Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Л. Бахарев, Экстремально далекие нормированные пространства с дополнительными ограничениями, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 3, 339–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 18:08:56

УДК 517.98

ЭКСТРЕМАЛЬНО ДАЛЕКИЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Ф. Л. Бахарев

В работе исследуется связь расстояния Банаха–Мазура и модифицированного расстояния Банаха–Мазура. Усилена теорема Шарека о построении инвариантной нормы со специальными свойствами. Построены экстремально далекие нормированные пространства с нормами, инвариантными относительно групп автоморфизмов малой мощности. Доказано, что тривиальная верхняя оценка расстояния Банаха–Мазура через модифицированное расстояние Банаха–Мазура точна по порядку.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Настоящая работа посвящена доказательству существования далеких в смысле расстояния Банаха–Мазура пространств, группы симметрий которых состоят из не слишком большого количества элементов. Напомним, что *расстоянием Банаха–Мазура* между нормированными пространствами X и Y называется величина

$$d(X, Y) = \inf \{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T: X \rightarrow Y, T - \text{изоморфизм} \}.$$

Задачи, связанные с расстоянием в различных специальных классах нормированных пространств и оценками диаметров этих классов, в последние годы вызывают большой интерес, обширную библиографию по этому вопросу можно найти в работах [1]–[3].

Глускин в работе [4] показал, что диаметр множества n -мерных нормированных пространств в метрике Банаха–Мазура имеет порядок n . На самом деле он оценивал снизу величину

$$\partial(X, Y) = \inf \{ \|T\|_{X \rightarrow Y} : |\det T| = 1 \} \cdot \inf \{ \|T\|_{Y \rightarrow X} : |\det T| = 1 \}$$

и использовал неравенство $d(X, Y) \geq \partial(X, Y)$. Точнее, было доказано существование n -мерных нормированных пространств X и Y , для которых выполнено неравенство $\partial(X, Y) \geq cn$. Здесь и далее, все n -мерные нормированные пространства как множества отождествлены с векторным пространством $\mathbb{R}^n$, в котором фиксирован стандартный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Следуя [5], мы будем называть величину $\partial(X, Y)$ *модифицированным расстоянием Банаха–Мазура*.

В работе [5] обсуждается вопрос, насколько велико может быть отношение обычного расстояния Банаха–Мазура к его модифицированному аналогу. Там же автор приводит пример n -мерных нормированных пространств, для которых

$$d(X, Y) \geq \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot \partial(X, Y).$$

В настоящей работе этот результат существенно улучшен. А именно, доказываем, что тривиальная верхняя оценка $d(X, Y) \leq n \cdot \partial(X, Y)$ является точной по порядку.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют две последовательности пространств X_n и Y_n таких, что $\dim X_n = \dim Y_n \rightarrow \infty$ и имеет место неравенство*

$$\frac{d(X_n, Y_n)}{\partial(X_n, Y_n)} \geq (\dim X_n)^{1-\varepsilon_n},$$

где $\{\varepsilon_n\}$ – некоторая последовательность, стремящаяся к нулю.

Доказательство этой теоремы использует конструкцию, предложенную Рудельсоном [6] для сравнения расстояния Банаха–Мазура со слабым расстоянием Банаха–Мазура, введенным Томчак-Егерманн [7]. Для любого нормированного пространства X положим $X_m = X \oplus X \oplus \dots \oplus X$ (сумма m слагаемых по типу ℓ^2); для двух n -мерных нормированных пространств X и Y определим пространства W_1 и W_2 , исходя из соотношений $W_1 = X_{m+1} \oplus Y_m$ и $W_2 = X_m \oplus Y_{m+1}$.

Теорема 1 является следствием логарифмической выпуклости модифицированного расстояния Банаха–Мазура, доказанной Храбровым [5], и утверждения из работы [6], которое Рудельсон приводит без доказательства: можно ввести нормы в пространствах X и Y таким образом, что расстояние Банаха–Мазура между W_1 и W_2 было бы не меньше, чем $c(m)n$. В теореме 2 это утверждение сформулировано более точно.

ТЕОРЕМА 2. *В n -мерных векторных пространствах X и Y можно ввести норму так, что будет иметь место неравенство $d(W_1, W_2) \geq c_2 \dim W_1$, где $c_2 \geq e^{-e^{Am}}$, для некоторой положительной абсолютной константы A .*

В основе доказательства этой теоремы лежит центральный результат работы – теорема 3. Эта теорема усиливает результат Шарека [8] о построении инвариантной нормы со специальными свойствами. Для того, чтобы сформулировать эту теорему, нам потребуется ввести некоторые понятия и обозначения.

Пусть Γ – некоторая конечная подгруппа в $GL(n)$, состоящая из s элементов, и

$$C = \max_{\gamma \in \Gamma} \|\gamma\|_{\ell_n^2 \rightarrow \ell_n^2}.$$

Мы будем считать, что оператор T удовлетворяет модифицированному условию Шарека с параметром ϑ , если выполнено следующее

УСЛОВИЕ (S_ϑ) . Существуют $H, L \subset \ell_2^n$ такие, что

$$\begin{aligned} \gamma H = \gamma^* H = H \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad L \subset H, \quad \dim L \geq \vartheta n, \\ \|P_{H^\perp} T x\|_2 \geq \|x\|_2 \quad \forall x \in L. \end{aligned}$$

Такого типа условие впервые было неявно использовано Глускиным [9] при построении конечномерных аналогов пространств без базиса. Манкевич в своих работах [10], [11] рассматривает похожее свойство оператора и называет его “mixing property”. В наиболее близкой форме это условие фигурирует в работе Шарека [8].

ТЕОРЕМА 3. Пусть единичный шар нормированного пространства E имеет вид $\text{abs conv}\{a_i\}_{i \leq \delta n} \subset B_n^2$, где δ – некоторое положительное число. Тогда для любого $\vartheta > 0$ существует Γ -инвариантная норма $\|\cdot\|_B$ в $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$\frac{1}{2C} \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_B \leq C \|\cdot\|_E,$$

и если оператор T удовлетворяет условию (S_ϑ) , то

$$\|T\|_{E_B \rightarrow E_B} \geq \frac{1}{C^2} c(\vartheta, \delta, s) \sqrt{n}.$$

В случае если Γ – подгруппа группы ортогональных преобразований верна следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть единичный шар нормированного пространства E имеет вид $\text{abs conv}\{a_i, e_j\}_{i \leq \delta n, j \leq n} \subset B_n^2$. Тогда для любого $\vartheta > 0$ существует Γ -инвариантная норма $\|\cdot\|_B$ в $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$\frac{1}{2} \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_B \leq \|\cdot\|_E,$$

и если оператор T удовлетворяет условию (S_ϑ) , то

$$\|T\|_{E_B \rightarrow E_B} \geq c(\vartheta, \delta, s) \sqrt{n}.$$

Как частный случай получаем следующий факт.

ТЕОРЕМА 5. Для любого $\vartheta > 0$ существует Γ -инвариантная норма $\|\cdot\|_B$ в $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$\frac{1}{2} \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_B \leq \|\cdot\|_1,$$

и если оператор T удовлетворяет условию (S_ϑ) , то

$$\|T\|_{E_B \rightarrow E_B} \geq c_1(\vartheta, s) \sqrt{n},$$

где $c_1(\vartheta, s) = c(\vartheta, 0, s)$.

При помощи этих теорем удастся построить такие классы нормированных пространств, что диаметр класса имеет порядок n , а нормы в пространствах этого класса инвариантны относительно групп вращений малой мощности. Доказана следующая

ТЕОРЕМА 6. Пусть Γ_1 и Γ_2 – некоторые подгруппы в $O(n)$. Пусть $s = \text{card } \Gamma_1 \cdot \text{card } \Gamma_2$. Тогда существуют n -мерные нормированные пространства X и Y такие, что

- 1) норма в пространстве X Γ_1 -инвариантна;
- 2) норма в пространстве Y Γ_2 -инвариантна;
- 3) $d(X, Y) \geq \frac{1}{2} \left(c_1 \left(\frac{1}{4}, 4s \right) \right)^2 n$, где $c_1(\vartheta, s)$ – константа из теоремы 5.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть дана последовательность s_n натуральных чисел такая, что

$$s_n = o\left(\frac{\ln n}{\ln \ln \ln n}\right).$$

Пусть $\Gamma_{1,n}$ и $\Gamma_{2,n}$ – некоторые подгруппы в $O(n)$ такие, что $s_n = \text{card } \Gamma_{1,n} \cdot \text{card } \Gamma_{2,n}$. Тогда существуют n -мерные нормированные пространства X_n и Y_n такие, что

- 1) норма в пространстве X_n $\Gamma_{1,n}$ -инвариантна;
- 2) норма в пространстве Y_n $\Gamma_{2,n}$ -инвариантна;
- 3) $d(X_n, Y_n) \geq n^{1-\varepsilon_n}$, где последовательность ε_n стремится к нулю.

2. Предварительные сведения. Буквы i, j, k, m и n будут использоваться нами для обозначения целых чисел. Если E – нормированное пространство, то норму в пространстве E мы будем обозначать $\|\cdot\|_E$ или $\|\cdot\|_B$, где B – единичный шар пространства E , E_B – нормированное пространство с шаром B , B_n^p – шары в пространствах ℓ_n^p . Если у нас дано векторное пространство E и семейство векторов $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где A – некоторое семейство индексов, то через $[u_\alpha]_{\alpha \in A}$ мы будем обозначать линейную оболочку этого семейства, через $\text{conv}\{u_\alpha\}$ – выпуклую оболочку, через $\text{abs conv}\{u_\alpha\}$ – абсолютно выпуклую оболочку.

Пусть H – гильбертово пространство размерности n . Под векторнозначной случайной гауссовской величиной g с распределением из класса $N(0, \sigma^2, H)$ мы будем понимать случайную величину, определенную на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , со значениями в H , распределение которой имеет плотность

$$\rho_g(x) = \left(\frac{n}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-n\|x\|_2^2/(2\sigma^2)}$$

по отношению к мере Лебега. Здесь $\|\cdot\|_2$ – норма в H .

Отметим несколько свойств векторнозначных случайных гауссовских величин. Их доказательства можно найти, например, в работе [12]. Пусть $P_E \in L(H, H)$ – ортогональный проектор на подпространство E , размерность E равна k , g – случайная гауссовская величина с распределением из класса $N(0, \sigma^2; H)$; тогда

- 1) $P_E g$ – случайная гауссовская величина с распределением из класса $N(0, \frac{k}{n}\sigma^2, E)$;
- 2) $P_E g$ и $P_F g$ – независимые случайные гауссовские величины, если F – подпространство, ортогональное к E ;
- 3) пусть $g_1, g_2, \dots, g_m$, $m \leq n$, – независимые случайные гауссовские величины с распределениями из класса $N(0, 1; H)$; тогда при достаточно больших n имеет место неравенство

$$P\{\omega : \|g_j(\omega)\|_2 \leq 2 \quad \forall j \leq m\} \geq 1 - \alpha^n \quad (1)$$

для некоторого $\alpha < 1$.

Любой оператор $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ допускает полярное разложение

$$T = \sum_{j \geq 1} l_j (u_j, \cdot) \tilde{u}_j,$$

где $\{u_j\}$ и $\{\tilde{u}_j\}$ – ортонормированные базисы в $\mathbb{R}^n$ и $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq 0$. Числа l_j называются s -числами оператора T и обозначаются $s_j(T)$.

Доказательства следующих трех утверждений стандартны.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть дан линейный оператор $T_0 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Неравенство $\text{card}\{j : s_j(T_0) \geq 1\} \geq k_0$ имеет место тогда и только тогда, когда существует подпространство $H_0 \subset \mathbb{R}^n$ размерности k_0 такое, что $\|T_0 x\|_2 \geq \|x\|_2$ для любого $x \in H_0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ – обратимый линейный оператор. Тогда у одного из операторов S и S^{-1} имеется хотя бы $n/2$ s -чисел, не меньших единицы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть X_1 и X_2 – n -мерные нормированные пространства с единичными шарами B_1 и B_2 , $Q \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ – ортогональный проектор такой, что $QB_1 = QB_2$, $S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ – некоторый линейный оператор. Тогда существует оператор $\tilde{S} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такой, что $QS = Q\tilde{S}$ и $\|\tilde{S}\|_{\ell_n^1 \rightarrow X_1} \leq \|S\|_{\ell_n^1 \rightarrow X_2}$.

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству леммы 38.4, приведенному в книге Томчак-Егерман [3], надо лишь использовать оценку объема многогранника, доказанную Глускиным в работе [13].

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть множество $B = \text{abs conv}\{y_1, y_2, \dots, y_M\} \subset B_n^2$. Кроме того, предположим, что $B \supset \frac{1}{\sqrt{n}} B_n^2$.

Обозначим

$$\mathcal{U}_0 = \{T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \|T\|_{\ell_n^1 \rightarrow E_B} \leq K\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0; 1)$ множество $\mathcal{U}_0$ содержит $(\varepsilon K / \sqrt{n})$ -сеть N_ε в операторной норме на $L(\ell_n^2, \ell_n^2)$ такую, что

$$\text{card } N_\varepsilon \leq \left(\frac{a}{\varepsilon} \sqrt{\ln \frac{M}{n}} \right)^{n^2},$$

где a – абсолютная константа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $B \supset \frac{1}{\sqrt{n}} B_n^2$ из утверждения автоматически выполняется, если $B \supset B_n^1$.

Следующее утверждение является вариацией леммы 5.2 из работы [8] и утверждения 6.2 из работы [14]. При доказательстве требуется использовать оценку для объема многогранника [13] более сильную, чем использует Шарек.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $\sigma, K_0 > 0$, $H, \tilde{H}$ – гильбертовы пространства, $\dim H = k$. Рассмотрим оператор $W : H \rightarrow \tilde{H}$ такой, что $\text{card}\{j : s_j(W) \geq 1\} \geq k_0$. Пусть множество $\tilde{B} \subset \tilde{H}$ имеет вид $\tilde{B} = \text{abs conv}\{y_1, y_2, \dots, y_M\} \subset B_n^2$. Пусть g – случайная величина с распределением из класса $N(0, \sigma^2, H)$. Тогда

$$P(\{Wg \in K_0 \tilde{B}\}) \leq \left(\frac{cK_0 \sqrt{\ln(M/k_0)} \sqrt{k}}{k_0 \sigma} \right)^{k_0}. \quad (2)$$

3. Доказательство основной теоремы. Итак, Γ – некоторая конечная подгруппа в $GL(n)$ мощности s и

$$C = \max_{\gamma \in \Gamma} \|\gamma\|_{\ell_n^2 \rightarrow \ell_n^2}.$$

Введем в $\mathbb{R}^n$ новое скалярное произведение

$$(x, y)_F = \frac{1}{s} \sum_{\gamma \in \Gamma} (\gamma x, \gamma y).$$

Обозначим соответствующее евклидово пространство F , а порожденную этим скалярным произведением норму $\|\cdot\|_F$. Из определения C вытекает неравенство

$$C\|\cdot\|_F \geq \|\cdot\|_2 \geq \frac{1}{C}\|\cdot\|_F.$$

Отметим, что в новой евклидовой норме операторы из группы Γ являются ортогональными, так как сохраняют скалярное произведение. По отношению к новой евклидовой норме Γ – подгруппа группы ортогональных преобразований. Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n$ – ортонормированный базис в пространстве F .

Если пространство H инвариантно относительно действия групп Γ и $\Gamma^* = \{\gamma^* \mid \gamma \in \Gamma\}$, то H и $H^\perp$ ортогональны и в пространстве F . Поэтому оператор $P_{H^\perp}$ также будет ортогональным проектором и по отношению к новому скалярному произведению. Кроме того, если оператор T удовлетворяет условию (S_ϑ) , то

$$\|P_{H^\perp}Tx\|_F \geq \frac{1}{C}\|P_{H^\perp}Tx\|_2 \geq \frac{1}{C}\|x\|_2 \geq \frac{1}{C^2}\|x\|_F.$$

Далее всюду под ортогональностью мы понимаем ортогональность по отношению к скалярному произведению в пространстве F .

Мы будем доказывать существование n -мерного нормированного пространства с Γ -инвариантной нормой, обладающего некоторыми дополнительными свойствами. Для этого мы сначала построим множество Γ -инвариантных случайных норм, а потом докажем, что в некотором смысле подавляющее большинство из них обладает требуемыми свойствами.

Опишем построение случайной нормы в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим $g_1, g_2, \dots, g_m$ – независимые гауссовские случайные величины с распределениями из класса $N(0, 1; F)$, определенные на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) . Для каждого $\omega \in \Omega$ определим

$$B = B(\omega) = \text{abs conv} \left\{ \frac{\gamma a_i}{C}, \gamma f_j, \gamma g_t(\omega) \mid i \leq \delta n, j \leq n, t \leq m, \gamma \in \Gamma \right\},$$

где δ – некоторое фиксированное положительное число, а a_i – векторы такие, что $\|a_i\|_2 \leq 1$. По построению $\gamma(B) = B$ для всякого оператора γ из Γ , т.е. норма $\|\cdot\|_B$ является Γ -инвариантной.

С каждой группой Γ мы будем связывать множество B_Γ , определенное следующим образом:

$$B_\Gamma = \text{abs conv} \left\{ \frac{\gamma a_i}{C}, \gamma f_j \mid i \leq \delta n, j \leq n, \gamma \in \Gamma \right\}.$$

Важную роль для нас будет играть число M – количество крайних точек множества B_Γ , которое тривиально оценивается сверху: $M \leq 2sn(\delta + 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть оператор $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию (S_ϑ) , а число m , фигурирующее в построении нормы, удовлетворяет неравенству

$$\frac{\vartheta n}{2} \leq 2m(s+1) \leq \vartheta n.$$

Тогда для любого $K_0 > 0$

$$P(\{\|T\|_{E_B \rightarrow E_B} \geq K_0\}) > 1 - \left(\frac{c_0 C^2 K_0 \sqrt{\ln(2M/\vartheta n)}}{\vartheta \sqrt{n}} \right)^{\vartheta^2 n^2 / (8(s+1))}.$$

Более того,

$$\begin{aligned} & P\left(\left\{\exists Z(\omega) \subset \mathbb{R}^n, \exists j_0 \leq m \text{ такие, что} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. Z(\omega) \perp [\gamma g_j(\omega)]_{\gamma \in \Gamma, j \leq m}, P_Z(\omega) T g_{j_0} \notin K_0 P_Z(\omega) B(\omega)\right\}\right) \\ & > 1 - \left(\frac{c_0 C^2 K_0 \sqrt{\ln(2M/\vartheta n)}}{\vartheta \sqrt{n}} \right)^{\vartheta^2 n^2 / (8(s+1))}, \end{aligned} \quad (3)$$

где c_0 – некоторая константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем доказывать второе неравенство. Для краткости зависимости от ω будет опускаться. Обозначим $G_0 = [g_j]_{j \leq m}$, $G = [\gamma g_j]_{\gamma \in \Gamma, j \leq m}$, $P_H g_j = g'_j$, $P_{H^\perp} g_j = g''_j$, $G''_0 = P_{H^\perp} G_0 = [g''_j]_{j \leq m}$ и $G'' = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma G''_0$. Отметим, что для любого оператора $\gamma \in \Gamma$ выполнены соотношения $P_H \gamma = \gamma P_H$ и $P_{H^\perp} \gamma = \gamma P_{H^\perp}$, поэтому $P_{H^\perp} \gamma g_i = \gamma P_{H^\perp} g_i = \gamma g''_i$. Выберем теперь пространство Z следующим образом: $Z = (G'' + P_{H^\perp} T G''_0)^\perp \cap H^\perp$.

Выполняются следующие свойства.

1) $g'_1, g'_2, \dots, g'_m$ и $g''_1, g''_2, \dots, g''_m$ – независимые гауссовские случайные величины с распределениями из классов $N(0, (\sigma')^2, H)$ и $N(0, (\sigma'')^2, H^\perp)$ соответственно, причем

$$(\sigma')^2 = \frac{\dim H}{n} \geq \frac{\dim L}{n} \geq \frac{\vartheta n}{n} = \vartheta.$$

2) $Z \subset H^\perp$ и коразмерность Z в $H^\perp$ не превосходит коразмерности $(G'' + P_{H^\perp} T G''_0)^\perp$, т.е. размерности $G'' + P_{H^\perp} T G''_0$, а

$$\dim(G'' + P_{H^\perp} T G''_0) \leq sm + m = m(s+1) \leq \frac{\vartheta n}{2}.$$

3) $Z \perp G$; действительно, покажем, что $Z \perp \gamma g_j$ при всех $\gamma \in \Gamma, j \leq m$. Заметим, что $\gamma g_j = \gamma g'_j + \gamma g''_j = \gamma P_H g_j + \gamma g''_j = P_H \gamma g_j + \gamma g''_j$. Подпространство Z ортогонально первому слагаемому, так как $Z \subset H^\perp$, и ортогонально второму слагаемому, поскольку $Z \perp G''$.

4) G'' , а значит и Z зависят только от g''_j и не зависят от g'_j .

Рассмотрим теперь оператор $T_0 = P_Z T = P_Z P_{H^\perp} T$. Заметим, что имеет место цепочка неравенств

$$\text{rank}(T_0 - P_{H^\perp} T) = \text{rank}((I - P_Z) P_{H^\perp} T) \leq \text{rank}((I - P_Z) P_{H^\perp}) \leq \frac{\vartheta n}{2}.$$

Последнее неравенство верно из-за того, что оператор $(I - P_Z)P_{H^\perp}$ обнуляет как векторы, лежащие в H , так и векторы, лежащие в Z . Поэтому коразмерность его ядра не больше, чем коразмерность Z в $H^\perp$, которая по свойству 2 не превосходит $\vartheta n/2$. Если взять $H_0 = \{x \in L : T_0 x = P_{H^\perp} T x\}$, то

$$\dim H_0 \geq \vartheta n - \frac{\vartheta n}{2} = \frac{\vartheta n}{2}.$$

Следовательно, выполнены соотношения

$$\dim H_0 \geq \frac{\vartheta n}{2} \quad \text{и} \quad \|T_0 x\|_F = \|P_{H^\perp} T x\|_F \geq \frac{1}{C^2} \|x\|_F \quad \forall x \in H_0.$$

Из этого вытекает, что

$$\text{card}\{j : s_j(C^2 T_0) \geq 1\} \geq \frac{\vartheta n}{2}.$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \|T\|_{E_B \rightarrow E_B} \leq K_0 &\implies Tg_j \in K_0 B \quad \forall j = 1, \dots, m \implies P_{H^\perp} Tg_j \in K_0 P_{H^\perp} B \\ &\implies P_{H^\perp} Tg'_j + P_{H^\perp} Tg''_j \in K_0 P_{H^\perp} B \\ &\implies P_Z P_{H^\perp} Tg'_j + P_Z P_{H^\perp} Tg''_j = T_0 g'_j + 0 \in K_0 P_Z P_{H^\perp} B = P_Z B_\Gamma. \end{aligned}$$

Пользуясь независимостью Z и g'_j , получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|T\|_{E_B \rightarrow E_B} \leq K_0) &\leq \mathbb{P}(\{T_0 g'_j \in K_0 P_Z B_\Gamma, j = 1, \dots, m\}) \\ &= [\mathbb{P}(\{T_0 g'_1 \in K_0 P_Z B_\Gamma\})]^m = [\mathbb{P}(\{C^2 T_0 g'_1 \in C^2 K_0 P_Z B_\Gamma\})]^m. \end{aligned}$$

К оператору $W = C^2 T_0|_H$ применимо утверждение 5 с $k_0 = \vartheta n/2$, поэтому, учитывая, что $m \geq \vartheta n/(4(s+1))$, получаем оценку

$$[\mathbb{P}(\{C^2 T_0 g'_1 \in C^2 K_0 P_Z B_\Gamma\})]^m \leq \left(\frac{c_0 C^2 K_0 \sqrt{\ln(2M/\vartheta n)}}{\vartheta \sqrt{n}} \right)^{\vartheta^2 n^2 / (8(s+1))}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Мы будем искать требуемую норму среди случайных норм, описанных в начале пункта. Поэтому очевидно, что неравенство $\|\cdot\|_B \leq C \|\cdot\|_E$ будет выполняться. Обозначим $\ell_{1,F}^n$ пространство с шаром $B_{1,F}^n = \text{abs conv}\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Зафиксируем $K > 0$ и определим множество $\mathcal{U}$ следующим образом:

$$\mathcal{U} = \{T \in GL(n) : \|T\|_{\ell_{1,F}^n \rightarrow E_\Gamma} \leq 2K \text{ и } T \text{ удовлетворяет } (S_{\vartheta/2})\}.$$

Чтобы использовать предложение для таких операторов, мы будем считать, что число m удовлетворяет неравенству $\vartheta n/2 \leq 4m(s+1) \leq \vartheta n$. В силу утверждения 4 множество $\mathcal{U}$ содержит $(K/(2\sqrt{n}))$ -сеть N такую, что $\text{card } N \leq (C_1 \sqrt{\ln 2s(\delta+1)})^{n^2}$.

Рассмотрим событие

$$\{\omega \in \Omega : \forall T \in N \quad \exists Z \quad Z \perp [\gamma g_j(\omega)]_{\gamma \in \Gamma, j \leq m} : \exists j \leq m \quad P_Z T g_j(\omega) \notin 2K P_Z B(\omega)\}. \quad (4)$$

В силу неравенства (3) можно выбрать $c_2 = c_2(\vartheta, \delta, s, C)$ так, чтобы если $K \leq c_2 \sqrt{n}$, то

$$P(\{(4)\}) \geq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}.$$

При этом константа $c(\vartheta, \delta, s) = C^2 c_2(\vartheta, \delta, s, C)$ не зависит от C .

Рассмотрим $B(\omega)$, удовлетворяющие условию (4) и дополнительному условию

$$\|g_j(\omega)\|_F \leq 2 \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (5)$$

В силу (1) при достаточно больших n указанные шары B существуют. Мы покажем, что любой такой шар B удовлетворяет условию теоремы с константой $c(\vartheta, \delta, s)$. Предположим противное. Пусть для некоторого B выполнены условия (4) и (5) и существует оператор T , удовлетворяющий условию (S_ϑ) , такой, что

$$\|T\|_{E_B \rightarrow E_B} \leq K. \quad (6)$$

Пусть, как и раньше, $G = [\gamma g_j]_{\gamma \in \Gamma, j \leq m}$ и $Q = P_{G^\perp}$. Поскольку $B_{1,F}^n \subset B$, то $\|T\|_{\ell_{1,F}^n \rightarrow E_B} \leq K$ и $QB = QB_\Gamma$. Тогда в силу утверждения 3 существует оператор $\tilde{T}$ такой, что $\|\tilde{T}\|_{\ell_{1,F}^n \rightarrow E_\Gamma} \leq K < 2K$, $\text{rank}(T - \tilde{T}) \leq \dim G \leq sm \leq \vartheta n/2$ и

$$QT = Q\tilde{T}. \quad (7)$$

Следовательно, оператор $\tilde{T}$ удовлетворяет условию $(S_{\vartheta/2})$. Действительно, в качестве H возьмем то же пространство, что и для оператора T , а в качестве L — пересечение L с $\ker(T - \tilde{T})$. Поскольку $\text{rank}(T - \tilde{T}) \leq \vartheta n/2$ и $\dim L \geq \vartheta n$, то их пересечение имеет размерность не меньше, чем $\vartheta n/2$, поэтому $\tilde{T} \in \mathcal{U}$. Значит, существует оператор $T_1 \in N$ такой, что

$$\|\tilde{T} - T_1\|_{F \rightarrow F} \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}.$$

Поскольку $T_1 \in N$ и B удовлетворяет (4), то можно найти $Z \perp G$ и $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, удовлетворяющие условию

$$P_Z T_1 g_j \notin 2K P_Z B. \quad (8)$$

С другой стороны,

$$\|\tilde{T} g_j - T_1 g_j\|_2 \leq \|\tilde{T} - T_1\|_{\ell_n^2 \rightarrow \ell_n^2} \|g_j\|_2 \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \cdot 2 = \frac{K}{\sqrt{n}},$$

поэтому

$$\tilde{T} g_j - T_1 g_j \in \frac{K}{\sqrt{n}} B_F \subset K B_{1,F}^n \subset KB$$

и, следовательно,

$$P_Z \tilde{T} g_j - P_Z T_1 g_j \in K P_Z B. \quad (9)$$

Учитывая (8) и (9), получаем, что $P_Z \tilde{T} g_j \notin K P_Z B$. Поскольку $Z \subset G^\perp$, верно равенство $P_Z Q = P_Z$. Значит, $P_Z Q \tilde{T} g_j \notin K P_Z Q B$. В силу соотношения (7) из этого следует, что $P_Z Q T g_j \notin K P_Z Q B$. Таким образом, $Q T g_j \notin K Q B$, что противоречит условию (6).

4. Применения основного результата.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Рассмотрим сначала случай, когда оператор $(-\text{id})$ принадлежит Γ_1 и Γ_2 . Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ – подгруппа в $O(2n)$. Тогда $\text{card } \Gamma = \text{card } \Gamma_1 \cdot \text{card } \Gamma_2 = s$.

В силу теоремы 3 существует Γ -инвариантная норма $\|\cdot\|_B$ в $\mathbb{R}^{2n}$ такая, что если оператор $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию (S_ϑ) , то $\|T\| \geq c_1(\vartheta, s)\sqrt{2n}$.

Определим нормы в пространствах X и Y следующим образом: $\|x\|_X = \|(x, 0)\|_B$, $\|y\|_Y = \|(0, y)\|_B$. Будем отождествлять X и Y с соответствующими подпространствами E_B . Тогда в силу построения нормы $\|\cdot\|_B$ норма в пространстве X Γ_1 -инвариантна, а норма в пространстве Y Γ_2 -инвариантна. Теперь подпространства X и Y в пространстве E_B являются Γ -инвариантными. Кроме того, поскольку $(-\text{id}) \in \Gamma_1$ и $(-\text{id}) \in \Gamma_2$, имеют место неравенства

$$\|(x, y)\|_{E_B} \geq \|x\|_X, \quad \|(x, y)\|_{E_B} \geq \|y\|_Y.$$

Покажем, что расстояние $d(X, Y)$ не меньше, чем $\frac{1}{2}c_1^2(1/4, s)n$. Пусть $S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ – обратимый оператор. Нам требуется доказать, что

$$\|S\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|S^{-1}\|_{Y \rightarrow X} \geq \frac{1}{2}c_1^2\left(\frac{1}{4}, s\right)n.$$

Будем считать, что $\|S\|_{X \rightarrow Y} = \|S^{-1}\|_{Y \rightarrow X}$. В силу утверждения 2 можно предположить, что

$$\text{card}\{j : s_j(S) \geq 1\} \geq \frac{n}{2}.$$

Рассмотрим оператор $T \in L(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$, определенный следующим образом:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & S^{-1} \\ S & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \|T(x, y)\|_{E_B} &= \|(S^{-1}y, Sx)\|_{E_B} \leq \|S^{-1}y\|_X + \|Sx\|_Y \\ &\leq \|S\|_{X \rightarrow Y}(\|y\|_Y + \|x\|_X) \leq 2\|S\|_{X \rightarrow Y}\|(x, y)\|_{E_B}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|S\|_{X \rightarrow Y} \geq \frac{1}{2}\|T\|_{E_B \rightarrow E_B}.$$

Из определения оператора T

$$P_{X^\perp}T = P_Y T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для оператора T выполняются условия теоремы 5: существует Γ -инвариантное подпространство $H = X$ такое, что оператор $P_{H^\perp}T$ имеет хотя бы $\frac{1}{4}\dim E_B = \frac{1}{2}n$ s -чисел, не меньших единицы. Следовательно, $\|T\|_{E_B \rightarrow E_B} \geq c_1(1/4, s)\sqrt{2n}$. Поэтому $\|S\|_{X \rightarrow Y} \geq \frac{1}{2}c_1(1/4, s)\sqrt{2n}$. В итоге получаем, что $d(X, Y) \geq \frac{1}{2}(c_1(1/4, s))^2n$.

Общий случай следует из уже доказанного добавлением в группы Γ_1 и Γ_2 оператора $(-\text{id})$, что увеличивает мощности групп не более, чем в два раза.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что $\frac{1}{2}(c_1(1/4, 4s))^2 \geq (A \ln s)^{-Bs}$, где A и B — некоторые абсолютные константы. Следовательно,

$$d(X, Y) \geq (A \ln s)^{-Bs_n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. В силу замечания и теоремы существуют такие нормированные пространства X_n и Y_n , что

$$d(X_n, Y_n) \geq e^{\ln n - Bs_n(\ln A + \ln \ln s_n)} = n^{1 - Bs_n(\ln A + \ln \ln s_n) / \ln n}.$$

Осталось положить $\varepsilon_n = Bs_n(\ln A + \ln \ln s_n) / \ln n$ и заметить, что ε_n стремится к нулю.

Для любого векторного пространства X определим векторное пространство X_m , как декартово произведение m экземпляров пространства X . Зафиксируем натуральное число m .

Для двух n -мерных векторных пространств X и Y определим пространства W'_1 и W'_2 , а также пространство W' , следующим образом:

$$W'_1 = X_{m+1} \times Y_m, \quad W'_2 = X_m \times Y_{m+1}, \quad W' = W'_1 \times W'_2 = X_{m+1} \times Y_m \times X_m \times Y_{m+1}.$$

Обозначим W_X и W_Y подпространства W' , определенные следующим образом:

$$W_X = X_{m+1} \times \mathcal{O}_m \times X_m \times \mathcal{O}_{m+1}, \quad W_Y = \mathcal{O}_{m+1} \times Y_m \times \mathcal{O}_m \times Y_{m+1},$$

где $\mathcal{O}_n$ — n -мерный нуль.

Если в пространствах X и Y введены нормы, то в пространствах W'_1 и W'_2 можно ввести нормы, как в пространствах, являющихся суммами X и Y по типу ℓ^2 . Эти нормированные пространства мы будем обозначать W_1 и W_2 соответственно. Если в пространстве W' введена норма, то на X, Y, W'_1, W'_2 можно ввести норму, как на подпространствах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Заметим, что $\dim W' = (4m + 2)n$. Любой вектор $w \in W'$ имеет вид

$$w = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m, \\ x_{m+2}, x_{m+3}, \dots, x_{2m}, x_{2m+1}, y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{2m}, y_{2m+1}),$$

где $x_j \in X, y_j \in Y$ при $j = 1, \dots, 2m + 1$.

Рассмотрим группу Γ , порожденную операторами γ_1 и γ_2 циклического сдвига, переставляющими компоненты вектора w , соответствующие подпространству W_X и подпространству W_Y , и операторами γ_3 и γ_4 замены знака у одной из компонент. Очевидно, что $\text{card } \Gamma = (2m + 1)^2 2^{4m+2}$. Обозначим $\text{card } \Gamma = s$.

В силу теоремы 5 в пространстве W' можно таким образом ввести Γ -инвариантную норму, что если оператор T удовлетворяет условию (S_ϑ) с некоторым положительным ϑ , то выполнено неравенство $\|T\|_{W' \rightarrow W'} \geq c_1(\vartheta, s) \sqrt{(4m + 2)n}$.

Все слагаемые, составляющие W_X , изометричны. Значит, введена норма на X . Аналогично введена норма и на Y . Покажем, что

$$d(W_1, W_2) \geq \frac{1}{(4m + 2)} c_1^2 \left(\frac{1}{4(2m + 1)}, s \right) n.$$

Оценим снизу $d(W'_1, W'_2)$. Рассмотрим произвольный обратимый оператор $S \in L(W'_1, W'_2)$. Надо оценить снизу $\|S\|_{W'_1 \rightarrow W'_2} \cdot \|S^{-1}\|_{W'_2 \rightarrow W'_1}$. Не умаляя общности, можно считать, что

$$\|S\|_{W'_1 \rightarrow W'_2} = \|S^{-1}\|_{W'_2 \rightarrow W'_1}.$$

Определим оператор $T \in L(W', W')$ так же, как при доказательстве теоремы 6. Отметим, что, как и раньше, имеет место оценка

$$\|S\|_{W'_1 \rightarrow W'_2} \geq \frac{1}{2} \|T\|_{W' \rightarrow W'}.$$

Теперь обозначим $H_1 = X_{m+1} \cap S^{-1}(Y_{m+1})$. В силу того, что $\dim X_{m+1} = \dim S^{-1}(Y_{m+1}) = n(m+1)$, а $\dim W'_1 = n(2m+1)$, получаем, что $\dim H_1 \geq n$. Пусть $H_2 = S(H_1) \subset Y_{m+1}$, $U = S|_{H_1}: H_1 \rightarrow H_2$; тогда $U^{-1} = S^{-1}|_{H_2}$. В силу утверждения 2 у одного из этих операторов хотя бы $n/2$ s -чисел, не меньших единицы. Не умаляя общности,

$$\text{card}\{j : s_j(U) \geq 1\} \geq \frac{n}{2}.$$

Заметим, что по построению подпространства W_X и W_Y являются Γ -инвариантными. Поскольку $H_2 \subset W_Y$, то $P_{W_X^\perp} U = P_{W_Y} U = U$. Положим $H = W_X$. Обозначим через L подпространство в H_1 размерности не меньше $n/2$ такое, что для любого x из L имеет место неравенство $\|Ux\|_2 \geq \|x\|_2$. Такое подпространство существует по утверждению 1.

Тогда

$$\forall x \in L \quad \|P_{H^\perp} Tx\|_2 = \|P_{H^\perp} Sx\|_2 = \|P_{H^\perp} Ux\|_2 = \|Ux\|_2 \geq \|x\|_2.$$

Следовательно, оператор T удовлетворяет условию (S_ϑ) с константой

$$\vartheta = \frac{1}{4(2m+1)}.$$

Поэтому по теореме 5 выполнено неравенство

$$\|T\|_{W' \rightarrow W'} \geq c_1 \left(\frac{1}{4(2m+1)}, s \right) \sqrt{(4m+2)n}.$$

Значит,

$$d(W'_1, W'_2) \geq \frac{1}{4} c_1^2 \left(\frac{1}{4(2m+1)}, s \right) (4m+2)n.$$

Очевидно, что $d(W_1, W'_1) \leq 2m+1$ и $d(W_2, W'_2) \leq 2m+1$. Поэтому в силу неравенства треугольника для расстояния Банаха–Мазура

$$d(W_1, W_2) \geq \frac{1}{(2m+1)^2} \frac{1}{4} c_1^2 \left(\frac{1}{4(2m+1)}, s \right) (4m+2)n \geq e^{-e^{Am}} \dim W_1.$$

Нам потребуется свойство логарифмической выпуклости модифицированного расстояния Банаха–Мазура, которые доказаны Храбровым [5].

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для любых нормированных пространств X_1, X_2, Y_1 и Y_2 , $\dim X_k = \dim Y_k = n_k, k = 1, 2$, выполнено неравенство

$$\partial(X_1 \oplus X_2, Y_1 \oplus Y_2) \leq (\partial(X_1, Y_1))^{n_1/(n_1+n_2)} \cdot (\partial(X_2, Y_2))^{n_2/(n_1+n_2)},$$

где суммы пространств понимаются как суммы по типу ℓ^2 .

Для полноты изложения докажем это утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Пусть операторы T_k и S_k с определителем 1 таковы, что

$$\partial(X_k, Y_k) = \|T_k\|_{X_k \rightarrow Y_k} \cdot \|S_k\|_{Y_k \rightarrow X_k}.$$

Рассмотрим оператор $T_\alpha = \alpha^{1/n_1} T_1 \oplus \alpha^{-1/n_2} T_2$, определитель которого тоже равен 1. Тогда

$$\|T_\alpha\|_{X_1 \oplus X_2 \rightarrow Y_1 \oplus Y_2}^2 \leq \max\{\alpha^{2/n_1} \|T_1\|^2, \alpha^{-2/n_2} \|T_2\|^2\}.$$

Построим аналогичным образом оператор S_β . Выбирая α и β так, чтобы минимизировать правые части неравенств, и перемножая соответствующие оценки, получаем требуемое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Выберем число m в теореме 2 такое, что

$$\frac{\ln \ln n}{2A \ln \ln \ln n} \leq m \leq \frac{\ln \ln n}{A \ln \ln \ln n}.$$

Положим $K_n = (2m+1)n$. В качестве X_n и Y_n возьмем пространства W'_1 и W'_2 . Тогда в силу логарифмической выпуклости модифицированного расстояния

$$\partial(W'_1, W'_2) \leq n^{1/(2m+1)} \leq n^{1/m},$$

а $d(W'_1, W'_2) \geq e^{-e^{Am}} K_n$. Поэтому

$$\frac{d(X_n, Y_n)}{\partial(X_n, Y_n)} \geq \frac{e^{-e^{Am}}}{n^{1/m}} K_n \geq K_n^{1-\varepsilon_n},$$

где

$$\varepsilon_n = (\ln n)^{1/\ln \ln \ln n - 1} + 2A \frac{\ln \ln \ln n}{\ln \ln n}$$

— последовательность, стремящаяся к нулю.

Автор благодарит Б. М. Макарова и А. И. Храброву за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Giannopoulos A. A., Milman V. D. Euclidean structure in finite dimensional normed spaces // Handbook on the Geometry of Banach Spaces / ed. W.B. Johnson, J. Lindenstrauss. V. 1: Elsevier, 2001. P. 707–779.
- [2] Milman V. D. Topics in asymptotic geometric analysis. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). Visions in Mathematics. Towards 2000 // Geom. Funct. Anal. 2000. Spec. Vol., Part II. P. 792–815.
- [3] Tomczak-Jaegermann N. Banach–Mazur distances and finite-dimensional operator ideals. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. V. 38. Harlow–New York: Longman, 1989.
- [4] Глускин Е. Д. Диаметр компакта Минковского примерно равен n // Функцион. анализ и его прилож. 1981. Т. 15. № 1. С. 72–73.
- [5] Храбров А. И. Оценки расстояний между суммами пространств ℓ_n^p // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2000. Вып. 3. № 17. С. 57–63.
- [6] Rudelson M. Estimates of the weak distance between finite-dimensional Banach spaces // Israel J. Math. 1995. V. 89. № 1–3. P. 189–204.
- [7] Tomczak-Jaegermann N. The weak distance between finite-dimensional Banach spaces // Math. Nachr. 1984. V. 119. P. 291–307.
- [8] Szarek S. J. On the existence and uniqueness of complex structure and spaces with “few” operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 293. P. 339–353.
- [9] Глускин Е. Д. Конечномерные аналоги пространств без базиса // Докл. АН СССР. 1981. Т. 216. С. 72–73.
- [10] Mankiewicz P. Compact groups of operators on proportionals quotients of ℓ_n^1 // Israel J. Math. 1999. V. 109. P. 75–91.
- [11] Mankiewicz P. Subspace mixing properties of operators in $\mathbb{R}^n$ with applications to Gluskin spaces // Studia Math. 1988. V. 88. № 1. P. 51–67.
- [12] Mankiewicz P., Tomczak-Jaegermann N. Quotients of finite-dimensional Banach spaces; random phenomena // Handbook on the Geometry of Banach spaces / ed. W.B. Johnson, J. Lindenstrauss. V. 2: Elsevier, 2003. P. 1201–1246.
- [13] Глускин Е. Д. Экстремальные свойства ортогональных параллелепипедов и их приложения к геометрии банаховых пространств // Матем. сб. 1988. Т. 136(178). № 1(5). С. 85–96.
- [14] Szarek S. J. The finite dimensional basis problem with an appendix on nets of Grassmann manifolds // Acta Math. 1983. V. 151. P. 153–179.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: fbakharev@yandex.ru

Поступило
 10.08.2004
 Исправленный вариант
 12.03.2005