое линейное подпространство пространства $c_0(\Gamma)$ является слабо компактно порожденным.*

ТЕОРЕМА 2. *В бесконечномерном пространстве $X = \hat{c}_0(\Gamma)$ существует выпуклое ограниченное гладкое антипроксиминальное тело $M \in \mathcal{F}(X)$ такое, что $X \setminus M \subset G_M^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы А пространство $\hat{c}_0(\Gamma)$ будет слабо компактно порожденным; тогда в силу предложения 1 достаточно построить в X выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное тело.

Так как X бесконечномерно, считаем, что $\Gamma = \mathbb{N} \cup (\Gamma \setminus \mathbb{N})$, где $\Gamma \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset$. Пусть

$$\varkappa = \frac{2}{\|e\|_{\tilde{m}} - 1}, \quad e \in c, \quad \sup e = \mathbb{N}, \quad e(q) = 1 \text{ для любого } q \in \mathbb{N}.$$

Для $z \in X$ пусть

$$F(z) = \varkappa \|z\|_{c_0(\Gamma)} + \|e - z|_{\mathbb{N}}\|_{\tilde{m}}, \quad M = \left\{ z \in X : F(z) \leq \frac{\|e\|_{\tilde{m}} + \sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Ясно, что M выпукло, ограничено и замкнуто. По доказанному ранее $\|\mathbf{e}\|_{\tilde{m}} < \sqrt{2}$; тогда M – тело.

Докажем, что M антипроксимinally в X . Допустим противное: существуют $y \in X \setminus M$ и $x \in P_M(y)$. Ясно, что $x \in \partial M$.

По теореме Хана–Банаха найдется функционал $f \in X^* \setminus \{0\}$, разделяющий шар $\mathbb{B}_X(y, \|y - x\|)$, и множество M . Обозначим $F_1(x) = \varkappa \cdot \|x\|_{c_0(\Gamma)}$, $F_2 = \|\mathbf{e} - x|_{\mathbb{N}}\|_{\tilde{m}}$. Так как F_1 и F_2 – непрерывные выпуклые собственные функции, по теореме Моро–Рокафеллара о субдифференциалах (см., например, [20, с. 231]) имеем

$$\partial F(x) = \partial F_1(x) + \partial F_2(x).$$

Тогда $f = \lambda(g^{(1)} + g^{(2)})$, где $g^{(1)} \in \partial F_1(x)$, $g^{(2)} \in \partial F_2(x)$, $\lambda > 0$.

Докажем, что $F_2(x) > 1$. Допустим противное: $F_2(x) \leq 1$. В силу включения $x|_{\mathbb{N}} \in c_0$ получаем, что $\|\mathbf{e} - x|_{\mathbb{N}}\|_{\tilde{m}} > 0$. Имеем $x \in M$; следовательно,

$$F(x) \leq \frac{\|\mathbf{e}\|_{\tilde{m}} + \sqrt{2}}{2} < \sqrt{2}.$$

Кроме того,

$$1 \geq F_2(x) = \|\mathbf{e} - x|_{\mathbb{N}}\|_{\tilde{m}} \geq \|\mathbf{e}\|_{\tilde{m}} - \|x|_{\mathbb{N}}\|_{\tilde{m}};$$

тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot \|x|_{\mathbb{N}}\|_{c_0} &\geq \|x|_{\mathbb{N}}\|_{\tilde{m}} \geq \|\mathbf{e}\|_{\tilde{m}} - 1, \quad \|x|_{\mathbb{N}}\|_{c_0} \geq \frac{\|\mathbf{e}\|_{\tilde{m}} - 1}{\sqrt{2}}, \\ F(x) &\geq \varkappa \cdot \|x\|_{c_0(\Gamma)} \geq \varkappa \cdot \|x|_{\mathbb{N}}\|_{c_0} \geq \sqrt{2} > F(x); \end{aligned}$$

противоречие.

Докажем, что $F_1(x) > 0$. По определению $F_1(x) \geq 0$. Допустим, что $F_1(x) = 0$; тогда $x = 0$. Имеем $F(x) = F_2(x) = \|\mathbf{e}\|_{\tilde{m}} < (\|\mathbf{e}\|_{\tilde{m}} + \sqrt{2})/2$; следовательно, $x \notin \partial M$; противоречие.

Имеем (см., например, [20, с. 230])

$$\partial F_1(x) = \gamma \cdot \{g \in \ell_1(\Gamma) : \|g\|_{\ell_1(\Gamma)} = 1, g(x) = \|x\|_{c_0(\Gamma)}\}, \quad \gamma > 0.$$

Имеем

$$\|x\|_{c_0(\Gamma)} = g(x) = \sum_{s \in \Gamma} x(s)g(s) \leq \|x\|_{c_0(\Gamma)} \sum_{s \in \Gamma} |g(s)| = \|x\|_{c_0(\Gamma)};$$

следовательно, для любого $s \in \text{supp } g$ будет $x(s) = \|x\|_{c_0(\Gamma)} \text{sign } g(s)$. Кроме того, $\text{card}\{s \in \Gamma : |x(s)| = \|x\|_{c_0(\Gamma)}\} < \infty$; тогда для любого $g \in \partial F_1(x)$ справедливо соотношение $\text{card}\{q \in \Gamma : g(q) \neq 0\} < \infty$. Итак, $f(q) = g^{(2)}(q)$ во всех точках $q \in \text{supp } f$ за исключением конечного числа точек.

По лемме 4 $\text{supp } f = \text{supp } (x - y)$. Обозначим $\text{supp } f = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} t_i$, где $\mathcal{N}$ – отрезок ряда натуральных чисел или весь ряд. Считаем без потери общности, что $|x(t_n) - y(t_n)| \geq |x(t_m) - y(t_m)|$ для любых индексов $n, m \in \mathcal{N}$, $m \geq n$.

По лемме 7 существует константа $c_{x-y} > 0$ и возрастающая последовательность k_n натуральных чисел такие, что выполняется неравенство

$$\sum_{k=k_n+1}^{\infty} |f(t_k)| < \frac{c_{x-y}}{2^{2k_n}}. \quad (9)$$

Пусть ν_k – перестановка элементов множества $\mathbb{N}$ такая, что справедливо неравенство $|f(t_{\nu_k})| \geq |f(t_{\nu_{k+1}})|$. Тогда из неравенства (9) вытекает, что справедливо неравенство

$$\sum_{k=k_n+1}^{\infty} |f(t_{\nu_k})| < \frac{c_{x-y}}{2^{2k_n}}. \quad (10)$$

Пусть $T = \mathbb{N} \cap \text{supp}(x - y)$. Возможны случаи

- а) $\text{card } T < \infty$;
- б) $\text{card } T = \infty$.

Так как $F_2(x) = \|e - x\|_{\tilde{m}} > 1$, по лемме 3 найдутся номер k_0 , числа $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что при $k \geq k_0$

$$|g^{(2)}(k)| \geq \left(\frac{1 + \varepsilon/2}{\sqrt{2}} \right)^{2k-1} \cdot \gamma.$$

Кроме того, как отмечалось, $f(q) = \lambda g^{(2)}(q)$ во всех точках $q \in \text{supp } f$ за исключением конечного числа точек; следовательно, случай а) исключается. Остается случай б): $\text{card } T = \infty$ и $\text{card}\{\mathbb{N} \setminus T\} < \infty$; тогда $T = \bigcup_{j=1}^{\infty} t_{\nu_{i_j}}$. Имеем $|f(t_{\nu_{i_j}})| \geq |f(t_{\nu_{i_m}})|$ при $m \geq j$; тогда из неравенства (10) получаем следующее неравенство:

$$\sum_{j=k_n+1}^{\infty} |f(t_{\nu_{i_j}})| < \frac{c_{x-y}}{2^{2k_n}}. \quad (11)$$

Имеем $f(q) = g^{(2)}(q)$ во всех точках $q \in \mathbb{N}$ за исключением конечного числа точек; следовательно, существует натуральное число j_0 такое, что при $j \geq j_0$

$$|f(t_{\nu_{i_j}})| = \lambda |g^{(2)}(t_{\nu_{i_j}})| \geq \lambda \left(\frac{1 + \varepsilon/2}{\sqrt{2}} \right)^{2t_{\nu_{i_j}}} \cdot \gamma. \quad (12)$$

В силу (11) и (12) для достаточно больших номеров k_n имеем

$$\begin{aligned} \frac{c_{x-y}}{2^{2k_n}} &> \sum_{j=k_n+1}^{\infty} |f(t_{\nu_{i_j}})| \geq \lambda \sum_{j=k_n+1}^{\infty} \left(\frac{1 + \varepsilon/2}{\sqrt{2}} \right)^{2t_{\nu_{i_j}}} \cdot \gamma \\ &\geq \lambda \sum_{k=k_n+1}^{\infty} \left(\frac{1 + \varepsilon/2}{\sqrt{2}} \right)^{2k-1} \cdot \gamma = \frac{\lambda \gamma \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon/2}{\sqrt{2}} \right)^{2k_n+1}}{1 - \left(\frac{1 + \varepsilon/2}{\sqrt{2}} \right)^2} = c_1 \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon/2}{\sqrt{2}} \right)^{2k_n} \end{aligned}$$

и $c_1 > 0$.

Тогда $c_{x-y}/2^{2k_n} > c_1/2^{k_n}$, но, c_{x-y} и c_1 – константы, а $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{k_n} = \infty$; противоречие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Edelstein M. A. A note on nearest points // Quart. J. Math. 1970. V. 21. № 84. P. 403–406.
- [2] Edelstein M. A., Thompson A. C. Some results on nearest points and support properties of convex sets in c_0 // Pacific J. Math. 1972. V. 40. № 3. P. 553–560.
- [3] Cobzaş S. Antiproximinal sets in some Banach spaces // Math. Balkanica. 1974. V. 4. P. 79–82.
- [4] Кобзаш С. Выпуклые антипроксиминальные множества в пространствах c_0 и c // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 3. С. 449–457.
- [5] Edelstein M. Weakly proximinal sets // J. Approximation Theory. 1976. V. 18. № 1. P. 1–8.
- [6] Cobzaş S. Antiproximinal sets in Banach spaces of continuous function // Revue d'Analyse Numerique et de la Theorie de l'Approximation. 1976. V. 5. № 2. P. 127–143.
- [7] Cobzaş S. Antiproximinal sets in Banach spaces of c_0 -type // Revue d'Analyse Numerique et de la Theorie de l'Approximation. 1978. V. 7. № 2. P. 141–145.
- [8] Фонф В. П. Об антипроксиминальных множествах в пространствах непрерывных функций на бикомпактах // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 3. С. 549–558.
- [9] Borwein J. M. Some remarks on a paper of S. Cobzas on antiproximinal sets // Bull. Calcutta Math. Soc. 1981. V. 73. P. 5–8.
- [10] Edelstein M. A. Antiproximal sets // J. Approximation Theory. 1987. V. 49. № 3. P. 252–255.
- [11] Фонф В. П. О сильно антипроксиминальных множествах в банаховых пространствах // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 2. С. 130–136.
- [12] Балаганский В. С. Антипроксиминальные множества в пространствах непрерывных функций // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 5. С. 643–657.
- [13] Balaganskii V. S. An antiproximinal set in a strictly convex space with Frechet differentiable norm // East J. Approximation. 1996. V. 2. № 2. P. 131–138.
- [14] Дистель Д. Геометрия банаховых пространств. Избранные главы. Киев: Вища школа, 1980.
- [15] Holmes R. B. Geometric Functional Analysis and its Applications. New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1975.
- [16] Балаганский В. С. Слабая непрерывность метрической проекции на слабо компактные множества // Тр. ин-та матем. и мех. Т. 2. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. С. 42–56.
- [17] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1. М.: ИЛ, 1962.
- [18] Балаганский В. С. Аппроксимативные свойства множеств с выпуклым дополнением // Тр. ин-та матем. и мех.. Екатеринбург: УрО РАН 1998. Т. 5. С. 174–195.
- [19] Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
- [20] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

Институт математики и механики Уральского отделения РАН
E-mail: Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Поступило
28.04.2004
Исправленный вариант
17.06.2005